

文章编号: 1673-2049(2006)03-0037-04

基于最小秩方法的结构损伤识别

朱子, 董聪

(清华大学 土木工程系, 北京 100084)

摘要: 针对结构损伤识别中的最小秩方法存在的问题, 经过研究发现, 对测试模态进行关于质量矩阵的正交归一化可保证反演后刚度矩阵的对称性; 提出了一种迭代修正算法, 可保持反演结果的稀疏性; 基于模态力余量, 定义了一种损伤指标来预先判定结构损伤单元的位置, 并可据此选取合适的测试模态阶数进行反演计算。数值试验结果表明, 改进后的方法在考虑测试模态误差的情况下可对结构的损伤进行精确的定位和标定。

关键词: 建筑结构; 结构损伤识别; 最小秩方法; 模态力余量

中图分类号: TU311.2 文献标志码: A

Structural Damage Identification Based on Minimum Rank Method

ZHU Zi, DONG Cong

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The existing problem of the structural damage identification based on the minimum rank method was studied. Authors discovered that the stiffness matrix would preserve the symmetry if the measured modal eigen vectors were mass orthogonal. Iterative correction algorithm to preserve sparsity of the stiffness matrix was proposed. An damage indicator was defined to determine the location of structural damage elements, and the proper testing modal modes used in the inverse computation could be selected accordingly. Numerical test results show that the improved method can locate and quantify the structural damage in truss structures precisely under considering the modal testing errors.

Key words: building structure; structural damage identification; minimum rank method; modal force surplus

0 引言

结构在服役期间的各种荷载作用下会产生不同程度的损伤, 从而使结构功能退化, 甚至导致灾难性事故的发生。如何在结构损伤发生的早期阶段对损伤进行识别和评估, 是土木、机械及航空等领域广受重视的研究课题^[1]。目前各国学者的研究热点是基于结构振动特性的损伤诊断方法, 这类方法避免了传统的无损检测技术, 如目视、X光、超声波、工业

CT 等方法仅适用于结构损伤局部探测的限制, 满足了目前人们对大型复杂结构进行损伤探测的需求, 已广泛应用于桥梁^[2]、海洋平台^[3]等结构的健康检测。

基于振动特性的结构损伤诊断方法可以分为两大类: 基于反演的和无反演的。无反演类方法主要通过结构损伤前后频率、模态、曲率模态、应变能等动力指纹的变化对结构损伤进行识别。反演类方法借助有限元模型, 通过矩阵优化、人工神经网络等方

收稿日期: 2006-07-15

基金项目: 国家高技术研究发展计划(“863”计划)项目(2002AA615110); 教育部跨世纪人才基金项目(2003)

作者简介: 朱子(1982-), 男, 安徽安庆人, 工学硕士, E-mail: zhuzi99@mails.tsinghua.edu.cn.

法对结构损伤进行反演,有助于实现对损伤进行精确定位和标定^[4]。

在结构发生损伤的早期阶段,损伤往往集中在少数单元,因此由损伤导致的结构总体刚度矩阵的变化 $\Delta\mathbf{K}$ 的秩较小。以三维空间桁架单元为例,其单元刚度矩阵的秩仅为1,则单杆损伤对应的 $\Delta\mathbf{K}$ 的秩也为1。基于以上认识,Zimmerman等提出基于最小秩理论的结构损伤识别方法,指出对损伤结构的模态力余量方程进行求解,可反演得到结构总体刚度变化矩阵 $\Delta\mathbf{K}$ 的最小秩解^[5]。最小秩方法在数值计算中具有以往最小范数、最小二乘解难以比拟的优越性,但其本身存在的问题是:①没有保证刚度矩阵的对称性,即不一定满足 $\Delta\mathbf{K}^T = \Delta\mathbf{K}$;②没有保证刚度变化矩阵 $\Delta\mathbf{K}$ 与总体刚度矩阵 \mathbf{K} 相一致的稀疏性,即不一定满足当 $K_{ij} = 0$ 时,一定有 $\Delta K_{ij} = 0$,从物理意义上说,算法可能会凭空产生一些实际不存在的支撑刚度;③反演得到的 $\Delta\mathbf{K}$ 的秩取决于参与计算的测试模态的阶数。本文中就上3个问题进行探讨,并提出相应的解决方法。

1 最小秩方法

无阻尼自由振动时结构振动的特征方程为

$$(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\theta}_j = 0 \quad (1)$$

