

文章编号:1673-2049(2010)01-0007-05

# 索杆张力结构力密度找形分析方法

陈务军,杜贵首,任小强

(上海交通大学 空间结构研究中心,上海 200030)

**摘要:**根据索杆张力结构体系特征,建立了一种修正的力密度平衡形态分析方法;基于单纯索网体系力密度法,推导出了索杆自平衡体系力密度平衡方程;根据索杆张力结构的自应力模态、机构位移模态、无约束自平衡条件和力密度矩阵数值特征,推导出了力密度矩阵的秩亏条件,并引入力密度和节点向量线性条件约束索杆结构的几何模型;通过高斯变换降秩法得到满足秩亏的降秩力密度矩阵,并由 M-P 广义逆矩阵更新了力密度,迭代计算后得到可行力密度;根据一组独立无关坐标和拓扑关系计算了平衡形态位形,最后采用 VC++ 编程实现了算法。结果表明:该方法适用于索杆张力结构的找形分析,具有一定的正确性和有效性。

**关键词:**索杆张力结构;力密度矩阵;秩亏;可行力密度;M-P 广义逆矩阵

中图分类号:TU345.1

文献标志码:A

## Form-finding Analysis Method of Force Density for Cable-strut Tension Structure

CHEN Wu-jun, DU Gui-shou, REN Xiao-qiang

(Space Structure Research Centre, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** A modified force density method (MFDM) was developed for form-finding analysis due to the inherent characteristics of cable-strut tension structure systems. On the basis of conventional force density method of pure cable-net system, the force density equilibrium equation was formulated for the cable-strut self-equilibrated assembly. Since the cable-strut assembly had self-equilibrium unstressed mechanism, stress mode, free body and the properties of force density matrix, the rank deficiency of the matrix was deduced. The linear constraint of force density and nodal coordinate vector were applied to the analytical model. The deficiency force density matrix could be obtained with the Gaussian transformation deficiency, the updated force density could be got with M-P generalized inverse matrix, and the feasible force density was solved iteratively. The final equilibrated form was calculated with non-dependable nodal coordinate and topology. Finally, the program was developed with VC++. The results show that the proposed method can applied to form-finding analysis of cable-strut tension structure, and the algorithm is correct and available.

**Key words:** cable-strut tension structure; force density matrix; deficiency; feasible force density; M-P generalized inverse matrix

收稿日期:2009-12-11

基金项目:国家自然科学基金项目(50878128);国家自然科学基金项目(50808122)

作者简介:陈务军(1969-),男,重庆市人,教授,博士研究生导师,工学博士,博士后,E-mail:cwj@sztu.edu.cn.

## 0 引言

力密度法是索网和索膜结构找形的最有效方法之一<sup>[1]</sup>, 在各国已得到广泛的应用, 但是, 对索杆组成的张力结构体系(如索穹顶、张拉整体), 由于其动不定、静不定的结构特性, 一般力密度找形方法不适用, 需要进一步改进。Motro<sup>[2]</sup>、Tibert 等<sup>[3]</sup>将力密度应用于张拉整体结构分析, Masic 等<sup>[4]</sup>提出张拉整体不变性相似变换法, Zhang 等<sup>[5]</sup>提出自适应力密度法, Estrada 等<sup>[6]</sup>以力密度矩阵秩最大、单元长度最小为条件, 通过弹性势能最小搜索平衡形态。本文中笔者推导出了索杆自平衡力密度平衡方程, 并建立了求解方法。

## 1 力密度矩阵

在一个三维索杆结构中, 假定自由节点  $i$  与节点  $j, k$  相连, 如图 1 所示。

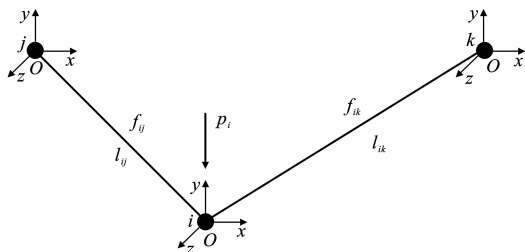


图 1 索杆体系的节点平衡

Fig. 1 Joint Equilibrium of Cable-strut System

索杆体系的节点平衡方程为

$$\begin{cases} (x_i - x_j) f_{ij} / l_{ij} + (x_i - x_k) f_{ik} / l_{ik} = p_{ix} \\ (y_i - y_j) f_{ij} / l_{ij} + (y_i - y_k) f_{ik} / l_{ik} = p_{iy} \\ (z_i - z_j) f_{ij} / l_{ij} + (z_i - z_k) f_{ik} / l_{ik} = p_{iz} \end{cases} \quad (1)$$

