

文章编号:1673-2049(2005)04-0054-03

# 带有裂纹的薄壁圆筒压力容器临界荷载研究

葛清蕴, 翟振东, 刘东坡, 郭东

(长安大学 建筑工程学院, 陕西 西安 710061)

**摘要:**采用断裂力学中的最大周向应力理论,通过分析带有裂纹的薄壁圆筒压力容器在受所储气体或液体的内压力 $p$ 作用下的应力状态,研究裂纹尖端形成的复合型应力,推导出裂纹开始扩展临界状态时的开裂角 $\theta_0$ ,得出裂纹角 $\beta$ 与开裂角 $\theta_0$ 的关系,并推导出临界荷载 $p_{cr}$ 。最后将所得结果与现行钢制压力容器规范的结果比较,表明现行钢制压力容器规范的结果实用、安全。

**关键词:**薄壁圆筒压力容器;断裂力学;最大周向应力;I-II复合型裂纹;临界荷载

中图分类号:TU333

文献标志码:A

## Study of critical loads of thin-walled cylinder pressure vessel with crack

GE Qing-yun, ZHAI Zhen-dong, LIU Dong-po, GUO Dong

(School of Architectural Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China)

**Abstract:** Based on the theory of maximum circumferential stress of fracture mechanics, and by analyzing the stress of the thin-walled cylinder pressure vessel with crack which was under the action of pressure  $p$  (generated by the gas or liquid inside), authors studied the mixed mode crack stress; acquired the cracking angle  $\theta_0$  when the crack began to expand; obtained the relation of cracking angle  $\theta_0$  and crack initiation angle  $\beta$ , and deduced critical loads  $p_{cr}$ . Finally, by comparing the result of this paper with active criterion on steel pressure vessels, authors concluded that active criterion on steel pressure vessels is practical and in safe range.

**Key words:** thin-walled cylinder pressure vessel; fracture mechanics; maximum circumferential stress; I-II mixed mode crack; critical load

## 0 引言

随着现代化建设的迅速发展,越来越多承受内压的钢制薄壁圆筒压力容器被应用于工程中,不少学者对此做了研究。目前,中国规范 GB 150-1998《钢制压力容器》<sup>[1]</sup>中采用中径公式和屈服失效准则或爆破失效准则,以及相应的常规屈服安全系数 $n_s \geq 1.60$ 或常规抗拉安全系数 $n_b \geq 3.00$ ,进行钢制薄壁内压圆筒形容器的强度计算或应力水平校核;文献[2]中用双剪统一强度理论求得了薄壁圆筒容器的强度极限解;文献[3]中应用经典的弹塑性和强度理论对轴对称压力容器做了严密的弹塑性力学分

析。文献[1]~[3]中都未考虑裂纹对容器强度的影响,但薄壁圆筒压力容器在制造、运输或使用过程中,都不可避免地存在着裂纹。薄壁圆筒压力容器在内压力的作用下,裂纹尖端出现应力集中,形成I-II复合型裂纹应力。因此笔者采用断裂力学中最大周向应力理论对I-II复合型裂纹进行分析,确定带有裂纹的薄壁圆筒压力容器在裂纹开始扩展临界状态所对应的开裂角和临界荷载。

## 1 最大周向应力理论<sup>[4]</sup>

对I-II型复合平面问题,裂纹尖端的应力场可由I型的解和II型的解叠加求得。裂纹尖端附近的

应力场用极坐标表示将更为清楚、方便。

将极坐标原点取在裂纹尖端,裂纹尖端附近的应力分量如图1所示,其应力场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I (3 - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + K_{II} \cdot \right. \\ &\quad \left. (3 \cos \theta - 1) \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \cdot [K_I (1 + \cos \theta) - 3K_{II} \sin \theta] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \cdot [K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $K_I$  为 I 型裂纹尖端的应力强度因子;  $K_{II}$  为 II 型裂纹尖端的应力强度因子;  $\sigma_r$  为径向正应力;  $\sigma_\theta$  为周向正应力或切向正应力;  $\tau_{r\theta}$  为切应力。

基于上述应力场,最大周向应力准则中有两个基本假定:①裂纹将沿周向应力最大值  $\sigma_{\theta\max}$  的方向扩展;②裂纹开始失稳扩展的条件是  $\sigma_{\theta\max}$  达到某临界值  $\sigma_c$ 。

为了求  $\sigma_\theta$  最大的方向,求  $\sigma_\theta$  对  $\theta$  的导数,由式(1)中的第二分式,可得

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = -\frac{3}{2} \tau_{r\theta} \quad (2)$$

设当  $\theta = \theta_0$  时,  $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$ , 可得

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \cdot [K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1)] = 0 \quad (3)$$

由  $\cos (\theta_0/2) = 0$ , 可解得  $\theta_0 = \pm \pi$ , 此解在物理上不可能存在, 因为裂纹不可能沿反方向扩展。另一组解可由式(4)求得