式中: \mathbf{K} 、 \mathbf{M} 分别为结构的刚度矩阵、质量矩阵; ω_j 为对应的第 j 阶频率; $\boldsymbol{\theta}_j$ 为第 j 阶的位移模态向量。

结构损伤通常不会影响结构的质量特性,因此可认为损伤前后结构的质量矩阵 \mathbf{M} 保持不变。设损伤后结构刚度矩阵为 \mathbf{K}_d ,第 j 阶自振频率为 ω_{dj} ,第 j 阶位移模态为 $\boldsymbol{\theta}_{dj}$ 。结构刚度矩阵的变化为 $\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K}_d - \mathbf{K}$,则有损结构的振动特征方程为

$$(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K} - \omega_{dj}^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\theta}_{dj} = 0 \quad (2)$$

式(2)可改写为

$$\Delta\mathbf{K} \boldsymbol{\theta}_{dj} = (\omega_{dj}^2 \mathbf{M} - \mathbf{K}) \boldsymbol{\theta}_{dj} = \Delta\mathbf{F}_j \quad (3)$$

式中: $\Delta\mathbf{F}_j$ 为第 j 阶振型的模态力余量。

由 m ($m \leq n$, n 为结构自由度)阶测试模态数据可得

$$\Delta\mathbf{K} \boldsymbol{\theta}_d = \Delta\mathbf{F} \quad (4)$$

式中: $\boldsymbol{\theta}_d = (\boldsymbol{\theta}_{d1}, \boldsymbol{\theta}_{d2}, \dots, \boldsymbol{\theta}_{dm})$; $\Delta\mathbf{F} = (\Delta\mathbf{F}_1, \Delta\mathbf{F}_2, \dots, \Delta\mathbf{F}_m)$ 。

式(4)即为损伤结构的模态力余量方程,结构的损伤识别可归结为对式(4)的求解。

$\Delta\mathbf{K}$ 的最小范数最小二乘解为

$$\Delta\mathbf{K} = \Delta\mathbf{F} \boldsymbol{\theta}_d^+ \quad (5)$$

式中: $\boldsymbol{\theta}_d^+$ 为 $\boldsymbol{\theta}_d$ 的Moore-Penrose广义逆。

如果式(4)中 $\Delta\mathbf{F}$ 列满秩,即 $\text{rank}(\Delta\mathbf{F}) = m$,则 $\Delta\mathbf{K}$ 的最小秩解为

$$\Delta\mathbf{K} = \Delta\mathbf{F} (\Delta\mathbf{F}^T \boldsymbol{\theta}_d)^{-1} \Delta\mathbf{F}^T \quad (6)$$

试验和仿真结果显示,采用式(6)的识别结果比式(5)的结果要好。从物理分析的角度对此作出解释为:通常损伤是一种局域现象,在损伤发生的早期阶段,损伤单元的数目相对而言不会太多,尤其是对于实验室试验,预制的损伤单元通常是一个或几个,最小秩解在数学上最有可能满足这些要求;而最小范数最小二乘解倾向于在整体刚度矩阵中抹平损伤带来的影响,不能在局部突出损伤造成的峰值。

对引言中所述的最小秩方法存在的3个问题,下面将逐一讨论。

1.1 对称问题

由式(6)可知,只有 $\Delta\mathbf{F}^T \boldsymbol{\theta}_d$ 满足对称要求,即 $\Delta\mathbf{F}^T \boldsymbol{\theta}_d = \boldsymbol{\theta}_d^T \Delta\mathbf{F}$ 时,最小秩解 $\Delta\mathbf{K}$ 是对称的。将式(3)写成矩阵形式

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{M} \boldsymbol{\theta}_d \boldsymbol{\Lambda}_d - \mathbf{K} \boldsymbol{\theta}_d \quad (7)$$

由 $\boldsymbol{\Lambda}_d = \text{diag}(\omega_{d1}^2, \omega_{d2}^2, \dots, \omega_{dm}^2)$,得

$$\Delta\mathbf{F}^T \boldsymbol{\theta}_d = \boldsymbol{\Lambda}_d \boldsymbol{\theta}_d^T \mathbf{M} \boldsymbol{\theta}_d - \boldsymbol{\theta}_d^T \mathbf{K} \boldsymbol{\theta}_d \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\theta}_d^T \Delta\mathbf{F} = \boldsymbol{\theta}_d^T \mathbf{M} \boldsymbol{\theta}_d \boldsymbol{\Lambda}_d - \boldsymbol{\theta}_d^T \mathbf{K} \boldsymbol{\theta}_d \quad (9)$$