对于任意一个连接节点  $i, j$  的单元  $(i, j)$ , 其内力为  $f_{ij}$ , 长度为  $l_{ij}$ ; 作用于节点  $i$  的外荷载为  $p_i$ 。将单元内力和长度的比值表示为  $q_{ij} = f_{ij} / l_{ij}$ , 这就是力密度或张拉系数(力密度的符号: 拉力为正, 压力为负)。式(1)可整理为

$$\begin{cases} (q_{ij} + q_{ik}) x_i - q_{ij} x_j - q_{ik} x_k = p_{ix} \\ (q_{ij} + q_{ik}) y_i - q_{ij} y_j - q_{ik} y_k = p_{iy} \\ (q_{ij} + q_{ik}) z_i - q_{ij} z_j - q_{ik} z_k = p_{iz} \end{cases} \quad (2)$$

用  $x, y, z$  和  $x_f, y_f, z_f$  分别表示自由节点和约束节点在整体坐标系  $x, y, z$  方向的坐标向量,  $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ ,  $x_f, y_f, z_f \in \mathbf{R}^f$ ,  $p_x, p_y, p_z$  表示外荷载向量,  $p_x, p_y, p_z \in \mathbf{R}^n$ ; 令  $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$  表示力密度向量,  $q \in \mathbf{R}^m$ 。用  $u, v, w$  分别表示连接单元 2 个节点的  $x, y, z$  方向上的坐标差向量(投影长度),  $u, v, w$

$\in \mathbf{R}^m$ 。经过推导可得到

$$\begin{cases} D x = p_x - D_f x_f \\ D y = p_y - D_f y_f \\ D z = p_z - D_f z_f \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $D, D_f$  为力密度矩阵,  $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $D_f \in \mathbf{R}^{n_f \times n_f}$ , 其非对角元素为 2 个自由节点连接单元的力密度相反数, 而对角元素则是该列对应节点的所有连接单元的力密度之和。

考虑将自由节点号和约束节点号顺序排列, 则力密度矩阵  $D$  的  $(j, i)$  项元素  $D(j, i)$  为

$$D(j, i) = \begin{cases} \sum_k q_k & j = i \\ -q_k & j \neq i, \text{自由节点 } i, j \\ & \text{由单元 } k \text{ 相连} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

在找形分析时, 节点无外荷载, 仅预张力平衡, 于是式(3)变为

$$\begin{cases} D x = -D_f x_f \\ D y = -D_f y_f \\ D z = -D_f z_f \end{cases} \quad (5)$$

对索网、索膜找形分析, 各单元只受拉力, 即全部单元力密度  $q_k > 0$ , 力密度矩阵  $D$  必然为正定对称矩阵, 则式(5)有惟一解, 可写为

$$\begin{cases} x = -D^{-1} D_f x_f \\ y = -D^{-1} D_f y_f \\ z = -D^{-1} D_f z_f \end{cases} \quad (6)$$

由式(6)可以直接求解出任意全张力体系的自由节点坐标, 从而获得平衡形态。

## 2 索杆体系力密度找形分析方法

索杆张拉整体与索网、索膜的本质区别有两点, 即有受压杆及无约束张力自平衡<sup>[7-8]</sup>, 因此, 式(3)中力密度矩阵非满秩, 不可逆, 一般力密度找形方法不能应用于索杆张拉整体。对索杆张拉整体找形, 力密度矩阵的基本方程式(5)可以写为

$$\begin{cases} D x = 0 \\ D y = 0 \\ D z = 0 \end{cases} \quad (7)$$

### 2.1 力密度矩阵秩亏条件

由力密度矩阵性质可知, 力密度矩阵对角元素为所有非对角元素之和的相反数, 即每一行元素之和为 0, 则向量  $\bar{I}$ (向量  $\bar{I}$  元素都为 1)为力密度矩阵  $D$  的零空间向量,  $\bar{I} \in \mathbf{R}^n$ 。

定义  $x_0, y_0, z_0$  分别为

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \alpha_0^x \bar{\mathbf{I}} \\ y_0 &= \alpha_0^y \bar{\mathbf{I}} \\ z_0 &= \alpha_0^z \bar{\mathbf{I}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中:  $\alpha_0^x, \alpha_0^y, \alpha_0^z$  为任意常数;  $x_0, y_0, z_0$  为式(7)的解。

