

文章编号:1673-2049(2010)04-0069-09

# 基于一次二阶矩可靠度指标的车辐式结构 索长误差控制限值研究

郭彦林,田广宇,张博浩,王 昆

(清华大学 土木工程系,北京 100084)

**摘要:**推导了中心对称车辐式结构索力变化与索长误差的关系;基于可靠度理论,提出了一种通过控制一次二阶矩可靠度指标确定拉索索长误差限值的方法;结合深圳宝安体育场车辐式结构,给出了制索过程中索长的控制标准。研究表明:所提出的方法能够为车辐式结构的制作加工提供依据,保证初始预应力态索力的精度;控制拉索制作安装中的索长误差对于采用定尺定长设计与张拉的车辐式结构有重要指导作用。

**关键词:**车辐式结构;误差;一次二阶矩;可靠度指标;索长

**中图分类号:**TU323.8 **文献标志码:**A

## Research on Deviation Control of Cable's Length in Spoke Structures Based on First-order-second-moment Reliability Index

GUO Yan-lin, TIAN Guang-yu, ZHANG Bo-hao, WANG Kun

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** Relation between the changes of cable forces of centrosymmetric spoke structures and the deviation of cable's length was achieved; based on the reliability theory, a method for controlling deviation in cable's length was proposed by limiting the first-order-second-moment reliability index; and criteria of control deviation in cable's length were made for spoke structural roof of Bao'an Stadium of Shenzhen. The study results show that this method can offer standards for producing cables of spoke structures, and can assure the accuracy of cable forces at the initial prestress state. Deviation control of cable's length in manufacturing process is significant to the construction process of spoke structure designed and tensioned in fixed size and length.

**Key words:** spoke structure; deviation; first-order-second-moment; reliability index; cable's length

## 0 引言

车辐式结构是一种由索桁架构成的空间结构,常用于体育场馆的屋盖。作为一种柔性结构,车辐式结构的刚度来自于拉索的预应力。以往是通过千斤顶张拉,配合拉索索头可调节套筒的旋转角度来

改变索长,以达到设计的预应力,但是对于拉索数量多、互相影响复杂的索系而言,每根拉索索长变化都会影响到其他拉索的预应力分布。用这种在施工现场调节索长的方法进行张拉,无法一次将拉索预应力调节到设计值,需要反复迭代,工作量非常大,几乎难以实现。郭彦林等在深圳宝安体育场施工中,

收稿日期:2010-11-07

基金项目:教育部高等学校博士学科点专项科研基金项目(20060003045)

作者简介:郭彦林(1958-),男,陕西富平人,教授,博士研究生导师,工学博士,E-mail:gyl@tsinghua.edu.cn。

提出了一种定尺定长设计与施工的方法<sup>[1]</sup>。该方法是:拉索索头在加工时,设计成不可调节的形式;拉索施工时,直接将索头与锚固端相连。这样,对拉索预应力的控制,就限于在加工厂对拉索索长的控制和在施工安装现场对锚固端位置的控制。将拉索制作误差控制在什么范围,目前尚无成熟的理论,而这又是工程施工和验收所必需的基准。本文中笔者将探讨定尺定长设计与施工现场的拉索索长误差控制限值的确定方法。

一些学者利用可靠度理论对误差敏感性进行了分析。张丽梅<sup>[2]</sup>和蒋本卫<sup>[3]</sup>通过人为对索杆长度误差最大值进行排列组合的方法研究了结构性能对误差的敏感性。尤德清等<sup>[4]</sup>、徐茂波等<sup>[5]</sup>用 Monte Carlo 方法,Gao 等<sup>[6]</sup>用正交试验法研究了结构性能对某些参数的敏感性。此外,郭彦林等<sup>[7]</sup>研究了车辐式结构力学性能受施工随机误差影响的包络线。

本文中笔者首先介绍一次二阶矩可靠度指标  $\beta$  的基本概念,然后在线弹性、小变形的假设下推导了车辐式结构索长误差与索力变化的关系,得到了线性索力变化量的临界状态方程,并提出了一种采用有限元软件 ANSYS 计算临界状态方程系数矩阵的方法。通过可靠度指标  $\beta$  确定索长的概率分布特性,从而得到索长制作误差限值。

## 1 可靠度指标

Cornell<sup>[8]</sup>定义了可靠度指标  $\beta$  表征随机变量的期望和方差之比。Hasofer 等<sup>[9]</sup>通过将随机变量转化为标准正态分布揭示了可靠度指标  $\beta$  的几何意义是原点到临界状态曲线的最短距离,从而提出了验算点法。Rackwitz 等<sup>[10]</sup>提出了迭代求解验算点的方法。Ditlevsen<sup>[11-12]</sup>发展了二阶矩可靠度指标的概念,并提出了将非线性临界状态曲线在验算点展开为直线的方法。此外,Karamchandani 等<sup>[13]</sup>和 Madsen 等<sup>[14]</sup>也提出了对可靠度指标进行改进的计算方法。张新培<sup>[15]</sup>用线性化的方法表示了索网结构的基本方程,用索力和位移的均值和方差表示了可靠度指标  $\beta$ 。

设结构的抗力为  $R$ ,荷载为  $S$ , $R$  与  $S$  均为相互独立的正态分布随机变量。 $R$  的期望为  $\mu_R$ ,方差为  $\sigma_R$ ;  $S$  的期望为  $\mu_S$ ,方差为  $\sigma_S$ 。结构的状态方程  $G$  为

$$G=R-S \quad (1)$$

当  $G>0$  时,结构是安全的;当  $G<0$  时,结构不安全;当  $G=0$  时,结构为临界状态。

可靠度指标  $\beta$  的定义为

$$\beta=(\mu_R-\mu_S)/\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2} \quad (2)$$

