

文章编号:1673-2049(2008)02-0101-05

# 纤维混凝土弹性模量的细观力学求解方法

俞家欢<sup>1,2</sup>, 贺改先<sup>1</sup>, 张峰<sup>1</sup>, 黄承逵<sup>2</sup>

(1. 沈阳建筑大学 土木工程学院, 辽宁 沈阳 110168; 2. 大连理工大学 土木水利学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要:**应用细观力学理论中的 Mori-Tanaka 法和 Eshelby 等效夹杂法求解了纤维混凝土的弹性模量, 对影响纤维混凝土弹性模量的若干参数进行讨论, 得出纤维混凝土的弹性模量为砂、石、纤维和水泥(基体)4 种组分物理性能和体积率等不同参数的函数。通过比较理论解和已有试验数据可知, 二者吻合较好, 证明利用细观力学的理论求解纤维混凝土弹性模量是一种可行并有效的方法。

**关键词:**细观力学; 弹性模量; 纤维混凝土; 夹杂

**中图分类号:** TU528.572

**文献标志码:** A

## Solution Method of Meso-mechanics to Elastic Moduli of Fiber Reinforced Concrete

YU Jia-huan<sup>1,2</sup>, HE Gai-xian<sup>1</sup>, ZHANG Feng<sup>1</sup>, HUANG Cheng-kui<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang 110168, Liaoning, China;

2. School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China)

**Abstract:** The elastic moduli of fiber reinforced concrete were solved by using theory of meso-mechanics based on Mori-Tanaka and Eshelby equivalent inhomogeneous method. Some parameters influencing elastic moduli of fiber reinforced concrete were discussed, and the elastic moduli of fiber reinforced concrete were given as a function of physical properties and volume fraction of the following four components: sand, gravel, fibers and cement as matrix. Finally, a comparison was also made between theoretical solutions and published experimental data, and two aspects were in good agreement. It is validated that it is a possible and effective method for solving elastic moduli of fiber reinforced concrete by using theory of meso-mechanics.

**Key words:** meso-mechanics; elastic modulus; fiber reinforced concrete; inhomogeneity

## 0 引言

含有三维随机分布夹杂复合材料的弹性模量可通过固体力学理论并建立近似模型而得到求解。Hori<sup>[1]</sup>借助经验常数给出了不同骨料组成纤维混凝土的弹性模量和试验数据。Voigt<sup>[2]</sup>给出了复合材料弹性模量的上限, Reuss<sup>[3]</sup>给出了其弹性模量的下限。Hashin 等<sup>[4]</sup>采用更为优越的变分方法给出

了复合材料弹性模量的区间。Mori 等<sup>[5]</sup>用平均场概念分析了复合材料的细观特性。Eshelby<sup>[6]</sup>考虑了夹杂形状对复合材料性能的影响。Mura<sup>[7]</sup>通过弹性力学理论和 Eshelby 夹杂法研究了复合材料弹性模量和弹塑性力学表现。Christensen 等<sup>[8]</sup>提出了两相球状模型求解颗粒增强复合材料的剪切模量, 该模型优点为夹杂和周围介质的应力、应变场的相互作用得到了充分考虑。Lutfi<sup>[9]</sup>对钢纤维增强

收稿日期: 2008-01-15

基金项目: 辽宁省教育厅科学研究青年基金计划项目(05L365); 国家公派留学基金项目(2007)

作者简介: 俞家欢(1974-), 男, 江苏无锡人, 沈阳建筑大学副教授, 工学博士, 博士后, E-mail: yrudu@vip.sina.com。

水泥基复合材料的物理和机械性能进行了充分研究。Ahmed<sup>[10]</sup>通过试验研究了聚合物纤维增强混凝土的力学性能并得到弹性模量等参数。本文中笔者应用 Mori-Tanaka 法和 Eshelby 等效夹杂法求解了含有 3 种不同球形夹杂的纤维混凝土的弹性模量,并且理论解和试验数据吻合较好。