定义力密度矩阵  $\mathbf{D}$  的秩亏  $h$  为

$$h = n - \text{rank} \mathbf{D} \quad (9)$$

则力密度矩阵  $\mathbf{D}$  有  $h$  个零空间向量。令  $\sigma_i (i=0, 1, 2, \dots, h-1)$  为力密度矩阵  $\mathbf{D}$  的零空间向量, 其中  $\sigma_0 = \bar{\mathbf{I}}$ , 则式(7)的通解可以写为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{h-1} \begin{bmatrix} \alpha_i^x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i^y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_i^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_i \\ \sigma_i \\ \sigma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{h-1} \begin{bmatrix} \alpha_i^x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i^y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_i^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_i \\ \sigma_i \\ \sigma_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

对于三维索杆张拉整体结构, 力密度矩阵  $\mathbf{D}$  的秩亏  $h^* \geq 4$ , 这是由于张拉整体结构必须满足自应力模态、机构位移模态、无约束自平衡条件。

## 2.2 线性约束条件

没有任何支座约束时, 张拉整体在三维空间中可发生任意刚体运动位移, 所以必须在空间上指定 3 个不共面约束点。此处指定节点与索网的力密度法找形分析的约束节点有本质区别, 索网约束节点为支座约束, 而此处的节点为自由节点, 需满足式(7)的运动平衡条件。

另外, 对于不同的张拉整体结构, 还需满足一些特定要求, 如同一类型单元长度一致或单元力密度存在一定的关系。这些条件可以用力密度向量或节点坐标线性表示, 故称为线性约束条件, 用矩阵-向量关系表示为

$$\mathbf{B}_c \mathbf{q} = \mathbf{g}_c \quad (11)$$

式中:  $\mathbf{B}_c$  为约束矩阵;  $\mathbf{g}_c$  为约束函数矩阵。

## 2.3 可行力密度

张拉整体找形分析就是为寻求一组可行力密度使之满足力密度矩阵秩亏要求。任意选取的力密度并不满足要求, 可先给定一组力密度, 然后应用迭代法求解得到可行力密度。由于通常给定力密度所得矩阵  $\mathbf{D}$  的秩亏  $h$  总小于要求秩亏  $h^*$ , 故通过降秩方法迭代。

由于力密度矩阵  $\mathbf{D}$  为对称矩阵, 故可用高斯变换将其变换为

$$\mathbf{D} = \Phi \Lambda \Phi^T \quad (12)$$

式中:  $\Lambda$  为以力密度矩阵  $\mathbf{D}$  的特征值  $\lambda_i$  为对角线元

素的对角矩阵,  $\Lambda \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 且  $\lambda_i$  从小到大顺序排列,  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $\Phi$  为由对应于特征值的特征向量组成的正交矩阵,  $\Phi \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 。

用  $r$  表示力密度矩阵  $\mathbf{D}$  的非正特征值, 当  $r \leq h^*$  时, 可指定力密度矩阵  $\mathbf{D}$  的第 1 个到第  $h^*$  个特征值为 0, 即  $\lambda_i = 0 (i=1, 2, \dots, h^*)$ , 由此可以得到修正后的特征值对角矩阵  $\bar{\Lambda}$ , 再用此矩阵修正平衡矩阵, 有

$$\bar{\mathbf{D}} = \Phi \bar{\Lambda} \Phi^T \quad (13)$$

由此, 通过迭代可以使得力密度矩阵  $\bar{\mathbf{D}}$  具有  $h^*$  个秩亏, 并且没有负特征值。

由于得到更新的力密度矩阵并不一定满足静力平衡条件, 故需要重新更新单元力密度。

假定有  $a$  个单元与节点  $i$  相连, 由式(4)可知力密度矩阵的第  $i$  列  $\bar{\mathbf{D}}_i$  可以用力密度向量  $\mathbf{q}$  与矩阵  $\mathbf{B}_i (\mathbf{B}_i \in \mathbf{R}^{n \times m})$  表示, 即

$$\mathbf{B}_i \mathbf{q} = \bar{\mathbf{D}}_i \quad (14)$$

矩阵  $\mathbf{B}_i$  的  $(j, k)$  项元素  $B_i(j, k)$  为

$$B_i(j, k) = \begin{cases} 1 & j=i, k=a \\ -1 & \text{节点 } i \text{ 和 } j \text{ 以} \\ & \text{单元 } k \text{ 相连} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (15)$$

