

文章编号:1673-2049(2005)04-0072-05

薄膜结构曲面几何性质研究

徐彦,关富玲,管瑜

(浙江大学 空间结构研究中心,浙江 杭州 310027)

摘要:采用非线性有限元法进行了膜结构的形态分析和荷载分析,得到了曲面有限元网格;通过离散微分几何方法,研究了薄膜结构曲面的几何性质,包括曲面的法线向量、高斯曲率、平均曲率和主方向矢量,避免了复杂的曲面拟合过程。几何性质研究对优化分析方法,选择裁剪样式,分析裁剪误差都具有重要意义。最后通过算例表明:该方法能够快捷、精确地研究薄膜结构曲面的几何性质,对更合理地设计薄膜结构具有重要意义。

关键词:薄膜结构;非线性有限元法;曲率;微分几何

中图分类号:TU381

文献标志码:A

Research on geometry property of membrane structure curved surface

XU Yan, GUAN Fu-ling, GUAN Yu

(Space Structure Research Center, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The shape-form analysis and load analysis were done by nonlinear FEM. On the basis of surface FEM grid nodes, geometry property research of structure curved surface was progressed, including normal vector, GAUSS curvature, mean curvature and principal direction vector. In this process, the approximate expression of surface didn't need to be known. The research of surface geometry property was useful for the optimization of analyzed method, the selection of cutting pattern mode and the analysis of cutting pattern error. The results show that the geometry property of structure curved surface can be gained by the method and will help to design this kind of structure.

Key words: membrane structure; nonlinear FEM; curvature; differential geometry

0 引言

薄膜结构在近几十年内得到了长足的发展,它具有优美、柔和及可变的曲面造型,给人以独特的美感。由于膜材没有抗弯、抗压刚度,因此完全靠施加的预应力保持其形状,膜表面通过其自身曲率的变化平衡外荷载,从而达到内、外力的平衡。

通常薄膜结构曲面两个方向的曲率是相反的,下凹曲线承受向下的荷载,上凸曲线承受向上的荷载。薄膜结构质量轻、刚度小、自振频率低,对风的

作用非常敏感。在膜结构使用阶段膜面的曲率最好不反转,但在大积雪或强风情况下,曲面曲率往往发生反转,曲面由原来的负高斯曲率变成正高斯曲率而成为凸曲面,从而降低了膜面整体的承载能力。这种变形的反复发生对膜结构使用性能极为不利,曲面发生反转时,中间会产生很大的褶皱,由于膜面反复褶皱,材料强度降低,导致了膜结构的不稳定甚至破坏。膜结构会因积雪或强风的作用而导致破坏,如日本熊本公园穹顶因风载撕裂的破坏情况,如图 1 所示。

以前对薄膜结构的研究主要在于探讨薄膜结构的受力性能,包括形态分析、荷载分析和裁剪分析,对其几何特性的研究不是很多,只有少数的学者进行了尝试性研究^[1~4]。如文献[2]中粗略地讨论了膜曲面的各种几何特性,其中包括高斯曲率,但没有给出具体的算法;文献[3]中将曲面的主曲率作为目标进行形态分析优化,由曲面拟合得到曲面的近似表达式,然后求解出曲面的曲率。笔者在研究薄膜结构受力性能的同时研究其曲面几何特性,力图揭示两者之间的相互关系,以便更好地进行此类结构的分析设计。



图 1 日本熊本公园穹顶在风荷载下的破坏情况

Fig. 1 Destroyed situation of Kumamoto Park dome under wind load in Japan

1 非线性有限元法

充气膜结构的分析包括形态分析、荷载分析和裁剪分析,它们构成了结构分析的全过程。形态分析是其中的第一步,对于给定的结构进行形态分析必须首先在合理的范围内选取内压,并相应地设定膜、索的初应力。从结构平面状态起步,分步逐级施加内压,进行结构平衡迭代求解。当内压达到给定的数值时,根据平衡条件求得的相应曲面几何形态,就是初始形态分析所得到的最终几何形态。

从平面状态到最终的几何形状,膜材要在内压的作用下发生位移,结构势必要发生很大的变形,体现出很强的几何非线性。通常都采用非线性有限元的增量法来进行非线性分析,在此笔者采用 UL 格式,所有变量均以 T 时刻的位形作为参考位形。