## 1 细观力学求解模型

### 1.1 球形夹杂四相复合材料模型

假设无限大体  $M$  (水泥基体) 内有 3 种随机分布的球形夹杂 (细骨料、粗骨料和颗粒状纤维), 见图 1。其中砂为第 1 类夹杂, 占据空间  $\Omega_1 = \sum_{i=1}^N \Omega_{1i}$ , 弹性模量为  $C_1^*$  且体积率为  $f_1$ ; 石为第 2 类夹杂, 占据空间  $\Omega_2 = \sum_{i=1}^N \Omega_{2i}$ , 弹性模量为  $C_2^*$  且体积率为  $f_2$ ; 纤维为第 3 类夹杂, 占据空间  $\Omega_3 = \sum_{i=1}^N \Omega_{3i}$ , 弹性模量为  $C_3^*$  且体积率为  $f_3$ 。3 种夹杂被弹性模量为  $C$  的基体 (水泥) 包围, 通过细观力学理论求解纤维混凝土的弹性模量  $\bar{C}$ 。

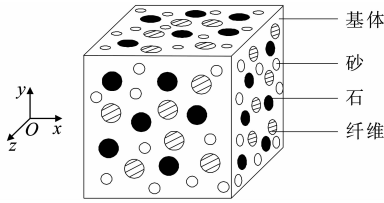


图 1 球形夹杂四相复合材料模型

Fig. 1 Four-phase Spherical Inhomogeneity Composites Model

应用 Eshelby 等效夹杂法求解如图 1 所示的复合材料 (纤维增强混凝土) 的弹性模量  $\bar{C}$ , 在无限远处施加均匀应力  $\sigma^0$ , 夹杂  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  内的本征应变分别为  $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*$ 。

### 1.2 弹性模量的计算

夹杂和基体相对于均匀应力  $\sigma^0$  的应力场扰动分别为  $\sigma^{\Omega_1}, \sigma^{\Omega_2}, \sigma^{\Omega_3}, \sigma^M$ , 由本征应变引起的应变场扰动  $\Delta\gamma_{ij}(x)$  为

$$\Delta\gamma_{ij}(x) = - \int_{\Omega_1} C_{klmn} \epsilon_{nm}^*(x') \times \frac{1}{2} [G_{ik,lj}(x - x') + G_{jk,li}(x - x')] dx \quad (1)$$

式中: Green 函数  $G_{ij}(x - x')$  表示点  $x'$  处沿  $x_j$  方向的单位力在点  $x$  处引起的沿  $x_i$  方向的位移分量。

通过虎克定律和夹杂  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  内的平均应力可以求得纤维混凝土内的弹性场

$$\sigma^0 + \langle \sigma^{\Omega_1} \rangle = C_1^* [C^{-1}(\sigma^0 + \langle \sigma^M \rangle) + \langle \Delta\gamma_1 \rangle] \quad (2)$$

$$\sigma^0 + \langle \sigma^{\Omega_2} \rangle = C_2^* [C^{-1}(\sigma^0 + \langle \sigma^M \rangle) + \langle \Delta\gamma_2 \rangle] \quad (3)$$

$$\sigma^0 + \langle \sigma^{\Omega_3} \rangle = C_3^* [C^{-1}(\sigma^0 + \langle \sigma^M \rangle) + \langle \Delta\gamma_3 \rangle] \quad (4)$$

式中: 符号  $\langle \rangle$  表示参数的平均值;  $\Delta\gamma_1, \Delta\gamma_2, \Delta\gamma_3$  分别为由于本征应变  $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*$  引起的应变扰动。夹杂中扰动应变的平均值分别为

$$\langle \Delta\gamma_1 \rangle = S_1 \langle \epsilon_1^* \rangle \quad (5)$$

$$\langle \Delta\gamma_2 \rangle = S_2 \langle \epsilon_2^* \rangle \quad (6)$$

$$\langle \Delta\gamma_3 \rangle = S_3 \langle \epsilon_3^* \rangle \quad (7)$$

式中:  $S_1, S_2, S_3$  为无限大体中球形夹杂的 Eshelby 张量。由于扰动应力场平均值必须为 0, 则

$$\int_D \sigma_{ij} dx = 0 \quad (8)$$

通过数学变换可将式(8)改写为

$$f_1 \langle \sigma^{\Omega_1} \rangle + f_2 \langle \sigma^{\Omega_2} \rangle + f_3 \langle \sigma^{\Omega_3} \rangle + (1 - f_1 - f_2 - f_3) \langle \sigma^M \rangle = 0 \quad (9)$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_m = 1 \quad (10)$$