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (4)$$

知道了起裂角或称开裂角  $\theta_0$  后, 可以确定  $r = r_0$  圆周上最大周向应力为

$$\sigma_{\theta\max} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta_0}{2} \cdot [K_I (1 + \cos \theta_0) - 3K_{II} \sin \theta_0] \quad (5)$$

相应的断裂判据为

$$\sigma_{\theta\max} = \sigma_c \quad (6)$$

由于纯 I 型裂纹是复合型裂纹的特例, 如果最大周向应力理论正确, 它也应该适用于纯 I 型裂纹。此时  $K_I = K_{Ic}$ ,  $K_{II} = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ , 式(5)转换为

$$\sigma_{\theta\max} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = \sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (7)$$

将式(7)代入式(5), 可得

$$\cos (\theta_0/2) \cdot [K_I (1 + \cos \theta_0) - 3K_{II} \sin \theta_0] = 2K_{Ic} \quad (8)$$

式(8)是按最大周向应力理论建立的复合型断裂准则。

## 2 压力容器的临界荷载

图2为薄壁圆筒压力容器, 壁厚为  $t$ , 直径为  $D$ , 其中  $t \leq D/20$ , 圆筒受所储气体或液体的内压力为  $p$ 。设圆筒壁上有长度为  $2a$  且与轴线成夹角为  $\beta$  的穿透裂纹。现运用第1节最大周向应力理论确定裂纹开始扩展临界状态时所对应的开裂角  $\theta_0$  和临界荷载  $p_{cr}$ 。

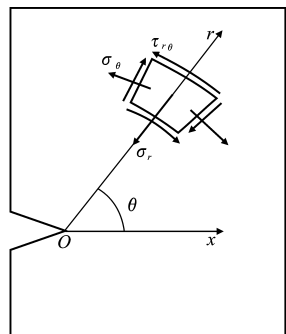


图1 裂纹尖端应力的极坐标分量

Fig. 1 Sub-stress of crack tip in polar coordinates

在内压力  $p$  作用下, 带裂纹单元体的应力状态如图3所示。此时, 由材料力学<sup>[5]</sup> 知识得

$$\sigma_x = pD/(4t), \sigma_y = pD/(2t), \tau_{xy} = 0 \quad (9)$$

单元体任意截面上的应力公式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由式(9)、(10)可得裂纹面上的应力分量为

$$\sigma_\alpha = \frac{3pD}{8t} - \frac{pD}{8t} \cos 2\alpha \quad (11)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{pD}{8t} \sin 2\alpha \quad (12)$$

由于  $\alpha = \pi/2 - \beta$ , 式(11)、(12)可分别转换为

$$\sigma_\alpha = \frac{3pD}{8t} + \frac{pD}{8t} \cos 2\beta \quad (13)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{pD}{8t} \sin 2\beta \quad (14)$$

式中:  $\tau_\alpha$  的负号表明切应力对单元体内任意点的矩为逆时针转向, 即与如图3所示相反。

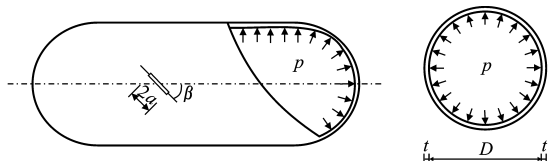


图2 薄壁圆筒压力容器

Fig. 2 Thin-walled cylinder pressure vessel

由于裂纹面上同时作用正应力和剪应力, 因此该裂纹问题为 I - II 复合型裂纹问题<sup>[1]</sup>, 其中

$$K_I = \sigma_\alpha \sqrt{\pi a} = \left( \frac{3pD}{8t} + \frac{pD}{8t} \cos 2\beta \right) \sqrt{\pi a} = \frac{pD}{8t} \sqrt{\pi a} (3 + \cos 2\beta) \quad (15)$$

$$K_{II} = \tau_a \sqrt{\pi a} = (\frac{pD}{8t} \sin 2\beta) \sqrt{\pi a} = \frac{pD}{8t} \sqrt{\pi a} \sin 2\beta \tag{16}$$

将式(15)、(16)代入式(4),得

$$(3 + \cos 2\beta) \sin \theta_0 + (3 \cos \theta_0 - 1) \sin 2\beta = 0 \tag{17}$$

由式(17)确定的裂纹角  $\beta$  与开裂角  $\theta_0$  的关系,如表 1 所示。

当给定裂纹角  $\beta$  时,就可以求得开裂角  $\theta_0$ ,将  $\theta_0$ 、 $K_I$ 、 $K_{II}$ 代入式(8),得

$$p_{cr} = 16tK_{Ic} / \{ D \sqrt{\pi a} \cos \frac{\theta_0}{2} \cdot [(3 + \cos 2\beta) \cdot (1 + \cos \theta_0) - 3 \sin 2\beta \sin \theta_0] \} \tag{18}$$

