

文章编号:1673-2049(2007)02-0068-06

平行圆管空心双向板的超级有限元分析

周朝阳, 欧阳珠子, 李明

(中南大学 土木建筑学院, 湖南 长沙 410075)

摘要:针对平行圆管空心双向板采用普通有限元方法进行分析特别耗时,甚至可能无法用计算机求解的问题,将超级有限元的基本思想和方法应用于这种结构的分析中,以达到简化计算的目的。采用考虑横向剪切变形影响的八节点平壳单元作为超级单元,以八节点三维实体等参数单元为子单元,给出了各自的位移模式及位移转换矩阵,并编制了相应的计算程序,对不同跨度、边长比和边界条件的空心板进行了超级有限元分析和普通有限元分析,通过对比上述2种方法的挠度计算结果,证明了超级有限元方法的简便实用性。

关键词:超级有限元;平行圆管空心双向板;简化分析;转换矩阵

中图分类号:TU378.5

文献标志码:A

Super Finite Element Analysis for Two-way Voided Slabs with Paralleled Circle-tubes

ZHOU Chao-yang, OUYANG Zhu-zi, LI Ming

(School of Civil Engineering and Architecture, Central South University, Changsha 410075, Hunan, China)

Abstract: The two-way voided slabs with paralleled circle-tubes were increasingly applied in the floors of house building. Analyses of such slabs by the regular finite element method (FEM) were extremely time-consuming and sometimes could not work out solution if personal computer was used. The basic principle and method of super finite element had been adopted for analysis of such voided slabs structure so as to simplify calculation. Eight-node flat shell element with the effect of transversal shear deformation was selected as super-element and 3-D eight-node isoparametric solid element as sub-element. Their displacement modes and displacement transition matrix were presented and the relevant computing program was compiled. Voided slabs cases with different spans, length ratios and boundary conditions were computed by using super FEM and regular FEM respectively. Comparison between results of deflection from two methods shows that the super FEM is simple and practical.

Key words: super finite element; two-way voided slab with paralleled circle-tube; simplified analysis; transition matrix

0 引言

在房屋建筑的楼盖中,通过预先平行埋设薄壁

圆管形成现浇混凝土空心板,可以节约混凝土和钢材的用量,产生一定的经济效益,相关工程应用日益广泛^[1-3]。对于平行圆管空心双向板,由于存在单向

收稿日期:2007-02-28

基金项目:湖南省建设科技计划项目(2003-45)

作者简介:周朝阳(1964-),男,湖南衡阳人,教授,博士生导师,工学博士,E-mail:joezycn@163.com。

孔道,2个方向板的竖向截面形状和刚度存在着差别^[4],因此,荷载分配比例及内力分布规律相对于实心板均会发生变化。平行圆管空心双向板实际上是一种复杂的空间结构,垂直管道轴线方向的截面变形也不再符合经典的平截面假定,若用大型有限元软件进行普通有限元分析,一般要采用三维块体单元,为了较好地模拟曲线边界,所需的单元和节点数目会非常多,耗费的机时也很长,若非单区格板,计算机受容量限制有可能无法求解。在研究简化算法过程中,其计算结果必须与真实值加以对比来考证其适用性,试验结果虽然真实,但其边界条件可能难以准确把握,其结果作为判断简化算法适用性的标准值就不一定合适,即使可以,因为费用问题,得到的基准数据也是有限的(参数无法随意变化)。笔者将利用超级有限元方法对平行圆管空心双向板进行弹性分析,并与普通有限元分析结果加以对比。

1 基本思想和方法

超级有限元方法^[5-7]是将离散型的多构件系统设想为连续化实体,按实体用现有数值方法离散与选取形函数及节点总体自由度。这样,每一个单元包含有大量不同类型、不同形状的构件,这样的单元称之为超级单元。对超级单元,按其结构特性选择节点自由度和相应的形函数,在超级单元选定了适当的位移模式后,其内部任意一构件的位移都被超级单元总体自由度所约束。这样,就可以将所有内部构件的自由度转化为系统的总体自由度来求解。每一构件均可采用通常的有限元方法进行分析,最终分析运算所涉及到的自由度仅与超级单元的节点个数和所选取的超级单元自由度有关,而与具体构件的个数及其复杂程度无关^[8-9]。通过超级单元和构件单元节点自由度向量之间的转换,可以方便地用总体计算结果来求解每一构件的变形和内力。