令  $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1^T, \dots, \mathbf{B}_i^T, \dots, \mathbf{B}_n^T)^T$ ,  $\mathbf{g} = (\bar{\mathbf{D}}_1^T, \dots, \bar{\mathbf{D}}_i^T, \dots, \bar{\mathbf{D}}_n^T)^T$ , 则力密度矩阵  $\bar{\mathbf{D}}$  与力密度向量  $\mathbf{q}$  之间的关系为

$$\mathbf{B} \mathbf{q} = \mathbf{g} \quad (16)$$

由上述矩阵  $\mathbf{B}$  的定义可知, 对于任意的  $k (k=1, 2, \dots, m)$ , 矩阵中总是有一列, 其第  $k$  个元素为  $-1$ , 而其他元素为 0, 因此矩阵  $\mathbf{B}$  的秩为  $m$ , 即  $\mathbf{B}$  为列满秩矩阵。

与此类似, 线性约束条件也可以表示为力密度的函数, 用矩阵-向量关系表示, 具体形式见式(11)。

令  $\bar{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}^T, \mathbf{B}_c^T)^T$ ,  $\bar{\mathbf{g}} = (\mathbf{g}^T, \mathbf{g}_c^T)^T$ , 则联立式(11)、(16)得

$$\bar{\mathbf{B}} \mathbf{q} = \bar{\mathbf{g}} \quad (17)$$

矩阵  $\mathbf{B}$  列满秩, 故矩阵  $\bar{\mathbf{B}}$  也列满秩, 存在 M-P 广义逆矩阵  $\bar{\mathbf{B}}^+$ , 则力密度向量  $\mathbf{q}$  为

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{B}}^+ \bar{\mathbf{g}} \quad (18)$$

由此可求得更新的力密度矩阵  $\bar{\mathbf{D}}$ , 经过迭代就可得出满足力密度矩阵秩亏条件的可行力密度。

## 2.4 节点坐标求解

由式(6)、(10)可得

$$\left. \begin{aligned} x &= \mathbf{G} \alpha_x \\ y &= \mathbf{G} \alpha_y \\ z &= \mathbf{G} \alpha_z \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中: $\mathbf{G}$ 为用力密度矩阵 $\mathbf{D}$ 的零空间向量构成的解空间, $\mathbf{G} \in \mathbf{R}^{n \times h^*}$ ;  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ 分别为节点坐标的 $x, y, z$ 方向上的分量与力密度矩阵 $\mathbf{D}$ 的零空间矩阵 $\mathbf{G}$ 的线性相关系数向量,  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z \in \mathbf{R}^{h^*}$ 。

如果指定 $h^*$ 个线性无关的节点坐标,用向量分别表示为 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ,这些向量同样满足式(20)的条件,将这些节点在零空间矩阵 $\mathbf{G}$ 中的对应项表示为 $\bar{\mathbf{G}}$ ,  $\bar{\mathbf{G}} \in \mathbf{R}^{h^* \times h^*}$ ,则有

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \bar{\mathbf{G}} \alpha_x \\ \bar{y} &= \bar{\mathbf{G}} \alpha_y \\ \bar{z} &= \bar{\mathbf{G}} \alpha_z \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

由于指定的节点坐标为线性无关,故其对应的零空间矩阵 $\bar{\mathbf{G}}$ 为满秩,则式(20)可变为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \bar{\mathbf{G}}^{-1} \bar{x} \\ \alpha_y &= \bar{\mathbf{G}}^{-1} \bar{y} \\ \alpha_z &= \bar{\mathbf{G}}^{-1} \bar{z} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由此,式(21)可直接求解得

$$\left. \begin{aligned} x &= \mathbf{G} \alpha_x = \mathbf{G} \bar{\mathbf{G}}^{-1} \bar{x} \\ y &= \mathbf{G} \alpha_y = \mathbf{G} \bar{\mathbf{G}}^{-1} \bar{y} \\ z &= \mathbf{G} \alpha_z = \mathbf{G} \bar{\mathbf{G}}^{-1} \bar{z} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