对比式(8)、(9),易知当 $\boldsymbol{\Lambda}_d \boldsymbol{\theta}_d^T \mathbf{M} \boldsymbol{\theta}_d = \boldsymbol{\theta}_d^T \mathbf{M} \boldsymbol{\theta}_d \boldsymbol{\Lambda}_d$ 时,有 $\Delta\mathbf{F}^T \boldsymbol{\theta}_d = \boldsymbol{\theta}_d^T \Delta\mathbf{F}$,因此,当损伤后振型满足关于质量阵正交归一,即 $\boldsymbol{\theta}_d^T \mathbf{M} \boldsymbol{\theta}_d = \mathbf{I}_{m \times m}$ 时,必有最小秩解 $\Delta\mathbf{K}$ 满足对称性要求。当上述条件不满足时,也可对结果采取强制对称

$$\Delta\mathbf{K}^* = \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^T) \quad (10)$$

1.2 稀疏性问题

在最小秩求解中,并不能保证当 $K_{ij} = 0$ 时,一定有 $\Delta K_{ij} = 0$ 。从物理分析的角度讲,此约束的意义是,如果原始结构在某个自由度上没有刚度,则结构损伤后在该自由度上也不应该存在刚度。此约束保证了损伤后的结构保持与原结构相一致的荷载路径。

由此可以考虑通过迭代算法,把稀疏性约束条件考虑进去。对最小秩解采取如下修正:若 $K_{ij} = 0$,则置 $\Delta K_{ij} = 0$,得到修正后的总刚度矩阵 $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}$,然后以 \mathbf{K}^* 为动态矩阵进行反复迭代和修正以求得收敛解。

1.3 测试模态阶数选取问题

最小秩求解要求 $\Delta\mathbf{F}$ 列满秩,若所得的 $\Delta\mathbf{F}$ 不满足列满秩的要求,则可在 $\Delta\mathbf{F}$ 中选取合适的列向量,组成新的列满秩矩阵后再按式(6)进行求解。另

外由反演得到的 $\Delta\mathbf{K}$ 的秩取决于参与计算的 $\Delta\mathbf{F}$ 的秩,即 $\text{rank}(\Delta\mathbf{K}) = \text{rank}(\Delta\mathbf{F}) = m$,因此希望选取合适的测试模态阶数进行反演计算。

考察式(3)可知,若 $\Delta\mathbf{K}$ 中第 i 行各元素为 0 时,模态力余量 $\Delta\mathbf{F}_j$ 中的第 i 行各元素必为 0,故 $\Delta\mathbf{F}_j$ 中的非 0 项可作为损伤指标,对发生损伤的自由度以及损伤单元的数目进行初步判断。定义损伤指标为

$$d = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{\Delta\mathbf{F}_j}{\|\boldsymbol{\theta}_{ij}\|} \quad (11)$$

d 的非 0 项对应了损伤所在的自由度,结合有限元模型,即可判定存在损伤的单元。依据初步判定的损伤单元的数目,选择相应的测试模态阶数进行计算。对于桁架结构,各杆损伤对 $\Delta\mathbf{K}$ 的秩的影响为 1,若确定存在损伤的单元数目为 n ,则只需保证参与计算的 $\Delta\mathbf{F}$ 的秩为 n 即可。为保证计算结果的准确性,笔者倾向于选择对损伤指示较好的模态残余力向量 $\Delta\mathbf{F}_j$ 。

2 算 例

算例为 72 杆空间桁架,结构如图 1 所示。设材料弹性模量为 206×10^9 Pa,剪变模量为 79×10^9 Pa,密度为 $1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,未损伤时各杆截面面积均为 $4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 。图 1 中 $L = 5 \text{ m}$ 。设定杆 41(图 1 中的加粗线)发生损伤,有效截面积减小 50%,测试结构损伤后前 5 阶频率和模态。

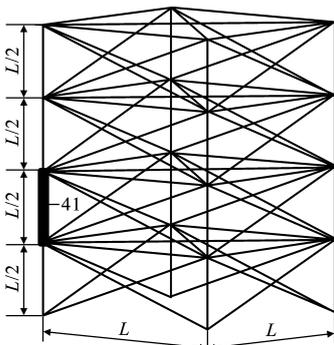


图 1 72 杆桁架结构

Fig. 1 72-Bar Truss Structure

首先通过结构损伤后的测试频率和模态,由式(11)计

算损伤指标 d 。图 2 为无测试模态误差情况下 d 的柱状图,图 3 为考虑 1% 测试模态相对误差情况下 d 的柱状图。由图 2、3 可知,第 27、39 自由度上发生的损伤,对应了 2 个不同的节点,结合有限元模型,可判断为单杆损伤,且损伤单元为杆 41。对比图 2、3 可知,式(11)定义的损伤指标 d 在一定测试模态误差的情况下,对损伤位置也能做出较好的指示。