超级有限元的基本方法是将分析的模型分成若干个超级单元(假定该超级单元为三维单元),若该超级单元具有 m 个节点,则该超级单元节点位移列向量为

$$\delta = (u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_i, v_i, w_i, \dots, u_m, v_m, w_m)^T \quad (1)$$

式中: u_i, v_i, w_i 为超级单元的节点位移分量。

按有限元模式,该超级单元模型内任意一点的位移分量可以用节点位移分量表示,则超级单元的矩阵形式为

$$u = (u, v, w)^T = N\delta \quad (2)$$

式中: N 为超级单元的形函数。

每个超级单元中包含各种构件(梁、杆、轴、膜、板、壳等及其组合)。对于超级单元内的每个构件,均按常规有限元方法离散为子单元,并采用有限元位移模式得到其位移列阵为

$$u^e = N^e \delta^e \quad (3)$$

式中: u^e 为子单元各节点位移; N^e 为子单元有限元形函数; δ^e 为子单元有限元的节点位移列向量。

在对该构件进行有限元分析时,分别列出子单元内各节点的应变矩阵 ϵ^e 、应力矩阵 σ^e 、刚度矩阵 K^e 、质量矩阵 M^e 、荷载矩阵 F^e ,即

$$\epsilon^e = B^e \delta^e, \sigma^e = D^e \epsilon^e, K^e = \int (B^e)^T D^e B^e d\Omega$$

$$M^e = \int (N^e)^T D^e N^e d\Omega, F^e = \int (N^e)^T q d\Omega$$

式中: D^e 为子单元的弹性矩阵; B^e 为子单元的应变矩阵。

将 j 点的空间坐标值代入超级单元的位移模式中,得到该点的位移模式如下

$$\left. \begin{aligned} u_j^e &= \sum_{i=1}^m N_i(x_j, y_j, z_j) u_i \\ v_j^e &= \sum_{i=1}^m N_i(x_j, y_j, z_j) v_i \\ w_j^e &= \sum_{i=1}^m N_i(x_j, y_j, z_j) w_i \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

令子单元的节点自由度和超级单元的节点自由度之间存在如下关系,即

$$\delta^e = A\delta \quad (5)$$

式中: A 为子单元自由度和超级单元自由度之间的转换矩阵。

将式(5)代入式(3),得到用转换矩阵 A 表示的子单元的位移列阵

$$u^e = N^e \delta^e = N^e A\delta \quad (6)$$

用转换矩阵 A 表示的子单元应变矩阵 ϵ^e 为

$$\epsilon^e = B^e \delta^e = B^e A\delta \quad (7)$$

则该子单元相应于超级单元的刚度矩阵为

$$K^s = \int \bar{B}^T D^e \bar{B} d\Omega = \int A^T (B^e)^T D^e \cdot$$

$$B^e A d\Omega = A^T K^e A \quad (8)$$

同理可得相应于超级单元自由度的质量矩阵和荷载矩阵为

$$\left. \begin{aligned} M^s &= A^T M^e A \\ F^s &= A^T F^e \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: M^s 为超级单元自由度的质量矩阵; F^s 为超级单元自由度的荷载矩阵。

无论超级单元中包含多少子单元,并且不管是什么类型子单元以及子单元处于什么位置,均可以按式(8)、(9)转换为相对于该超级单元自由度的运算矩阵,只是转换矩阵 \mathbf{A} 的计算不同,因此按照变分原理,对于单个超级单元的刚度矩阵、质量矩阵和荷载矩阵,就是其所含子单元的单元刚度矩阵、质量矩阵和荷载矩阵元素的简单叠加,即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_s \mathbf{K}^s \\ \mathbf{M} &= \sum_s \mathbf{M}^s \\ \mathbf{F} &= \sum_s \mathbf{F}^s \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

超级有限元基本算式为

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{F} \quad (11)$$

式中: \mathbf{K} 、 \mathbf{M} 、 \mathbf{F} 为系统各个超级单元相应的运算矩阵集合。

式(11)充分考虑了每个子单元的力学、几何、材料与所在位置特征,并进行了完全类似于一般子单元的有限元分析过程。在计算出 $\boldsymbol{\delta}$ 后,每个子单元的各种力学量,如位移、应变和应力(内力)可以用式(12)计算