为了描述单元运动,需建立位移模式,即单元内任一点位移与节点位移间的关系为

$$u_i = \sum_{k=1}^n h_k^i u^k \quad (1)$$

式中: h_k^i 为局部坐标下的插值函数; u^k 为局部坐标下 T 时刻单元节点位移增量; n 为单元节点数。

考虑薄膜结构的几何非线性,在应变和位移的关系中计及二次项

$$\epsilon = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL})u \quad (2)$$

$$d\epsilon = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL})du \quad (3)$$

膜材为线弹性材料,应力和应变的关系为

$$\sigma = \mathbf{D}\epsilon + \sigma_0 \quad (4)$$

式中: σ_0 为预应力; \mathbf{D} 为材料本构矩阵。

由虚功原理和变分原理,得到在 $t + \Delta t$ 时刻局部坐标系下膜单元的平衡方程为

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL})u = \mathbf{R} - \mathbf{F} \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_L = \int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dV \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_{NL} = \int_V \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{t} \mathbf{B}_{NL} dV \quad (7)$$

式中: \mathbf{K}_L 为结构线性应变增量刚度矩阵; \mathbf{K}_{NL} 为结构非线性应变增量刚度矩阵; \mathbf{R} 为荷载列向量,初始形态分析时只为内压,荷载分析时包括内压和其他荷载; \mathbf{F} 为 T 时刻单元应力的等效节点力向量; \mathbf{B}_L^T 、 \mathbf{B}_{NL}^T 分别为线性应变 e_{ij} 和非线性应变 η_{ij} 与位移间的关系矩阵。

由找形分析得到合理的初始平衡形态;采用荷载增量法进行荷载分析,得到在各种荷载情况下达到的新的平衡形态。

2 离散曲面曲率求解

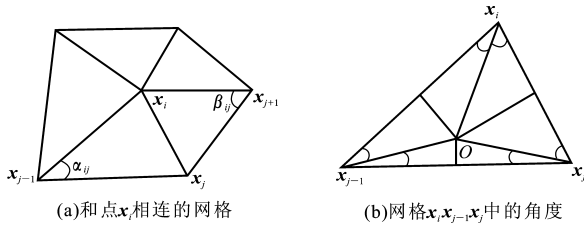
由于索膜结构设计的曲面一般为复杂曲面,在找形和荷载分析后得到的曲面由一系列离散点表示,没有显式的曲面方程,用曲面拟合的方法计算量大且会引入误差。笔者基于形态和荷载分析得到的离散曲面,求得膜曲面的各种曲率(高斯曲率、平均曲率、主曲率)、主方向矢量和法线矢量,能够方便地跟踪膜曲面在预应力和外荷载作用下的曲率变化情况。在此首先定义三角形离散曲面中任意点的 VORONOI 面积:如果三角形 $x_i x_{j-1} x_j$ 为非钝角三角形,点 O 为三角形的外接圆心,如图 2 所示。点 x_i 在三角形 $x_i x_{j-1} x_j$ 中的 VORONOI 面积为

$$A_v = \frac{1}{8} (\|x_i - x_j\|^2 \cot \angle x_{j-1} + \|x_i - x_{j-1}\|^2 \cot \angle x_i) \quad (8)$$

式中: x_i 、 x_{j-1} 、 x_j 为网格点矢量; $\angle x_i$ 、 $\angle x_{j-1}$ 分别为 x_i 、 x_{j-1} 对应的三角形内角。

如果三角形 $x_i x_{j-1} x_j$ 为钝角三角形,点 O 为钝角对应边的中点。

若 $\angle x_i$ 为钝角,点 x_i 在三角形中的 VORONOI 面积为

图 2 点 x_i 的 VORONOI 面积及角度Fig. 2 VORONOI area of point x_i and angle

$$A_v = \frac{S_{x_i x_{j-1} x_j}}{2}$$

否则

$$A_v = \frac{S_{x_i x_{j-1} x_j}}{4}$$

若环绕点 x_i 的三角形都是非钝角三角形,那么点 x_i 的 VORONOI 面积为

$$A_v = \frac{1}{8} \sum_{j \in N_c(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) \|x_i - x_j\|^2 \quad (9)$$