式中:  $f_m$  为基体体积率。

将式(5)~(7)代入式(2)~(4)可得

$$\sigma^{\Omega_1} = \langle \sigma^M \rangle + C(S_1 - I) \langle \epsilon_1^* \rangle \quad (11)$$

$$\sigma^{\Omega_2} = \langle \sigma^M \rangle + C(S_2 - I) \langle \epsilon_2^* \rangle \quad (12)$$

$$\sigma^{\Omega_3} = \langle \sigma^M \rangle + C(S_3 - I) \langle \epsilon_3^* \rangle \quad (13)$$

式中:  $I$  为单位张量。由式(10)~(13)可得

$$\sigma^M = -[f_1 C(S_1 - I) \langle \epsilon_1^* \rangle + f_2 C(S_2 - I) \langle \epsilon_2^* \rangle + f_3 C(S_3 - I) \langle \epsilon_3^* \rangle] \quad (14)$$

$$\sigma^{\Omega_1} = (1 - f_1) C(S_1 - I) \langle \epsilon_1^* \rangle - f_2 C(S_2 - I) \langle \epsilon_2^* \rangle - f_3 C(S_3 - I) \langle \epsilon_3^* \rangle \quad (15)$$

$$\sigma^{\Omega_2} = (1 - f_2) C(S_2 - I) \langle \epsilon_2^* \rangle - f_1 C(S_1 - I) \langle \epsilon_1^* \rangle - f_3 C(S_3 - I) \langle \epsilon_3^* \rangle \quad (16)$$

$$\sigma^{\Omega_3} = (1 - f_3) C(S_3 - I) \langle \epsilon_3^* \rangle - f_1 C(S_1 - I) \langle \epsilon_1^* \rangle - f_2 C(S_2 - I) \langle \epsilon_2^* \rangle \quad (17)$$

将式(11)~(17)代入式(2)~(4)并求解  $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*$  可得

$$\langle \epsilon_1^* \rangle = \alpha \sigma^0 \quad (18)$$

$$\langle \epsilon_2^* \rangle = \beta \sigma^0 \quad (19)$$

$$\langle \epsilon_3^* \rangle = \rho \sigma^0 \quad (20)$$

其中  $\alpha, \beta, \rho$  的隐性表达式分别为

$$\sigma^0 (I - C_1^* C^{-1}) + A \langle \epsilon_1^* \rangle + f_2 M \langle \epsilon_2^* \rangle + f_3 Q \langle \epsilon_3^* \rangle = 0 \quad (21)$$

$$\sigma^0 (I - C_2^* C^{-1}) + B \langle \epsilon_2^* \rangle + f_1 N \langle \epsilon_1^* \rangle + f_3 R \langle \epsilon_3^* \rangle = 0 \quad (22)$$

$$\sigma^0 (I - C_3^* C^{-1}) + D \langle \epsilon_3^* \rangle + f_1 P \langle \epsilon_1^* \rangle + f_2 S \langle \epsilon_2^* \rangle = 0 \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= [(1-f_1)C + f_1 C_1^*] (S_1 - I) - C_1^* S_1 \\ B &= [(1-f_2)C + f_2 C_2^*] (S_2 - I) - C_2^* S_2 \\ D &= [(1-f_3)C + f_3 C_3^*] (S_3 - I) - C_3^* S_3 \\ M &= (C_1^* - C) (S_2 - I) \\ N &= (C_2^* - C) (S_1 - I) \\ P &= (C_3^* - C) (S_1 - I) \\ Q &= (C_1^* - C) (S_3 - I) \\ R &= (C_2^* - C) (S_3 - I) \\ S &= (C_3^* - C) (S_2 - I) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