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^e &= \mathbf{N}^e \mathbf{A} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\epsilon}^e &= \mathbf{B}^e \mathbf{A} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\sigma}^e &= \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e \mathbf{A} \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

2 超级有限元法

2.1 单元分析

2.1.1 子单元及其位移模式

子单元采用八节点三维实体等参数单元,即如图1所示的局部坐标系下的六面体单元,取该立方体的8个顶点为子单元节点。

每个单元子节点内有3个独立的位移分量,对应于子单元各节点的插值函数分别为

$$\left. \begin{aligned} u^e &= \sum_{i=1}^8 N_i^e(\xi, \eta, \zeta) u_i^e \\ v^e &= \sum_{i=1}^8 N_i^e(\xi, \eta, \zeta) v_i^e \\ w^e &= \sum_{i=1}^8 N_i^e(\xi, \eta, \zeta) w_i^e \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中: u^e 、 v^e 、 w^e 分别为子单元各节点沿 x 、 y 、 z 方向的位移; $N_i^e(\xi, \eta, \zeta)$ ($i=1, 2, \dots, 8$) 为子单元各节点相应的形函数。

从式(13)中可以看出,子单元任意一个侧面上一点的插值函数完全由该面的4个节点的函数值惟一

确定,这样,在相邻元素的公共面上,只要在其4个节点上具有相同的函数值,插值函数就满足在局部坐标系下的相容性^[10-13]。

容易证明在整体坐标系下收敛性的常应变准则,其相应的形函数为

$$N_i^e(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \cdot (1 + \zeta\zeta_i) \quad i=1, 2, \dots, 8 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) &= \frac{1}{8}(1, -1, 1); (\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = \frac{1}{8}(1, \\ &-1, -1); (\xi_3, \eta_3, \zeta_3) = \frac{1}{8}(1, 1, -1); (\xi_4, \eta_4, \zeta_4) = \\ &\frac{1}{8}(1, 1, 1); (\xi_5, \eta_5, \zeta_5) = \frac{1}{8}(-1, -1, 1); (\xi_6, \eta_6, \zeta_6) = \\ &\frac{1}{8}(-1, -1, -1); (\xi_7, \eta_7, \zeta_7) = \frac{1}{8}(-1, 1, -1); \\ &(\xi_8, \eta_8, \zeta_8) = \frac{1}{8}(-1, 1, 1)。 \end{aligned}$$

该子单元的应变矩阵为

$$\mathbf{B}^e = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6, \mathbf{B}_7, \mathbf{B}_8) \quad (15)$$

式中

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, 8$$

该子单元的弹性矩阵为

$$\mathbf{D}^e = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & & & \text{sym.} \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \end{bmatrix}$$

2.1.2 超级单元及其位移模式

本文中采用横向剪切变形的八节点平壳单元作为超级单元(图 2)。假设超级板单元位于单向空心双向板内中面内,建立的单元局部位移模式为式(16)。容易证明,八节点实体等参数单元的插值函数满足相容性和常应变准则

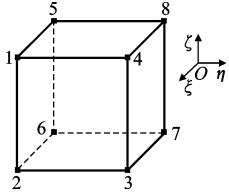


图 1 三维块体等参数单元

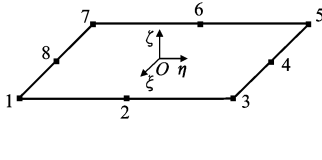


图 2 八节点平壳超级单元

Fig. 1 3-D Solid Isoparametric Element

Fig. 2 Super Element of Eight-node Flat Shell

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & & \\ & N_i & -z_i N_i \\ & & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中: θ_x, θ_y 为弯曲问题的一组位移; z_i 为板内点的竖向坐标; N_i 为相应的四边形八节点等参数单元形函数

$$N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1) & i=1,3,5,7 \\ \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i) & i=4,8 \\ \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi\xi_i) & i=2,6 \end{cases} \quad (17)$$

式中: $(\xi_1, \eta_1) = (1, -1)$; $(\xi_2, \eta_2) = (1, 0)$; $(\xi_3, \eta_3) = (1, 1)$; $(\xi_4, \eta_4) = (0, 1)$; $(\xi_5, \eta_5) = (-1, 1)$; $(\xi_6, \eta_6) = (-1, 0)$; $(\xi_7, \eta_7) = (-1, -1)$; $(\xi_8, \eta_8) = (0, -1)$ 。