式中: α_j, β_j 为边 $x_i x_j$ 所对的两个角; $\|x_i - x_j\|$ 为边 $x_i x_j$ 的长度; $N_c(i)$ 为所有和点 x_i 相连的点的集合。

由式(9)可得点 x_i 的平均曲率为

$$\kappa_H n = \frac{1}{4A_v} \sum_{j \in N_c(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (x_i - x_j) \quad (10)$$

式中: κ_H 为平均曲率; n 为点 x_i 处曲面的法线矢量。

高斯曲率为

$$\kappa_G = (2\pi - \sum_{k=1}^n \theta_k) / A_v \quad (11)$$

式中: θ_k 为连接点 x_i 的网格三角形内角。

点 x_i 的切平面方程为

$$n(x - x_i) = 0 \quad (12)$$

由平均曲率、高斯曲率可得点 x_i 的主曲率为

$$\kappa_1 = \kappa_H + \sqrt{\Delta}, \quad \kappa_2 = \kappa_H - \sqrt{\Delta} \quad (13)$$

式中: $\Delta = \kappa_H^2 - \kappa_G$ 。

当平均曲率 $\kappa_H = 0$ 时,主曲率 $\kappa_1 = \kappa_2$, 曲面为极小曲面,且各个方向的法曲率相等。

当平均曲率 $\kappa_H \neq 0$ 时,切平面内各个方向的法曲率不相等,法曲率在主方向上取到极值。

将平均曲率写成法曲率的积分形式

$$\begin{aligned} \kappa_H(x_i) &= \frac{1}{2} [2\kappa_H(x_i)n]n = \frac{1}{2} K(x_i)n = \\ &= \frac{1}{4A_{M_j \in N_c(i)}} \sum_{j \in N_c(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (x_i - x_j)n = \\ &= \frac{1}{4A_{M_j \in N_c(i)}} \sum_{j \in N_c(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) \frac{\|x_i - x_j\|^2}{\|x_i - x_j\|^2} \cdot \\ &= \frac{1}{A_{M_j \in N_c(i)}} \sum_{j \in N_c(i)} \left[\frac{1}{8} (\cot \alpha_{ij} + \right. \end{aligned}$$

$$\cot \beta_{ij}) \|x_i - x_j\|^2 \kappa_{i,j}^N \quad (14)$$

式中: $K(x_i) = 2\kappa_H(x_i)n; \kappa_{i,j}^N$ 为点 x_i 处网格边 $x_i x_j$ 方向的法曲率的估计值, $\kappa_{i,j}^N = 2 \frac{(x_i - x_j)n}{\|x_i - x_j\|^2}$ 。于是通过点 x_i, x_j 的密切圆的半径 R 为

$$R = \frac{\|x_i - x_j\|^2}{2(x_i - x_j)n} \quad (15)$$

设点 x_i 的切平面中的 WEINGARTEN 变换(简称为 W 变换)由 3 个未知数 a, b, c 表示

$$W = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (16)$$

W 变换的特征向量就是使点 x_i 的法曲率达到极值的方向, W 变换相应的特征值即为主曲率,故未知数 a, b, c 和主曲率的关系为

$$a + c = 2\kappa_H, \quad ac - b^2 = \kappa_G \quad (17)$$

确定 W 变换还需要一个方程,注意到通过 W 变换可以得到切平面内任意方向的法曲率,因此,对于和顶点相连的所有网格边,都有

$$d_{ij}^T W d_{ij} = \kappa_{i,j}^N \quad (18)$$

$$d_{ij} = \frac{(x_i - x_j) - [(x_i - x_j)n]n}{\|(x_i - x_j) - [(x_i - x_j)n]n\|} \quad (19)$$

式中: d_{ij} 为边 $x_i x_j$ 在切平面内投影的单位向量。

将式(17)~(19)联立,即可求解未知数 a, b, c 。

利用最小二乘法求式(20)的最小值

$$E(a, b, c) = \sum_j w_j (d_{ij}^T W d_{ij} - \kappa_{i,j}^N)^2 = \sum_j w_j e_j \quad (20)$$