平均弹性应变  $\langle \gamma^{\Omega_1} \rangle, \langle \gamma^{\Omega_2} \rangle, \langle \gamma^{\Omega_3} \rangle$  可分别由式(25)~(27)得到

$$\langle \gamma^{\Omega_1} \rangle = C^{-1} \langle \sigma^M \rangle + \langle \Delta \gamma_1 \rangle \quad (25)$$

$$\langle \gamma^{\Omega_2} \rangle = C^{-1} \langle \sigma^M \rangle + \langle \Delta \gamma_2 \rangle \quad (26)$$

$$\langle \gamma^{\Omega_3} \rangle = C^{-1} \langle \sigma^M \rangle + \langle \Delta \gamma_3 \rangle \quad (27)$$

基体  $M$  中平均应变  $\langle \gamma^M \rangle$  和平均应力  $\langle \sigma^M \rangle$  的关系为

$$\langle \gamma^M \rangle = C^{-1} \langle \sigma^M \rangle \quad (28)$$

纤维混凝土由4种成分组成:水泥、砂、石和纤维。假定各相体积率为其对应的加权系数,则复合材料的总平均应变场  $\bar{\gamma}$  可由式(25)~(28)得到

$$\begin{aligned} \langle \bar{\gamma} \rangle &= \langle \gamma^0 \rangle + f_1 \langle \gamma^{\Omega_1} \rangle + f_2 \langle \gamma^{\Omega_2} \rangle + f_3 \langle \gamma^{\Omega_3} \rangle + \\ & (1-f_1-f_2-f_3) \langle \gamma^M \rangle = \bar{C}^{-1} \sigma^0 \end{aligned} \quad (29)$$

式中:  $\gamma^0$  为均质复合材料无限远处应力  $\sigma^0$  引起的应变;  $\gamma^{\Omega_1}, \gamma^{\Omega_2}, \gamma^{\Omega_3}$  分别为域  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  内的平均弹性应变。由式(29)可得到弹性柔度  $\bar{C}^{-1}$  平均值,则纤维混凝土弹性模量的张量表达式为

$$\bar{C} = (C^{-1} + f_1 \alpha + f_2 \beta + f_3 \rho)^{-1} \quad (30)$$

## 2 计算结果与讨论

### 2.1 纤维混凝土弹性模量的理论求解

为比较现有模型理论解和试验结果(Simeonov<sup>[11]</sup>),选取如下参数:水泥基体和3种球形夹杂的泊松比分别为  $\nu_m = 0.25, \nu_1 = 0.2, \nu_2 = \nu_3 = 0.3$ 。其中3种球形夹杂随机分布在各向同性无限大基体中。计算时选取3种球形夹杂的弹性模量  $E_1^*, E_2^*, E_3^*$  分别为水泥基体弹性模量  $E_m$  的100、50、50倍。

夹杂的 Eshelby 张量  $S_1, S_2, S_3$  由附录中所给公式得到。通过计算  $C, C_1^*, C_2^*, C_3^*$  并代入式(30),可得到复合材料弹性模量  $\bar{C}$ ,由此可直接导出弹性模量值。图2为以体积率  $f_1, f_2, f_3$  为函数的量纲为1的参数  $\bar{E}/E_m$  曲线,  $\bar{E}$  为素混凝土的弹性模量。