由式(22)可求得索杆张拉整体结构找形分析平衡形态的节点坐标。

3 算例分析

3.1 旋转抛物面索网曲面

旋转面中惟一有解析解的极小曲面是旋转抛物面,如图2所示,其顶部内径为20 m,底外径为100 m,高度为22.924 3 m,其解析式为

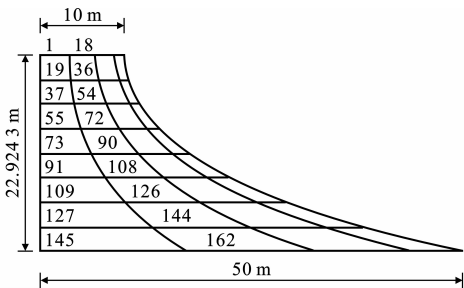


图2 初始旋转抛物面索网

Fig. 2 Initial Rotating Paraboloidal Cable-net

$$z = 22.924\ 3 - 10[\ln(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 10^2}) - \ln 10] \quad (23)$$

找形时,将每个环向索分为18段,有18根径向索,则索单元个数为270,节点数为162;约束节点位于内外环向索上,内环索为高点,约束节点的 $z$ 方向坐标为22.924 3 m,外环索为低点,约束节点的 $z$ 方

向坐标为0。在给定力密度信息时,考虑到旋转抛物面的环向索和径向索的刚度要求存在差别,设定两者的力密度的比例为1:1.5,找形结果如图3所示。因旋转抛物面对称,取1根径向索节点,节点坐标如表1所示。

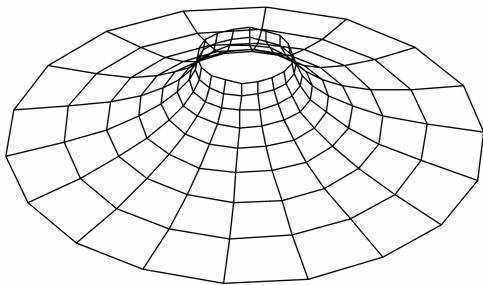


图3 旋转抛物面索网找形结果

Fig. 3 Form-finding Configuration of Rotating Paraboloidal Cable-net

表1 旋转抛物面索网找形后的节点坐标

Tab. 1 Nodal Coordinates of Rotating Paraboloidal Cable-net After Form-finding

节点编号	$x/\text{m}$	$y/\text{m}$	$z/\text{m}$	$z$ 的解析解/ $\text{m}$	$z$ 的绝对误差/ $\text{m}$	$z$ 的相对误差/ $\%$
19	10.493 5	0.000 0	20.058 8	19.795 4	0.263 4	0.013 1
37	11.830 9	0.000 0	17.193 2	16.961 7	0.231 5	0.013 5
55	14.119 5	0.000 0	14.327 7	14.133 2	0.194 5	0.013 6
73	17.543 5	0.000 0	11.462 1	11.306 0	0.156 1	0.013 6
91	22.378 1	0.000 0	8.596 6	8.479 2	0.117 4	0.013 7
109	29.012 2	0.000 0	5.731 1	5.652 7	0.078 4	0.013 7
127	37.979 2	0.000 0	2.865 5	2.826 3	0.039 2	0.013 7

3.2 双层张拉整体结构

如图4所示,双层张拉整体有12个节点30个单元。6根压杆(粗线)分为上层杆、下层杆;24根索(细线)分为多边形索(上下2个正三角形)、鞍索、纵向索、对角线索。将12个节点分3层,上下2个为多边形角点,中间为异面六边形角点,每个点有4根索和1根杆连接。

在找形分析前,给出各单元节点间的拓扑关系,指定一组初始力密度为 $\{-10, -10, 10, 10, 10, 10\}$ ,求得的可行力密度为 $\{-15.586\ 2, -15.586\ 2, 1.039\ 08, 10.390\ 8, 10.390\ 8, 10.390\ 8\}$ ;指定一组相互独立的节点坐标(A11、A21、A31、A32),最后计算出找形平衡形态,节点坐标见表2。