取 a 为变量,当 $\frac{\partial E(a, b, c)}{\partial a} = 0$ 时, $E(a, b, c)$ 在

式(17)的约束下取最小,此时的 a, b, c 即为所求。

用牛顿迭代法求解 $\frac{\partial E(a, b, c)}{\partial a} = 0$, 由式(17)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial a} &= \frac{c-a}{2b}, \quad \frac{\partial^2 b}{\partial a^2} = \frac{-2-2(\partial b/\partial a)^2}{2b}, \\ \frac{\partial c}{\partial a} &= -1, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial a^2} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

设 $d_{ij} = [d_1 \quad d_2]^T$, 则

$$e_j = (ad_1^2 + 2bd_1d_2 + cd_2^2 - \kappa_{i,j}^N)^2 \quad (22)$$

牛顿迭代法中的函数本身及其一阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_j}{\partial a} &= 2ad_1^4 + 4b \frac{\partial b}{\partial a} (d_1d_2)^2 + 2c \frac{\partial c}{\partial a} (d_2^2)^2 + \\ &= 4bd_1^3d_2 + 4a \frac{\partial b}{\partial a} d_1^3d_2 + 2d_1^2d_2^2(c + \\ &= a \frac{\partial c}{\partial a}) - 2d_1^2\kappa_{i,j}^N + 4d_1d_2^3 \frac{\partial b}{\partial a} c + \\ &= b \frac{\partial c}{\partial a} - 4 \frac{\partial b}{\partial a} d_1d_2\kappa_{i,j}^N - 2 \frac{\partial c}{\partial a} d_2^2\kappa_{i,j}^N \end{aligned} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_j}{\partial a^2} = & 2d_1^4 + 4(d_1 d_2)^2 \left[\left(\frac{\partial b}{\partial a} \right)^2 + b \frac{\partial^2 b}{\partial a^2} \right] + \\ & 2d_2^4 \left[\left(\frac{\partial c}{\partial a} \right)^2 + c \frac{\partial^2 c}{\partial a^2} \right] + 4 \frac{\partial b}{\partial a} d_1^3 d_2 + \\ & 4d_1^3 d_2 \left(\frac{\partial b}{\partial a} + a \frac{\partial^2 b}{\partial a^2} \right) + 2d_1^2 d_2^2 \left(2 \frac{\partial c}{\partial a} + \right. \\ & \left. a \frac{\partial^2 c}{\partial a^2} \right) + 4d_1 d_2^3 \left(2 \frac{\partial b \partial c}{\partial a \partial a} + b \frac{\partial^2 c}{\partial a^2} + \right. \\ & \left. c \frac{\partial^2 b}{\partial a^2} \right) - 4 \frac{\partial^2 b}{\partial a^2} d_1 d_2 \kappa_{i,j}^N - 2 \frac{\partial^2 c}{\partial a^2} d_2^2 \kappa_{i,j}^N \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

由式(23)、(24)求得两个主方向,即可方便地求出最大和最小曲率半径。

3 关于曲面曲率的讨论

薄膜结构是力学和几何完美结合的柔性结构,和其他结构相比,其力学性能和几何特性的联系更加紧密。笔者从曲面曲率的性质出发讨论曲率在薄膜结构设计中的运用:

(1)高斯曲率为零的曲面为可展开曲面,文献[5]中指出曲面的展开性能和高斯曲率有关,高斯曲率越小,展开误差越小。在薄膜结构裁剪分析中,可以通过曲面的高斯曲率大小来评估裁剪精度,在结构选型时应尽可能地选择高斯曲率小的结构曲面。

(2)平均曲率为零的曲面为极小曲面。薄膜结构形态分析的目标即是要寻找一定边界条件下的极小曲面,由求解形态分析得到的初始平衡状态的平均曲率,可判别初始平衡状态曲面是否满足要求。