由损伤指标 d 可判定损伤单元数目为 1,对于桁架结构,对应的实际损伤 $\Delta\mathbf{K}$ 的秩为 1,故最小秩反演只需第 1 阶测试模态。不妨取结构损伤第 1 阶

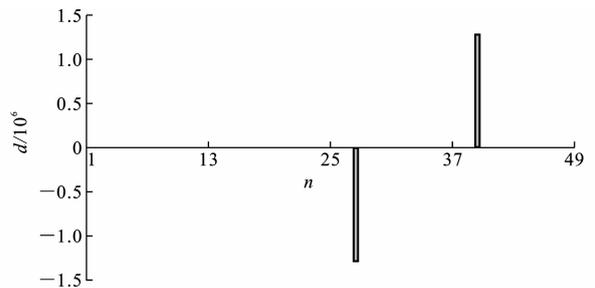


图 2 损伤指标 d (无测试模态误差)

Fig. 2 Damage Index d (None Error of Testing Modal)

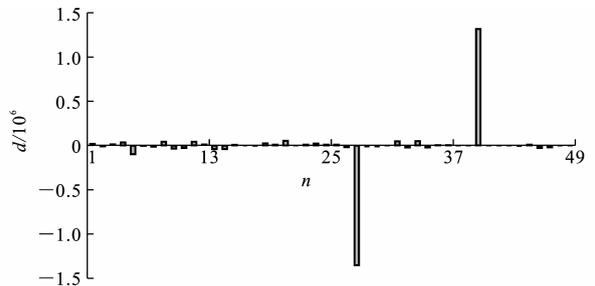


图 3 损伤指标 d (1% 测试模态相对误差)

Fig. 3 Damage Index d (1% Relative Error of Testing Modal)

Minimum Rank Inversion Solution for $\Delta\mathbf{K}$

测试模态进行计算,由式(6)反演得到 $\Delta\mathbf{K}$ 的最小秩解。图 4、5 分别为无测试模态误差情况下和考虑 1% 测试模态相对误差情况下 $\Delta\mathbf{K}$ 的最小秩反演结果。由图 4、5 可知,在无测试模态误差情况下, $\Delta\mathbf{K}$ 的最小秩解精确地反映了结构实际损伤的状况,而随着测试模态相对误差的引入,反演结果存在一定程度的误差。

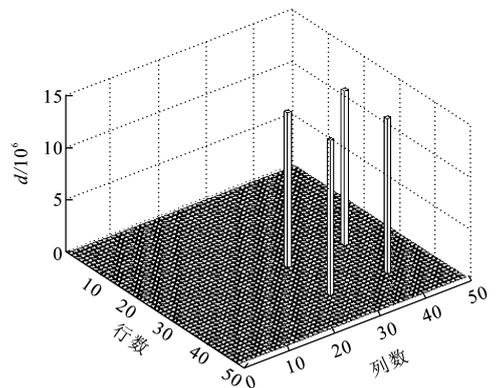


图 4 $\Delta\mathbf{K}$ 最小秩反演结果 (无测试模态误差)

Fig. 4 Minimum Rank Inversion Solution for $\Delta\mathbf{K}$

(None Error of Testing Modal)

在误差存在的情况下, $K_{ij} = 0$ 处,置 $\Delta K_{ij} = 0$,则可得到最小秩解 $\Delta\mathbf{K}$ 置 0 后的结果,见图 6。由于一些实际不存在的刚度被消除,提高了识别的准确程度。由 $\Delta\mathbf{K}$ 中损伤对应的峰值,可计算得到杆 41