2.1.3 位移转换矩阵

将子单元各节点所在位置的整体坐标值 (x_i, y_i, z_i) ($i=1, 2, \dots, 8$) 代入超级单元位移模式式(16), 即

$$\begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ w_i^e \end{bmatrix} = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8) \delta = R \delta$$

$$i=1, 2, \dots, 8$$

$$T_j = \begin{bmatrix} N_j & & & z_j N_j \\ & N_j & & -z_j N_j \\ & & N_j & \end{bmatrix} \quad j=1, 2, \dots, 8$$

于是得到了子单元节点位移向量和超单元节点位移向量之间的转换关系, 即

$$\delta^e = (R, R, R, R, R, R, R, R)^T \delta = C \delta \quad (18)$$

式中: C 为 24×40 阶矩阵。

2.1.4 超级单元刚度矩阵、质量矩阵和荷载矩阵

利用式(8)~(10)可以直接得到某一个超级单元中各子单元的刚度矩阵、质量矩阵和荷载矩阵向该超级单元变化的运算矩阵^[14]; 然后, 将同一个超级单元中所有子单元的运算矩阵直接进行简单叠加, 即可得到某一超级单元的刚度矩阵、质量矩阵和荷载矩阵。

2.2 超级单元的集合及程序编制

在单个超级单元刚度矩阵与荷载矩阵形成后, 可以根据超级单元在整体结构中的位置, 按普通有限单元方法进行集合, 形成总体刚度矩阵和总体荷载矩阵, 并计算出平行圆管空心双向板所有超级单元的节点位移向量, 再通过式(12)求出任意一个子单元的节点位移向量, 从而求出该子单元的应力和应变^[15]。

根据超级有限元方法, 基于 Microsoft Developer Studio 编译环境, 采用 FORTRAN 语言对单向空心双向板编制了相应的计算程序, 程序计算的流程图见图 3。

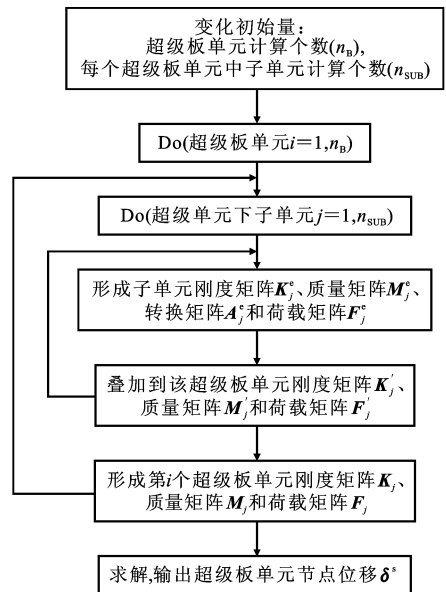


图 3 程序计算的流程

Fig. 3 Flow of Program Calculation

3 算例分析

对平行圆管空心双向板进行参数化建模分析, 分别考察 3 种不同平面尺寸或支承条件的矩形板在

竖向荷载作用下的位移分布。结构模型及尺寸如图 4 和表 1 所示,矩形板的材料采用 C30 混凝土,重度为 $2.5\text{ kN}\cdot\text{m}^{-3}$,弹性模量 $E_0=3.0\times10^{10}\text{ Pa}$,泊松比为0.2。平行圆管空心双向板表面所承受的均布荷载 $q=1\text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 。

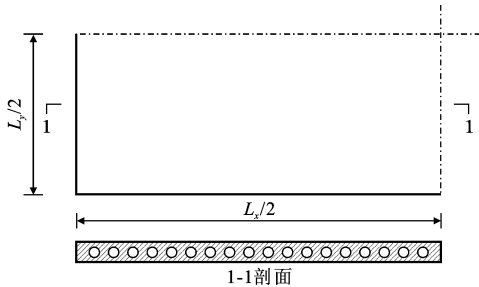


图 4 结构模型

Fig. 4 Model of Structure

表 1 模型主要参数

Tab. 1 Main Parameters of Model

板号	空心板 长 L_x/m	空心板 宽 L_y/m	空心板 厚 b/mm	孔洞直 径 d/mm	孔洞间 距 q/mm	边界条件
①	9.0	6.75	300	200	50	四边固支
②	9.0	6.75	300	200	50	四边简支
③	9.0	9.00	300	200	50	四边固支