(3)由薄壳无矩理论可知

$$p = \frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} \quad (25)$$

式中: p 为外荷载; r_1 、 r_2 分别为最大、最小曲率半径; σ_1 、 σ_2 分别为两向主应力。

随着外荷载的变化,平衡形态也随之变化,根据不同平衡形态的最大、最小曲率半径,即可知膜面主应力的变化情况,从而有助于理解荷载的传递路径,指导细部结构的设计。

4 算 例

某索膜结构看台,取其 1/6 为例说明膜曲面曲率设计。分别取膜面应力为 1.5、2.5、3.5 kPa;边索预拉力为 20、30、40 kN;面内索预拉力为 2、4、8 kN,进行形态分析。其中膜面应力为 2.5 kPa,边索预拉力为 30 kN,面内索预拉力为 2 kN 时的初始平衡形态见图 3,曲面离散点的法向量、主方向矢量见图 4。

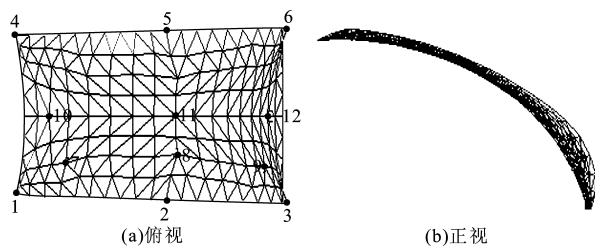


图 3 索膜结构离散曲面

Fig. 3 Discrete curved surface of cable-membrane structure

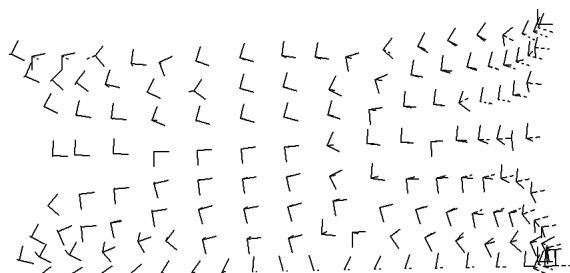


图 4 离散点的法向量及主方向矢量

Fig. 4 Normal vector and principal direction vector of discrete points

图 3 中边界 123、36 和 456 为固定边界,边界 14 为边索,另外还有 3 根膜面内索,其中 6 个控制点的坐标分别为:1(207.72, -3.88, 9.15), 2(217.64, -4.06, 7.98), 3(225.29, -4.21, 0.14), 4(207.72, 3.88, 9.15), 5(217.64, 4.06, 7.98), 6(225.29, 4.21, 0.14)。

张拉膜面曲率的分布情况为:膜面高斯曲率为负值,除局部曲面外,一般都比较小;曲拱上膜面点的高斯曲率为正值。膜面的平均曲率为极小正值,可近似为零,和薄壳的无矩理论吻合。索上膜面点和拱上点的平均曲率比膜面的大几个数量级。

膜面应力对曲率的影响为:随着膜面应力增大,膜面高斯曲率增大,索上膜面点的变化幅度很大,曲拱上点高斯曲率减小;膜面平均曲率减小。

边索预拉力对曲率的影响为:边索只对附近的膜面产生影响,远离边索的膜面基本没有变化,随着边索预拉力增大,附近的膜面高斯曲率增大;膜面平均曲率减小。

面内索预拉力对曲率的影响为:随着面内索预拉力增大,索上膜面点高斯曲率减小,平均曲率增大;膜面高斯曲率增大,平均曲率增大。

荷载取值为:恒载(DL)状态下的膜质量为 1.05 kg/m²,索质量由程序自动计算得到;索膜预应力(PL)状态下膜两向预应力为 2.5 kPa,边索预拉力取 30 kN,面内索预拉力取 2 kN;风吸(WX)状

态下,1245 区域荷载取 1 170 Pa,2356 区域荷载取 900 Pa;风压(WY)和风吸方向相反;雪载(SN)状态下,1245 区域荷载取 630 Pa,2356 区域荷载取 504 Pa。荷载组合工况 1~4 分别为:DL+PL、

DL+PL+WX、DL+PL+WY、DL+PL+SN。
利用有限元法编制的荷载分析程序进行工况 1~4 的分析,求出各个工况下曲面的高斯曲率、平均曲率,表 1 给出了其中 6 个点的高斯曲率及平均曲率。

