

文章编号:1673-2049(2006)03-0050-04

低矮小开口剪力墙自由振动问题的半解析解

楼梦麟, 李守继

(同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

摘要:针对低矮小开口剪切型剪力墙,研究基于直接模态摄动法原理的结构动力特性的半解析分析方法。首先把低矮小开口剪力墙视为变截面的剪切型悬臂结构,依据连续系统动力分析原理建立剪切型剪力墙自由振动分析的变系数微分方程;然后利用等截面剪切型悬臂结构模态函数的解析解和直接模态摄动法原理,考虑剪力墙中小开口对系统特征值和主模态所带来的影响,并进行修正;最后应用 Ritz 变换,将低矮小开口剪力墙的自振特性分析问题转化为一组非线性代数方程的求解问题,进而求得该类剪力墙自振特性的近似半解析解。算例结果表明,该方法对以剪切变形影响为主的低矮小开口剪力墙动力分析简便有效。

关键词:低矮小开口剪力墙;自由振动分析;直接模态摄动法;Ritz 变换

中图分类号:TU398.2

文献标志码:A

Semi-analytical Solution for Free Vibration of Short Shear Wall with Small Openings

LOU Meng-lin, LI Shou-ji

(State Key Laboratory for Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on the principal of direct modal perturbation method, a simplified semi-analytical technique for the modal characteristics of the short shear wall with small openings was developed. At first, the short shear wall with small openings was considered as a shear cantilever system with variable cross sections. The differential equation of motion with variable coefficient of the system was established according to the dynamic analysis theory of the distributed-parameter systems. Then, the effects of the small openings in the shear wall on the modal characteristics of the shear cantilever system with variable cross sections were discussed and modified utilizing the modal characteristics of the shear cantilever system having uniform properties and the direct modal perturbation. Finally, a set of nonlinear algebraic equations was obtained by applying Ritz transformation to solve the modal characteristics of the short shear wall with small openings. The results of numerical examples show that the proposed method is simplification and has good precision.

Key words: short shear wall with small opening; free vibration analysis; direct modal perturbation method; Ritz transformation

0 引言

在城镇临街建筑中,广泛采用底部框架-抗震墙

结构^[1-6],为提高该类结构底部框架的抗侧刚度,需设置若干道钢筋混凝土剪力墙。因其设置在底部一、二层,高度较低,多属低矮剪力墙^[7]。应用有限

元单元对剪力墙结构进行动力特性分析,虽然可以得到比较精确的解,但由于所求的自由度数太多,建模及数据准备的工作量相当大,需要耗费大量的机时^[8],而且不易获得便于工程设计的截面弯矩和剪力等参数。此外,ANSYS等通用有限元程序多按弯曲变形为主进行分析计算^[9],对于以弯曲变形为特征的高层剪力墙的计算无疑较为精确,但低矮剪力墙却以剪切变形为主,这类计算方法并不适用。笔者将利用连续系统的直接模态摄动法^[10-12]的基本原理,建立求解低矮开洞剪力墙模态特性半解析解的近似计算方法。

1 动力方程

一榀低矮小开口剪力墙可看作为一根剪切悬臂梁。一般情况下,梁变形以弯曲变形为主,但当梁的跨高比值 l/h 较小时,只需考虑梁的剪切变形而不计其弯曲变形,因此,低矮剪力墙横向振动时的振动方程^[13]为

$$\frac{\partial}{\partial x}[k'GA(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}]-\rho A(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p(x,t) \quad (1)$$

式中: k' 为与横梁截面形状有关的剪切系数; ρ 为材料密度; G 为剪切弹性模量; $A(x)$ 为横截面面积; $p(x,t)$ 为横向激励。应用分离变量法求解低矮剪力墙横向振动主模态函数,即令

$$y(x,t)=\bar{\varphi}(x)\bar{g}(t) \quad (2)$$

同时取 $p(x,t)=0$,代入式(1)可得求解变截面剪切梁模态特性的微分方程

$$\frac{d}{dx}[k'GA(x)\frac{d\bar{\varphi}(x)}{dx}]+\bar{\lambda}\rho A(x)\bar{\varphi}(x)=0 \quad (3)$$

式中: $\bar{\lambda}=\bar{\omega}^2$, $\bar{\omega}$ 为自振圆频率。

相应地,等截面剪切悬臂梁横向振动主模态函数按式(4)确定

$$k'GA_0\varphi''(x)+\lambda\rho A_0\varphi(x)=0 \quad (4)$$

式中: A_0 为等截面剪切悬臂梁的横截面面积。利用边界条件可求得式(4)的各阶特征值 λ_i 和对应的主模态函数 $\varphi_i(x)$, $\varphi_i(x)$ 满足正交性,即

$$\int_0^l \rho A_0 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij} m_{ij}^* \quad (5)$$

$$\int_0^l k'GA_0 \varphi_i''(x) \varphi_j(x) dx = \lambda_i \delta_{ij} m_{ij}^* \quad (6)$$