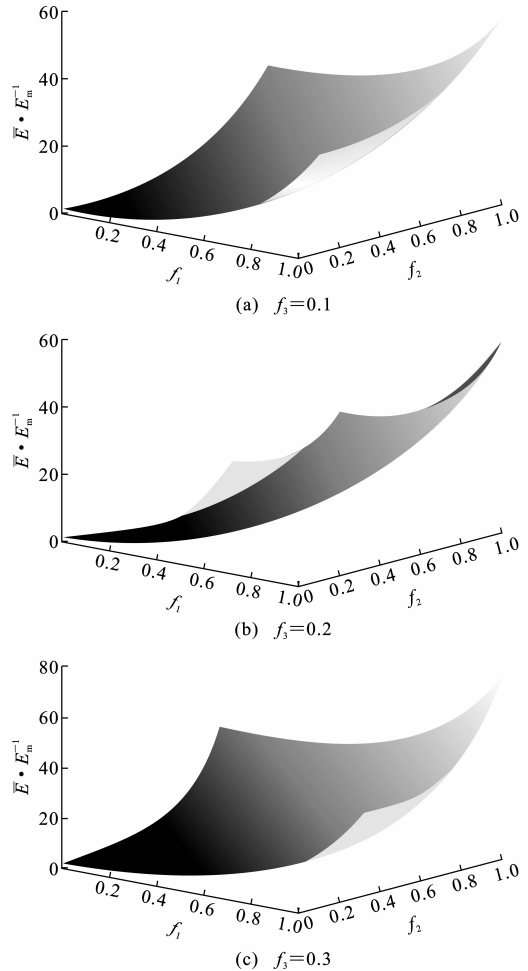


图2 弹性模量与球形夹杂体积率的关系

Fig. 2 Relation of Elastic Moduli vs Volume Fractions of Spherical Inhomogeneities

由图2可以看出,纤维体积率增加则纤维混凝土的弹性模量也增加,此外,水泥基体作为连续相也起重要作用。这证明通过减小水灰比等措施以增加水泥基体弹性模量是增加纤维混凝土弹性模量的最有效方法。

### 2.2 理论解和试验结果的比较

为在相对较广范围内进行比较,选用 Luitfi、Ahmed 和 Anson<sup>[12]</sup> 中水灰比为0.5时水泥和砂浆的试验结果。其中水泥基体的弹性模量  $E_m = 12$  GPa,砂、石、聚合物纤维及钢纤维的弹性模量分别为80、69、10、210 GPa。水泥基体、砂、石和纤维

的泊松比分别为  $\nu_m = 0.22$ 、 $\nu_s = 0.22$ 、 $\nu_g = 0.23$ 、 $\nu_f = 0.3$ 。

选取以下 3 组数据: A 组, 水泥和砂组成砂浆; B 组, 砂浆和石组成素混凝土; C 组, 混凝土和纤维组成纤维混凝土(FRC)。在 A 组中水泥为基体, 砂为增强相(夹杂)。表 1 为砂体积率在 0.322~0.589 区间时砂浆的弹性模量  $E_M$  的值。由表 1 可知: 当砂体积率增加时砂浆的弹性模量也增加, 其范围为 21.9~30.4 GPa。在 B 组中石为增强相而砂浆为基体, 所需砂浆数值可由表 1 得到。

表 1 水泥、砂的体积率与砂浆的弹性模量

Tab. 1 Volume Fractions of Cement, Sand and Elastic Moduli of Mortar

$f_m$	$f_1$	$E_M/\text{GPa}$
0.678	0.322	21.90
0.583	0.417	26.00
0.513	0.487	28.00
0.456	0.544	28.30
0.411	0.589	30.40

表 2 为素混凝土的弹性模量  $\bar{E}$  与石、水泥以及砂体积率的函数关系。

表 2 水泥、砂、石的体积率与素混凝土的弹性模量

Tab. 2 Volume Fractions of Cement, Sand, Gravel and Elastic Moduli of Plain Concrete

$f_m$	$f_1$	$f_2$	素混凝土弹性模量/GPa $[(E_1 - E_s) \cdot E_s^{-1}]/\%$		
			试验值 $E_s$	理论值 $E_l$	
0.373 9	0.446 1	0.18	34.90	32.14	-7.9
0.342 0	0.408 0	0.25	34.20	33.92	-0.8
0.328 3	0.391 2	0.28	35.40	34.73	-1.9
0.319 2	0.380 8	0.30	36.20	35.29	-2.5
0.296 4	0.353 6	0.35	38.60	36.74	-4.8
0.273 6	0.326 4	0.40	39.60	38.28	-3.3