根据对称性原理,将以上块空心板均各取 1/4 块板来进行分析计算。以下仅列出第 1 种情况下的单元划分,另外 2 种情况参考上述方法进行参数化建模,不再赘述。将图 4 中的 1/4 板划分为 9 个超级板单元,网格划分如图 5 所示。其中,每个超级单元包含 8 个节点,每个节点有 5 个自由度,而 1/4 块板的模型中共有 40 个超级单元节点,200 个自由度。每个超级板单元均划分为 7 200 个三维等参子单元,子单元的划分如图 6 所示。其中,每个子单元包含 8 个节点,且每个子节点有 3 个自由度,因此模型中共有 86 868 个子单元、260 604 个自由度。

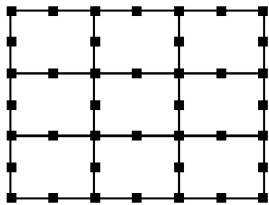


图 5 超级单元
计算模型

Fig. 5 Super Element
Calculation Model

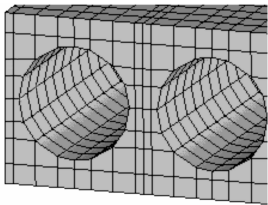


图 6 子单元网格
划分方案

Fig. 6 Meshes Partition
Project of Subelement

为了检验超级有限元法的可行性和可靠性,分别采用普通有限元和超级有限元对 3 块平行圆管空

心双向板进行数值分析。其中,普通有限元分析中对整个模型全部采用三维实体等参数单元进行划分。图 7 为 3 块板各自沿 2 条中轴线半跨范围的竖向挠度分布。从图 7 可以看出,采用超级有限元和普通有限元这 2 种计算方法得到的结果吻合很好,说明采用考虑剪切变形的平壳超级单元来分析平行圆管空心双向板是合理可行的。

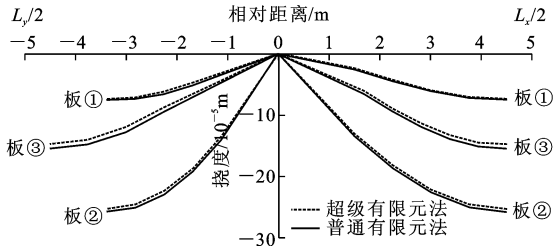


图 7 超级有限元法和普通有限元
法的计算结果对比

Fig. 7 Calculation Results Comparison
Between Super FEM and Regular FEM

4 结 语

(1)基于超级有限元方法的基本思想和方法,根据平行圆管空心双向板的特点,以考虑横向剪切变形影响的八节点平壳单元作为超级板单元,以八节点三维实体等参元作为子单元,建立了超级单元和子单元的位移模式,推导了 2 种单元之间的位移转换矩阵,编制了该结构的超级单元分析程序。

(2)对不同平面尺寸或支承条件的平行圆管空心矩形双向板分别采用超级有限元方法和普通有限元方法进行了分析,2 种方法的计算结果吻合很好,但是超级有限元方法比普通有限元方法的计算量和存储量要小得多。

参考文献:

References:

[1] 周 庆,邹银生. 现浇混凝土空心楼盖受力特性研究[J]. 建筑科学与工程学报,2005,22(4):57-60.
ZHOU Qing,ZOU Yin-sheng. Research on Force Resistance Properties of Cast-in-situ Hollow Concrete Floor[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering,2005,22(4):57-60.

[2] 楼文娟,卢 旦,孙炳楠. 风致内压及其对屋盖结构的作用研究现状评述[J]. 建筑科学与工程学报,2005,22(1):76-82.
LOU Wen-juan,LU Dan,SUN Bing-nan. Review of Wind-induced Internal Pressure and Its Effects on Roof Structures[J]. Journal of Architecture and Civil