的损伤程序为 42.3%，低于实际设定的损伤程序。

采用迭代算法，迭代两步后 ΔK 的结果如图 7 所示。误差进一步消除，且由峰值可计算得到杆 41

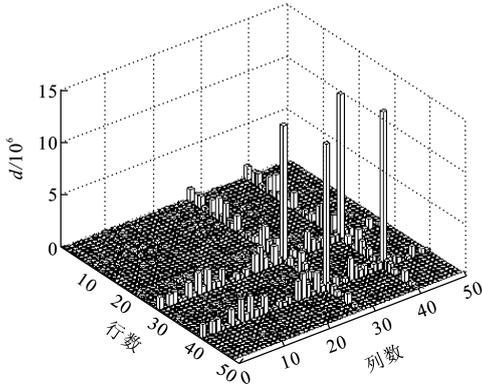


图 5 ΔK 最小秩反演结果 (1% 测试模态相对误差)
Fig. 5 Minimum Rank Inversion Solution for ΔK
(1% Relative Error of Testing Modal)

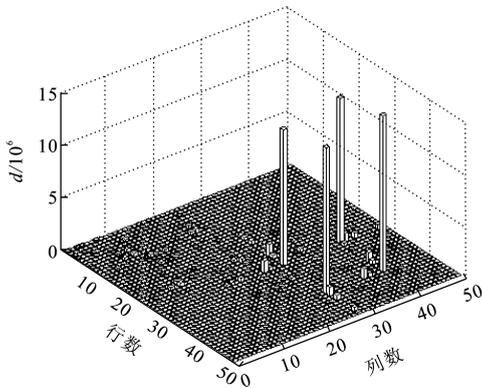


图 6 ΔK 最小秩置 0 结果 (1% 测试模态相对误差)
Fig. 6 Minimum Rank Solution for ΔK After
Sparsity-Preserving Procedure
(1% Relative Error of Testing Modal)

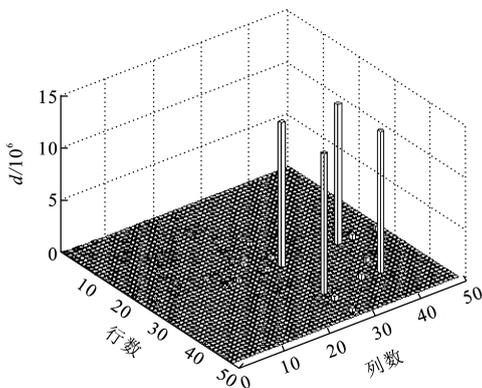


图 7 ΔK 最小秩两步迭代结果 (1% 测试模态相对误差)
Fig. 7 Minimum Rank Solution for ΔK
After Iterative Result of Two Step
(1% Relative Error of Testing Modal)

的损伤程度为 48.7%。由此可见，采用迭代算法，可使反演结果逐步接近真实值。

3 结 语

(1) 最小秩方法在给出未损伤结构的准确有限元模型的基础上，只需测试结构损伤后少数几阶自振频率和振型，即可对结构损伤进行准确的定位及标定。

(2) 对测试模态振型关于质量矩阵正交归一化处理，即能保证反演结果的对称性。

(3) 原结构刚度为 0 处，反演结果也不应该存在支撑刚度。对最小秩结果进行对应的置 0 处理后，可提高损伤识别的准确程度。采用迭代算法，可使反演结果逐步接近损伤的真实值。

(4) ΔK 的最小秩解的秩总是和测试模态的阶数相同。为保证反演的准确性，可通过式 (11) 定义的损伤指标对损伤单元数目进行预先判定。

参考文献:

References:

- [1] DOEBLING S W, FARRAR C R, PRIME M B. A Summary Review of Vibration-Based Damage Identification Methods[J]. The Shock and Vibration Digest, 1998, 30(2): 91-105.
- [2] 黄方林, 王学敏, 陈政清, 等. 大型桥梁健康监测研究进展[J]. 中国铁道科学, 2005, 26(2): 1-7.
HUANG Fang-lin, WANG Xue-min, CHEN Zheng-qing, et al. Research Progress Made on the Health Monitoring for Large-Type Bridge[J]. China Railway Science, 2005, 26(2): 1-7.
- [3] 李华军, 杨和振. 海洋平台结构参数识别和损伤诊断技术的研究进展[J]. 工程力学, 2004, 21(增): 116-138.
LI Hua-jun, YANG He-zhen. Research Progress on Modal Parameter Identification and Damage Diagnosis for Offshore Platform Structures[J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(S): 116-138.
- [4] 董 聪. 现代结构系统可靠性理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
DONG Cong. Reliability Theory and Its Application of Modern Structural System[M]. Beijing: Science Press, 2001.
- [5] ZIMMERMAN D C, KAOUK M. Structural Damage Detection Using a Minimum Rank Update Theory[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1994, 116(1): 222-230.