表 3 纤维混凝土弹性模量理论值和试验值

Tab. 3 Theoretical Values and Experimental Values for Elastic Moduli of Fiber Reinforced Concrete

$f_m$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	钢纤维混凝土弹性模量/GPa		聚合物纤维混凝土弹性模量/GPa	
				试验值	理论值	试验值	理论值
0.274 0	0.326 0	0.400 0	0.000	39.60	38.28	39.60	38.28
0.272 6	0.324 4	0.398 0	0.005	39.20	38.00	13.42	13.13
0.271 0	0.322 7	0.394 3	0.010	40.50	40.11	12.43	12.28
0.269 9	0.321 1	0.394 0	0.015	40.20	39.97	12.65	12.53
0.268 5	0.319 5	0.386 1	0.020	41.01	41.00	12.97	12.23

直保持下降趋势。如果纤维体积率大于 0.01, 则弹性模量是纤维体积率的增函数。该现象与使用钢纤维作为增强材料时有所不同, 证明少量的轻质纤维对提高纤维混凝土的弹性模量意义不大。

式(30)为纤维混凝土弹性模量的通解, 如纤维体积率  $f_3=0$  则退化为表 2 所示的素混凝土特例。当骨料(砂、石)体积率增加时, 素混凝土的弹性模量也随之增加。

表 3 为纤维混凝土弹性模量理论解和文献[9]、文献[10]中试验数据的比较, 显然二者吻合较好, 然而理论值总是小于试验值。纤维混凝土中的实际微观结构可能是引起此现象的主要原因, 夹杂之间相互影响会改善水泥基体复合材料的力学性能<sup>[13-15]</sup>。

2.3 纤维混凝土弹性模量影响参数分析

图 3 为纤维混凝土与纤维的弹性模量关系曲线。由图 3 可以看出, 纤维混凝土的弹性模量是纤维弹性模量的增函数。这说明纤维作为增强相有重要作用, 选择合适的纤维是增加纤维混凝土弹性模量的重要途径。

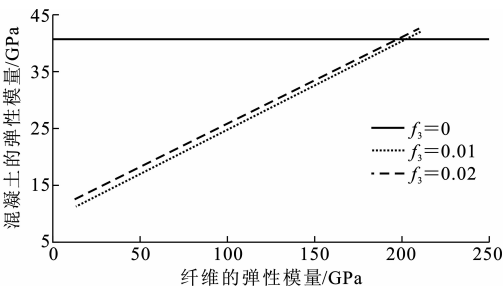


图 3 纤维混凝土与纤维的弹性模量关系曲线

Fig. 3 Relation Curves of Elastic Moduli of Fiber and Fiber Reinforced Concrete

图 4 为钢纤维集中程度对纤维混凝土弹性模量的影响效果。当钢纤维体积率增加时, 纤维混凝土弹性模量明显增加。

图 5 为混凝土和轻质聚合物纤维组成的复合材料中, 当纤维体积率小于 0.01 时, 弹性模量曲线一

3 结 语

(1) 减少水灰比以增加水泥基体的弹性模量是提高纤维混凝土弹性模量的有效途径。

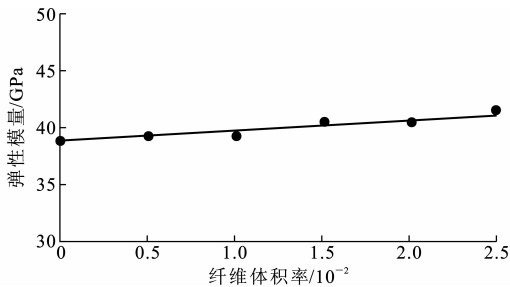


图 4 钢纤维混凝土弹性模量与纤维体积率关系曲线  
Fig. 4 Relation Curves of Elastic Modulus of Steel Fiber Reinforced Concrete and Volume Fraction of Fiber