令  $t/D = n$ ,则

$$p_{cr} = 16nK_{Ic} / \{ \sqrt{\pi a} \cos \frac{\theta_0}{2} \cdot [(3 + \cos 2\beta) \cdot (1 + \cos \theta_0) - 3 \sin 2\beta \sin \theta_0] \} \tag{19}$$

表 1 裂纹角  $\beta$  与开裂角  $\theta_0$  的关系/(°)

Tab. 1 Relation of crack initiation angle  $\beta$  and cracking angle  $\theta_0$

$\beta$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$-\theta_0$	0	9.78	18.38	27.68	29.82	32.33	35.39	28.22	17.93	0

3 算 例

已知内压薄壁圆筒形容器,材料为 Q235 钢;力学性能参考文献[6], $K_{Ic}$  为 129.642 MPa·m<sup>1/2</sup>,壁厚  $t$  为 20 mm,直径  $D$  为 460 mm,温度为 30 °C。

裂纹长度取不同值时笔者所得的结果如图 4 所示。由图 4 可以看出:随着裂纹长度的减小,压力容器的极限荷载逐渐增大。这是因为,当裂纹较小时,可以将裂纹看成是裂缝源,能造成应力集中,因此极限荷载的计算结果较大。

当裂缝长度  $2a$  为 20 mm,采用中径公式<sup>[1]</sup>的设计温度时,圆筒的最大允许工作压力按式(20)计算

$$[p_w] = \frac{2\delta_e [\sigma]'\phi}{D_i + \delta_e} \tag{20}$$

由式(20)得出最大允许工作压力  $[p_w] = 13.58$  MPa;若取屈服安全系数  $n_s = 2$ ,可得  $p'_{cr} = 27.16$  MPa。可以看出:用本文的公式计算所得结果比文献[1]中所得结果偏大。究其原因,笔者假设材料是各向同性的均匀介质,且容器上只存在一条裂纹,而

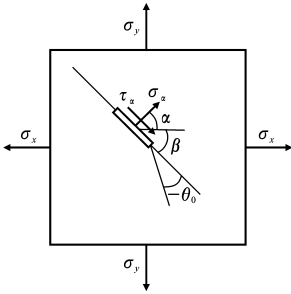


图 3 单元体应力

Fig. 3 Stress of unit volume

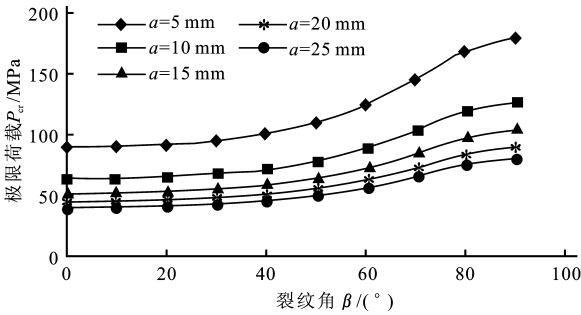


图 4 极限荷载  $p_{cr}$  与裂纹角  $\beta$  的关系

Fig. 4 Relation of ultimate loads  $p_{cr}$  and crack initiation angle  $\beta$

实际上材料的组织并非均匀,也非各向同性,且不可能只存在一条裂纹。因此,本文的评定方法存在某些偏差,致使压力容器缺陷的断裂力学结论不够精确。

4 结 语

笔者应用断裂力学中最大周向应力理论,推导出带裂纹的薄壁圆筒压力容器在内压力作用下裂纹开始扩展临界状态时所对应的开裂角和临界荷载。笔者推导出的公式考虑裂纹的影响,而文献[1]中未考虑裂纹的影响,仅仅根据经验用安全系数将所有不可预知的影响因素考虑在内。从本文中的推导可以看出:本文的公式计算所得结果值比文献[1]中所得结果偏大。因此,文献[1]中的结果偏于安全。笔者所得结论从另一个角度说明文献[1]中的结果是可靠的,从而钢制压力容器的常规设计标准对规范薄壁内压容器的设计、制造、试验和验收、防止容器发生恶性事故能起到很重要的作用。

参考文献:

[1] GB 150-1998,钢制压力容器[S].  
[2] 翟 越,魏雪英,计 琳,赵均海.薄壁圆筒在双剪统一强度理论下的统一解[J].长安大学学报(建筑与环境科学版),2004,21(3):1—3.  
[3] 吴振强,张灿邦,张曙红.轴对称压力容器弹塑性与强度分析[J].红河学院学报,2004,2(2):4—7.  
[4] 酆正能,何庆芝.工程断裂力学[M].北京:北京航空航天大学出版社,1993.  
[5] 孙训方,方孝淑,关来泰.材料力学(第三版)[M].北京:高等教育出版社,1994.  
[6] 赵章焰,孙国正.用柔度标定法测量 Q235 钢断裂韧性[J].武汉理工大学学报(交通科学与工程版),2002,26(4):441—443.