式中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

2 直接模态摄动法

直接求解式(4)获得变截面剪切梁振动模态特

性的解析解是有较大困难的。已有的研究工作表明:基于 Ritz 变换的直接模态摄动法是求解这类变系数微分方程的有效方法,笔者应用这一方法的基本原理,建立求解变截面剪切梁模态特性半解析解的近似计算方法。

首先,把变截面剪切梁在 x (沿梁长方向)截面处的抗剪刚度和单位梁长的质量分别表示为

$$k'GA(x)=k'GA_0+k'G\Delta A(x) \quad (7)$$

$$\rho A(x)=\rho A_0+\rho\Delta A(x) \quad (8)$$

式中: $\Delta A(x)$ 为 x 截面处的横截面面积增量。

式(7)、(8)表明:变截面剪切悬臂梁的横向剪切振动系统可看作等截面悬臂梁横向剪切型振动经质量和抗剪刚度两参数修改而得的新的横向剪切型振动系统。当质量和抗剪刚度修改量较小(如小开口剪力墙)时,新横向振动系统的特征值 $\bar{\lambda}_i$ 和对应的主模态函数 $\bar{\varphi}_i(x)$ 可在原等截面剪切梁横向振动的特征值 λ_i ,以及对应主模态函数 $\varphi_i(x)$ 的基础上进行简单的摄动分析而近似求得,即

$$\bar{\varphi}_i(x)=\varphi_i(x)+\Delta\varphi_i(x) \quad (9)$$

$$\bar{\lambda}_i=\lambda_i+\Delta\lambda_i \quad (10)$$

式中:第 i 阶主模态函数的修正量 $\Delta\varphi_i(x)$ 为原等截面横向剪切振动系统除第 i 阶主模态函数以外的其他主模态函数的线性组合,即

$$\Delta\varphi_i(x) \approx \sum_{j=1, j \neq i}^m \varphi_j(x) q_j = \sum_j^* \varphi_j(x) q_j \quad (11)$$

由式(9)~(11)可知:只要求得 $\Delta\lambda_i$ ($i=1,2,\dots,m$)和 q_j ($j=1,2,\dots,m, j \neq i$),则变截面剪力墙横向剪切型振动的第 i 阶特征值 $\bar{\lambda}_i$ 和对应的主模态函数 $\bar{\varphi}_i(x)$ 可近似求得。

将式(7)~(11)代入式(3),式(3)两边同乘以 $\varphi_k(x)$ ($k=1,2,\dots,m$)后沿梁长 l 积分,并考虑主模态的正交性得

$$\Delta\lambda_i(\delta_{ik}m_{ik}^*+\Delta m_{ik})+\sum_j^*\{[(\lambda_i-\lambda_j)\delta_{jk}m_{jk}^*+\lambda_i\Delta m_{jk}-\Delta k_{jk}]q_j\}+\Delta\lambda_i[\sum_j^*(\delta_{jk}m_{jk}^*+\Delta m_{jk})q_j]=\Delta k_{ik}-\lambda_i\Delta m_{ik} \quad (12)$$

式中

$$\Delta k_{ik}=-\int_0^l \varphi_k(x) \frac{d}{dx}[k'G\Delta A(x)\varphi_i'(x)]dx;$$

$$\Delta m_{jk}=\int_0^l \rho\Delta A(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx.$$

展开式(12),整理合并,写成矩阵形式,并令 $\Delta\lambda_i=\lambda_i q_i$ 可得

$$(\mathbf{A}_i+\Delta\lambda_i\mathbf{B})\mathbf{q}_i=\mathbf{p}_i \quad (13)$$

式中: $\mathbf{A}_i=(\lambda_i-\lambda_j)m_{ij}^*+\lambda_i\Delta m_{ij}-\Delta k_{ij}$,其中,等号右

边第一项为以 $(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{m}_{ii}^*$ 为元素的对角阵,当 $i = j$ 时,该项为 $\lambda_i \mathbf{m}_{ii}^*$,矩阵 $\Delta \mathbf{k}_{ij}$ 中第 i 列元素均为0; $\mathbf{B} = \Delta \mathbf{m}_{ij} + \mathbf{m}_{ij}^*$,当 $i \neq j$ 时, $\mathbf{m}_{ij}^* = \mathbf{0}$; $\mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{k}_{ij} - \lambda_i \Delta \mathbf{m}_{ij}$,即元素为 $\Delta \mathbf{k}_{ij} - \lambda_i \Delta \mathbf{m}_{ij}$ 的 $m \times 1$ 阶列向量。