4 结 语

力密度法在索网、索膜全张力体系找形分析时,

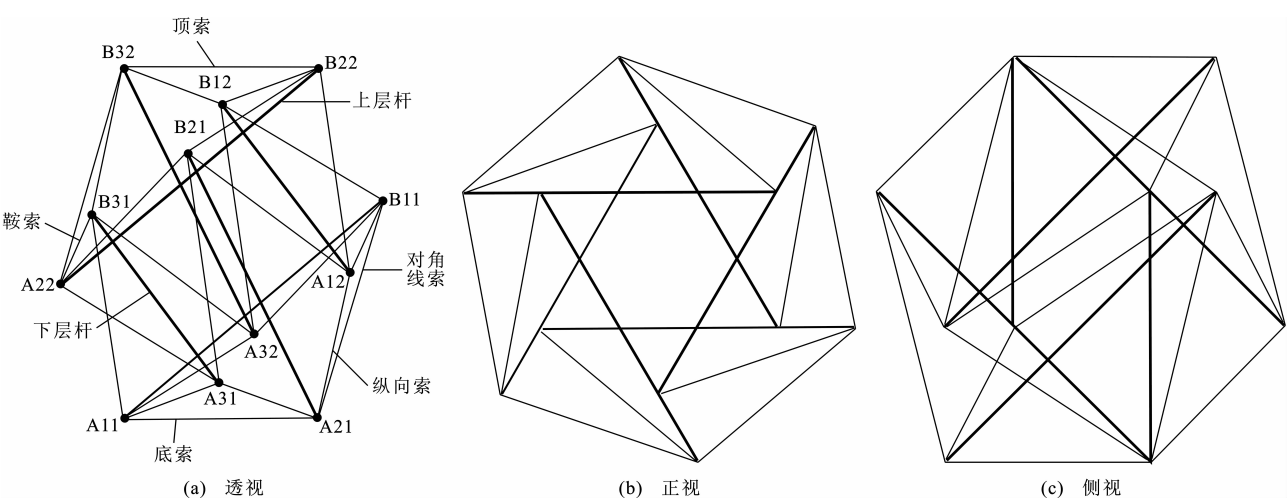


图 4 双层张拉整体结构

Fig. 4 Double-layer Tensegrity Integral Structure

表 2 双层张拉整体结构找形后的节点坐标

Tab. 2 Nodal Coordinate of Double-layer Tensegrity Integral Structure After Form-finding

节点 编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x/m$	-2.598 1	2.598 1	0.000 0	4.330 3	-0.865 9	-3.464 0	3.464 2	-4.330 1	0.866 1	0.000 2	2.598 3	-2.597 9
$y/m$	-1.500 0	-1.500 0	3.000 0	-1.500 0	4.500 0	-3.000 0	3.000 0	1.500 0	-4.500 0	-3.000 0	1.500 0	1.500 0
$z/m$	0.000 0	-0.000 0	0.000 0	6.000 0	6.000 0	6.000 0	3.000 0	3.000 0	3.000 0	9.000 0	9.000 0	9.000 0

只需给定拓扑关系、约束条件和力密度。在索杆张拉整体找形分析时,因结构处于自平衡状态,单元应力为自应力(有拉压力),无外部约束,力密度矩阵非满秩,故不能应用一般力密度找形方法。本文中建立了修正力密度方法,推导出了适用于索杆张力体系的找形分析式,最后编程实现,通过算例验证了该方法的有效性。

参考文献:

References:

[1] SCHEK H J. The Force Density Method for Form Finding and Computation of General Network[J]. Computer Methods Applied Mechanics and Engineering, 1974, 3(1): 115-134.

[2] MOTRO R. Tensegrity: Structural Systems for the Future[M]. London: Butterworth-Heinemann, 2003.

[3] TIBERT A G, PELLEGRINO S. Review of Form-finding Methods for Tensegrity Structures[J]. International Journal of Space Structures, 2003, 18(4): 209-223.

[4] MASIC M, SKELTON R E, GILL P E. Algebraic Tensegrity Form-finding[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(16/17): 4833-4858.

[5] ZHANG J Y, OHSAKI M. Adaptive Force Density Method for Form-finding Problem of Tensegrity Structures[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(18/19): 5658-5673.

[6] ESTRADA G G, BUNGARTZ H J, MOHRDIECK C. Numerical Form-finding of Tensegrity Structures[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(22/23): 6855-6868.

[7] 许世展, 贺拴海, 盖轶婷. 基于索鞍无预偏施工悬索桥的施工仿真[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2007, 27(1): 35-39.

XU Shi-zhan, HE Shuan-hai, GAI Yi-ting. Construction Simulation for Suspension Bridge with Non-pre-bias of Cable Saddle[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2007, 27(1): 35-39.

[8] 刘来君, 贺拴海. 索鞍无预偏施工悬索桥主缆的温度效应[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2007, 27(1): 40-44.

LIU Lai-jun, HE Shuan-hai. Temperature Effect on Suspension Bridge with Non-pre-bias of Cable-saddle [J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2007, 27(1): 40-44.