表 1 初始平衡曲面及各工况下曲面的曲率变化/10⁻³

| 各点编号 | 初始平衡曲面 | | 工况 1 | | 工况 2 | | 工况 3 | | 工况 4 | |
|------|--------|--------|--------|-------|--------|---------|--------|-------|--------|-------|
| | 高斯曲率 | 平均曲率 | 高斯曲率 | 平均曲率 | 高斯曲率 | 平均曲率 | 高斯曲率 | 平均曲率 | 高斯曲率 | 平均曲率 |
| 7 | -4.81 | 51.25 | -4.84 | 0.284 | -3.91 | 0.109 | -5.71 | 7.51 | -5.55 | 8.495 |
| 8 | -2.18 | 75.26 | -2.205 | 0.366 | -1.01 | 14.83 | -2.823 | 6.636 | -2.796 | 6.686 |
| 9 | -17.68 | 96.27 | -17.71 | 0.022 | -17.08 | 0.486 3 | -17.99 | 3.140 | -18.46 | 2.065 |
| 10 | -3.144 | 257.19 | -3.11 | 7.176 | -7.061 | 37.14 | -2.387 | 35.10 | -2.289 | 36.74 |
| 11 | -4.647 | 379.03 | -4.49 | 19.34 | -12.83 | 79.20 | -3.293 | 26.57 | -3.342 | 25.49 |
| 12 | -11.50 | 189.31 | -11.41 | 2.337 | -12.89 | 4.229 | -11.10 | 15.98 | -10.74 | 4.668 |

在自重、风压等(向下)荷载作用下,膜面中间区域的高斯曲率变小,如点 7、8、9 附近;索加强区域的高斯曲率变大,如点 10、11、12 附近,但由于索的存在高斯曲率变化不是很明显。在风吸(向上)荷载作用下,膜面中间区域的高斯曲率变大,且变化幅度很大,极有可能从负高斯曲率变到正高斯曲率;由前所述,设计中应避免出现这种情况。

5 结 语

(1)笔者采用非线性有限元法进行膜结构的形态分析和荷载分析,直接基于得到的曲面有限元网格点,采用离散微分几何方法,快捷、精确地求解了任意点的法线、曲率和主方向矢量,研究了薄膜结构曲面的几何性质,求解过程避免了繁杂的曲面拟合。
(2)研究膜结构曲面的几何性质,能有效地跟踪了解膜曲面曲率的变化情况,对于理解荷载传递路

径,设计和选择合适的结构曲面造型,选择合适的裁剪样式,分析裁剪误差等都有重要意义。
(3)实际上薄膜结构曲面的几何性质除了曲率和主方向矢量,还有等高线等,且等高线对研究薄膜结构积水问题非常重要,笔者将在以后加强对这方面的研究。

参考文献:

[1] GERLIC L. Geometrical aspects of surface in the membrane structures designing[A]. IASS[C]. Warsaw: Polish Academy of Sciences,2002. 883—886.
[2] 杨耀乾. 薄壳理论[M]. 北京:中国铁道出版社,1981. 15—75.
[3] 饶正清. 不等应力薄膜结构形态优化初探[D]. 北京:北京交通大学,2004.
[4] 毛 昕,马明旭,王哲英. 曲面片的可展性能及其应用[J]. 工程图学学报,2002,22(2):133—138.

《空间结构》2006 年征订通知

《空间结构》(季刊)为国家教育部主管,浙江大学主办的全国性专业科技期刊,《中文核心期刊要目总览》(2004 版)建筑科学类核心期刊,1994 年创刊,面向国内外公开发行人,国内统一出版物号为 CN 33-1205/TU,国际标准出版物号为 ISSN 1006-6578。
《空间结构》主要刊载空间结构的理论研究、分析设计、试验与实测、建筑造型、施工工艺、管理经验、工程实例、信息报道及有特色的空间结构工程照片等方面的内容。读者对象为:科研单位、设计院、生产施工单位、质检管理部门的科技人员及大专院校师生。
《空间结构》为大 16 开本,64 页,每期定价 10.00 元(含邮寄费),2006 年 4 期共 40.00 元。本刊自办发行,需要征订的单位或个人请直接汇款至本刊编辑部订阅,尚有少量历年合订本供补订。本刊兼营广告,10 月起征订下一年度广告。
地址:浙江大学玉泉校区空间结构研究中心《空间结构》编辑部 邮编:310027
电话:(0571)87952414 传真:(0571)87952414