利用迭代法求解式(13),即

$$(\mathbf{A}_i + \Delta \lambda_i^{l-1} \mathbf{B}) \mathbf{q}_i^l = \mathbf{p}_i$$

(14)

式中: $\Delta \lambda_i^{l-1}$ 为第 i 阶第 l 次迭代求得的变截面梁特征值的摄动量,初始迭代时令 $\Delta \lambda_i^0 = 0$ 。

由式(14)利用迭代法即可求得低矮小开口剪力墙的第 i 阶模态特性的近似解;依次令 $i = 1, 2, \dots, m$,可求得系统的前 m 阶模态特性的近似解。

3 算 例

某4层低矮开有窗户的剪力墙立面如图1所示,分析其横向自振周期和振型,即主模态函数。剪力墙各参数为:层高 $h = 3.2$ m,宽度 $B = 12.6$ m,厚度 $b = 0.15$ m,剪力墙高宽比值 $H/B = 1.016$;各窗户尺寸均为 1.6 m \times 1.5 m;混凝土剪切弹性模量 $G = 11.0 \times 10^6$ kPa,密度 $\rho = 2\,500$ kg \cdot m $^{-3}$,泊松比 $\nu = 0.2$ 。对平面应力单元(网格尺寸为 0.2 m \times 0.2 m)采用SAP2000分析、考虑弯曲变形和剪切变形(本文方法)3种不同计算方法对其进行横向自由振动分析,在本文方法中共取等截面横向剪切梁前8阶振型。表1为该剪力墙前4阶振型的周期;图2~4为该剪力墙分别按本文方法、考虑弯曲变形和SAP2000计算的前3阶振型曲线,其中,以剪力墙顶部振型为1。从图2~4可以看出,本文前2阶振型计算结果与SAP2000计算结果接近,但与以弯曲变形为主的计算结果相差较大,表明低矮剪力墙横向自振特性主要由剪切变形控制;另外,从图2~4可以看出:高振型剪切变形时剪力墙下部比顶部的

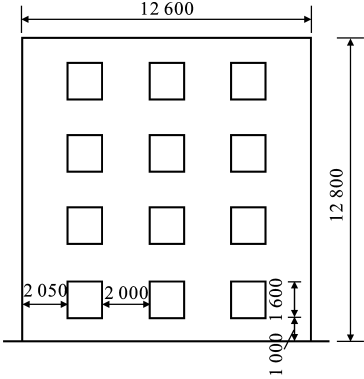


图1 剪力墙立面(单位:mm)

Fig. 1 Elevation of Shear Wall(Unit:mm)

变形大,这与振动时下部受到较大剪力作用相吻合。

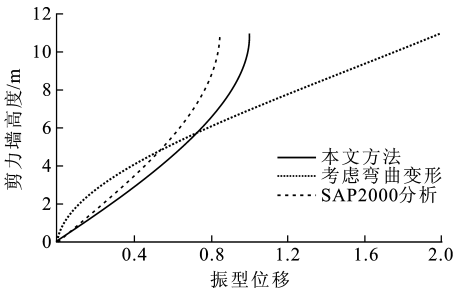


图2 第一阶振型

Fig. 2 The First Mode of Vibration

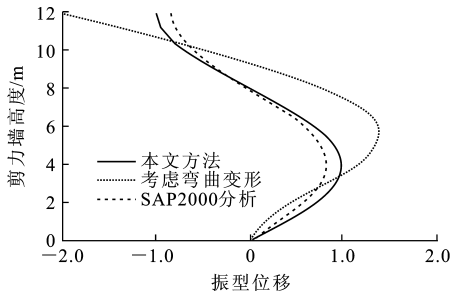


图3 第二阶振型

Fig. 3 The Second Mode of Vibration

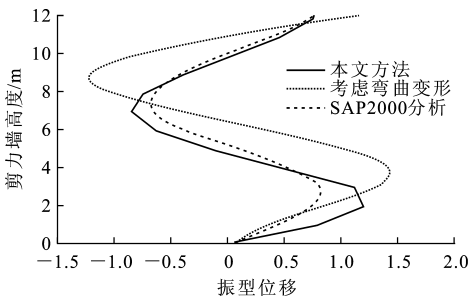


图4 第三阶振型

Fig. 4 The Third Mode of Vibration

表1 低矮小开口剪力墙前4阶振型的周期 T_i 比较

Tab. 1 Comparison of the Lowest Four Mode of Vibration

Periods T_i of Short Shear Wall with Small Openings s

计算方法	T_1	T_2	T_3	T_4
本文方法	0.845 5	0.281 7	0.173 5	0.113 8
SAP2000 分析	0.823 5	0.275 2	0.166 4	0.143 2
考虑弯曲变形	0.661 1	0.207 8	0.133 0	0.103 2