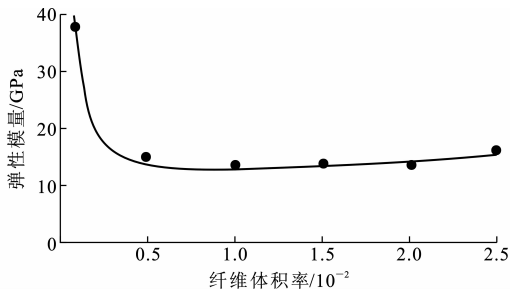


图 5 纤维混凝土弹性模量与聚合物纤维体积率关系曲线  
Fig. 5 Relation Curves of Elastic Modulus of Fiber Reinforced Concrete and Volume Fraction of Polymer Fiber

(2) 尽管理论值的准确程度为试验所证实,但仍需要系统研究骨料和纤维的几何尺寸等参数对纤维混凝土弹性模量的影响。

(3) 当钢纤维体积率增加时,纤维混凝土的弹性模量保持增加。而聚合物纤维则有不同的增强作用:当纤维体积率小于 0.01 时,弹性模量曲线一直保持下降趋势。如果纤维体积率大于 0.01,则弹性模量是纤维体积率的增函数。

参考文献:

References:

[ 1 ] HORI M, NEMAT N S. Double-inclusion Model and Overall Moduli of Multi-phase Composites[J]. Mechanics of Materials, 1993, 14: 189-206.

[ 2 ] VOIGT W. Relation of Elastic Modulus of Isotropical Bodies[J]. Wied Ann, 1889, 38: 573-587.

[ 3 ] REUSS A. Calulation of Yielding Mixed Crystals Plasticity Condition for Single Crystals[J]. Z Angew Math Mech, 1929, 9: 49-58.

[ 4 ] HASHIN Z, SHTRIKMAN S. A Variational Approach to the Elastic Behavior of Multiphase Materials[J]. J Mech Phys Solids, 1963, 11(2): 127-240.

[ 5 ] MORI T, TANAKA K. Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions[J]. Acta Metallurgica, 1973, 21: 571-574.

[ 6 ] ESHELBY J D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems[J]. Proc Roy Soc Lond, 1957, 241: 376-396.

[ 7 ] MURA T. Micromechanics of Defects in Solids[M]. 2nd ed. Boston: Martinus Nijhoff Publishers, 1987.

[ 8 ] CHRISTENSEN R M. A Critical Evaluation for a Class of Micromechanics Models [J]. J Mech Phys Solids, 1990, 38(3): 379-404.

[ 9 ] LUTFI A. Steel Fibrous Cement Based Composites [D]. Stockholm: Royal Institute of Technology, 2004.

[10] AHMED S, JONES F R. A Review of Particulate Reinforcement Theories for Polymer Composites [J]. J Mater Sci, 1990, 25: 4933-4942.

[11] SIMEONOV P, AHMAD S. Effect of Transition Zone on the Elastic Behaviour of Cement-based Composites [J]. Cement and Concrete Research, 1995, 25(1): 165-176.

[12] ANSON M, NEWMAN K. The Effect of Mix Proportions and Method of Testing on Poisson's Ratio for Mortars and Concretes[J]. Magazine of Concrete Research, 1966, 18(1): 115-130.

[13] 李建辉, 张科强, 邓宗才. 粗合成纤维混凝土抗弯冲击强度的分布规律[J]. 建筑科学与工程学报, 2007, 24(4): 54-59.

LI Jian-hui, ZHANG Ke-qiang, DENG Zong-cai. Distribution Regularity of Flexural Impact Resistance of Synthetic Macro-fiber Reinforced Concrete[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2007, 24(4): 54-59.

[14] 何 飞, 袁 勇. PVA 纤维混凝土梁的抗弯性能试验 [J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(2): 34-39.

HE Fei, YUAN Yong. Experiment on Anti-bending Performance of PVA Fiber-reinforced Concrete Beam [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(2): 34-39.

[15] 楼梦麟, 白建方. FRP 加固梁模态分析的摄动解法 [J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(2): 21-24.

LOU Meng-lin, BAI Jian-fang. Perturbation Solution for Modal Characteristics of Beam Strengthened by FRP[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(2): 21-24.