- Engineering, 2005, 22(1): 76-82.
- [3] 吴方伯,汪幼林,周绪红,等. 混凝土密肋空心楼盖试验研究[J]. 建筑科学与工程学报, 2006, 23(1): 59-62.
- WU Fang-bo, WANG You-lin, ZHOU Xu-hong, et al. Experimental Research on Hollow-ribbed Concrete Floor[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2006, 23(1): 59-62.
- [4] 周朝阳,郑坤龙,李明. 成排侧开圆孔受弯构件的应力简化和刚度等效[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2005, 36(6): 1 089-1 093.
- ZHOU Chao-yang, ZHENG Kun-long, LI Ming. Simplification of Longitudinal Stresses Calculation and Equivalence of Flexural Stiffness for Members with Lateral Circle Perforations [J]. Journal of Central South University: Natural Science, 2005, 36 (6): 1 089-1 093.
- [5] 肖志斌,唐锦春. 大跨板片空间结构的超级有限元分析[J]. 计算结构力学及其应用, 1994, 11(4): 416-419.
- XIAO Zhi-bin, TANG Jin-chun. Static Analysis of Large-span Thin-plate Composite Structure by Super Finite Element[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1994, 11(4): 416-419.
- [6] 黄勇,马克俭,陈波. 多层空腹夹层板柱结构的动力特性研究[J]. 建筑结构学报, 2000, 21(3): 23-29.
- HUANG Yong, MA Ke-jian, CHEN Bo. The Study of Dynamic Behavior for Multi-storied Vierendeel Sandwich Plate-column Structure[J]. Journal of Building Structures, 2000, 21(3): 23-29.
- [7] 曹志远. 复杂结构分析的超级元法[J]. 力学与实践, 1992, 14(4): 10-14.
- CAO Zhi-yuan. Super Element Method for Complex Structure Analysis[J]. Mechanics and Practice, 1992, 14(4): 10-14.
- [8] 曹志远. 空间结构分析的超级有限元法[J]. 空间结构, 1995, 1(1): 24-28.
- CAO Zhi-yuan. Super Finite Element Method for Spatial Structure Analysis[J]. Spatial Structures, 1995, 1 (1): 24-28.
- [9] 周汉斌,曹志远. 超级有限元法在桁架组合结构分析中的应用[J]. 上海力学, 1993, 14(3): 31-36.
- ZHOU Han-bin, CAO Zhi-yuan. The Application of Super Finite Element Method in the Analysis of Truss Composite Structure [J]. Mechanics of Shanghai, 1993, 14(3): 31-36.
- [10] 孟海,姚谦峰,黄炜. 密肋复合墙体弹性刚度试验及计算分析[J]. 建筑科学与工程学报, 2006, 23(3): 14-20.
- MENG Hai, YAO Qian-feng, HUANG Wei. Analysis of Experiment and Calculation of Elastic Rigidity of Multi-rib Slab Composite Wall[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2006, 23(3): 14-20.
- [11] 周绪红,张微伟,吴方伯,等. 预应力混凝土四边简支双向叠合板的设计方法[J]. 建筑科学与工程学报, 2006, 23(4): 54-57.
- ZHOU Xu-hong, ZHANG Wei-wei, WU Fang-bo, et al. Design Method of Prestressed Concrete Simply Supported on Four Sides of Two-way Composite Slab [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2006, 23(4): 54-57.
- [12] 陈玉骥. 带肋板单元及其在构造正交异性板分析中应用[J]. 佛山科学技术学院学报: 自然科学版, 2006, 24(2): 6-9.
- CHEN Yu-ji. The Plate Element with Costalias and Its Application to Analyzing Orthotropy Plates in Construction[J]. Journal of Foshan University: Natural Science Edition, 2006, 24(2): 6-9.
- [13] 王毅红,郭增辉,李先顺,等. 带有芯钢管的钢管混凝土节点的受力机理[J]. 建筑科学与工程学报, 2007, 24(1): 64-68.
- WANG Yi-hong, GUO Zeng-hui, LI Xian-shun, et al. Bearing Mechanism of Concrete-filled Tubular Joint with Core Steel Tube[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2007, 24(1): 64-68.
- [14] 黄勇,马克俭. 空腹夹层板的拟板超级有限元分析[J]. 贵州工业大学学报: 自然科学版, 2003, 32(4): 79-82.
- HUANG Yong, MA Ke-jian. Analysis of Super Finite Element Method for Vierendeel Sandwich Plate[J]. Journal of Guizhou University of Technology: Natural Science Edition, 2003, 32(4): 79-82.
- [15] 刘沐宇,刘巧丽,丁庆军,等. 预应力轻集料混凝土空心板梁的有限元模型[J]. 武汉理工大学学报, 2006, 28(4): 56-58.
- LIU Mu-yu, LIU Qiao-li, DING Qing-jun, et al. Finite Element Analysis Model on Prestressed LWAC Hollow Slabs[J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2006, 28(4): 56-58.