4 结 语

剪力对于以剪切变形为主的低矮剪力墙结构的低阶振型影响较大,按弯曲变形为主计算的低阶振型周期存在较大误差。利用摄动解法,以未开口墙为基础,对其主模态进行修正,进而将求解低矮剪力墙的自振特性问题转化为求解代数方程组,避免有

限元等方法的繁杂计算,简便有效。

参考文献:

References:

- [1] 徐勤,李守继,叶献国,等.两层底框砖房商住楼抗震和经济综合性能评估研究[J].建筑结构,2001,31(9):21-24.
- XU Qin, LI Shou-ji, YE Xian-guo, et al. Quantitative Evaluation of Aseismic and Economic Performance for Masonary Buildings with Frame-Shear Wall at the Bottom[J]. Building Structure, 2001, 31(9): 21-24.
- [2] 刘伯权,潘元.框架-抗震墙结构抗震墙抗弯刚度的优化研究[J].建筑科学与工程学报,2005,22(1):55-57.
- LIU Bo-quan, PAN Yuan. Study on Optimum Bending Rigidity of Seismic Wall in Frame-Shear Wall Structure[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(1): 55-57.
- [3] 沈蒲生,刘杨.水平地震作用下框支剪力墙结构的变形研究[J].建筑科学与工程学报,2005,22(1):58-63.
- SHEN Pu-sheng, LIU Yang. Distortion Research of Shear Wall Structure Supported on Frame Under Earthquake Actions[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(1): 58-63.
- [4] 易伟建,张颖.混凝土框架结构抗震设计的弯矩增大系数[J].建筑科学与工程学报,2006,23(2):46-51.
- YI Wei-jian, ZHANG Ying. Moment Magnification Factor in Anti-seismic Design of Concrete Frame Structure[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2006, 23(2): 46-51.
- [5] 张永健,黄平明.考虑剪力滞效应的简支箱梁自振特性[J].建筑科学与工程学报,2005,22(2):40-42.
- ZHANG Yong-jian, HUANG Ping-ming. Free Vibration Characteristics of Simply Supported Box Girder with Effect of Shear Lag[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(2): 40-42.
- [6] 史庆轩,杨文星,门进杰.单自由度体系非线性地震能量反应的计算[J].建筑科学与工程学报,2005,22(2):25-29.
- SHI Qing-xuan, YANG Wen-xing, MEN Jin-jie. Calculation of Seismic Energy Response for Nonlinear Single Degree of Freedom System[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(2): 25-29.
- [7] 沈聚敏,周锡元,高小旺,等.抗震工程学[M].北京:中国建筑工业出版社,2000:416-418.
- SHEN Ju-min, ZHOU Xi-yuan, GAO Xiao-wang, et al. Aseismic Engineering[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2000: 416-418.
- [8] 黄东升,程文灏.短肢剪力墙结构动力特性分析的半解析法[J].振动工程学报,2005,18(3):309-313.
- HUANG Dong-sheng, CHENG Wen-rang. Dynamic Analysis for Short-Pier Walls by Semi-analytic Approach[J]. Journal of Vibration Engineering, 2005, 18(3): 309-313.
- [9] 夸克工作室.有限元分析基础篇 ANSYS 与 Matlab [M].北京:清华大学出版社,2002.
- Quark Studio. Fundamental Finite Element Analysis with ANSYS and Matlab[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.
- [10] 楼梦麟,吴京宁.复杂梁动力问题的近似分析方法[J].上海力学,1997,18(3):234-240.
- LOU Meng-lin, WU Jing-ning. An Approach to Solve Dynamic Problems of Complicated Beams[J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1997, 18(3): 234-240.
- [11] 楼梦麟,白建方.FRP加固梁模态分析的摄动解法[J].建筑科学与工程学报,2005,22(2):21-24.
- LOU Meng-lin, BAI Jian-fang. Perturbation Solution for Modal Characteristics of Beam Strengthened by FRP[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(2): 21-24.
- [12] LOU Meng-lin, DUAN Qiu-hua, CHEN Gen-da. Modal Perturbation Method for the Dynamic Characteristics of Timoshenko Beams[J]. Shock and Vibration, 2005, 20(12): 425-434.
- [13] CHENG F Y. Matrix Analysis of Structural Dynamics: Applications and Earthquake Engineering [M]. New York: Marcel Dekker Inc., 2000.