如果以  $\bar{R}=R/\sigma_R$  和  $\bar{S}=S/\sigma_S$  为坐标轴,则临界状态方程  $G=0$  变为

$$\bar{G}=\bar{R}\sigma_R-\bar{S}\sigma_S=0 \quad (3)$$

$R$  与  $S$  的期望值点  $M$  的坐标为  $(\mu_R/\sigma_R, \mu_S/\sigma_S)$ ,如图 1 所示。 $\beta$  的几何意义就是点  $M$  到直线  $\bar{G}=0$  的最短距离,点  $M$  到直线  $\bar{G}=0$  的垂足  $N$  叫做验算点。

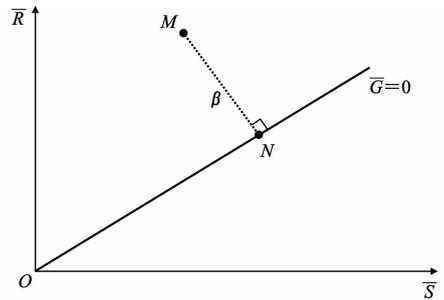


图 1 可靠度指标的几何意义

Fig. 1 Geometry Sense of Reliability Index

如果结构的状态方程含有  $n$  个独立的随机变量  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ ,  $Z_i$  的均值和方差分别为  $\mu_{Z_i}$  和  $\sigma_{Z_i}$ , 则结构状态方程和可靠度指标变成<sup>[16]</sup>

$$G(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i Z_i \quad (4)$$

$$\beta = (a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{Z_i}) / \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i \sigma_{Z_i})^2} \quad (5)$$

如果  $G(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)=0$  是一个非线性方程, 则可以通过迭代求出随机变量的期望值点  $M$  到非线性方程  $G(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)=0$  的最短距离。如果  $Z_i$  之间不是相互独立的, 而是有相关性, 则还要引入协方差矩阵来表达可靠度指标  $\beta$ 。

## 2 索长误差限值计算原理

以下论述基于两点假定:第 1, 随机变量符合正态分布且相互独立;第 2, 结构处于线弹性状态, 发生的变形均为小变形。关于第 1 点假设说明如下: 由于拉索是独立制作的, 无相关性, 且每个误差对于整体误差分布模式的影响有限。根据林德伯格-莱维定理<sup>[17]</sup>, 索长误差是近似正态分布的。

对于状态方程式(1)和式(5)的正态分布随机变量, 结构可靠度指标  $\beta$  可以用来计算结构的失效概率  $P_f$ , 即

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (6)$$

式中:  $\Phi(\cdot)$  为标准正态分布概率函数。

要保证结构失效概率满足  $P_f = \Phi(-\beta) \leq \bar{P}_f = \Phi(-\bar{\beta})$ , 其中  $\bar{\beta}$  和  $\bar{P}_f$  分别为设计要求达到的可靠度指标和容许失效概率, 则可以求得  $\beta \geq \bar{\beta}$ 。因为  $\beta$  可以通过式(2)计算, 所以通过控制  $R$  与  $S$  的期望和方差保证结构的失效概率小于某特定值。

假设一个结构有  $n$  根拉索, 第  $i$  根拉索的索长误差为随机变量  $Z_i \sim N(0, \sigma_{z_i}^2)$ ,  $Z_i$  与  $Z_j$  互不相关 ( $i \neq j$ )。如果能够得到第  $i$  根拉索索力变化  $\Delta F_i$  与索长误差  $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  的关系, 那么就可以列出下面的临界状态方程

$$G_i(Z) = \Delta \bar{F}_i - \Delta F_i = 0 \quad (7)$$

式中:  $\Delta \bar{F}_i$  为索力容许偏差。

对于每一根拉索, 式(7)都对应一个可靠度指标  $\beta_i$ 。整个结构是一个串联系统, 可靠度指标  $\beta$  应当等于  $\beta_i$  中的最小值, 即  $\beta = \min\{\beta_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 。只要保证  $\min\{\beta_i\} \geq \bar{\beta}$ , 就可以保证结构的失效概率小于某特定值。  $\beta_i$  为  $\{\sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}, \dots, \sigma_{z_n}\}$  的函数, 从而可以确定  $\{\sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}, \dots, \sigma_{z_n}\}$  的范围, 用这一组  $\{\sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}, \dots, \sigma_{z_n}\}$  就可以控制拉索制作误差。

由于拉索的索长误差与整个结构的尺寸相比非常小, 从无误差到有误差的变化不会引起很强的非线性, 所以本文中在线弹性、小变形的假定下推导索力变化  $\Delta F_i$  与索长误差  $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  的关系, 希望得到一组线性表达式, 从而省去计算可靠度指标的迭代过程。下面以具有 2 个随机变量的平面索桁架说明推导索力变化  $\Delta F_i$  和确定拉索制作误差的基本过程。

某平面索桁架(图 2)两端在竖直方向受到约束, 水平方向由 2 个刚度为  $k_r$  的弹簧拉住。上、下径向索的长度分别为  $L_1$  和  $L_2$ , 截面刚度分别为  $E_1 A_1$  和  $E_2 A_2$ , 它们与水平方向的夹角分别为  $\theta_1$  和  $\theta_2$ 。则上、下径向索的等效水平刚度  $k_{c1}$  和  $k_{c2}$  可以由式(8)和式(9)确定

$$k_{c2} = \frac{E_2 A_2 \cos^2 \theta_2}{L_2} \quad (9)$$

现假定除了索 1 和索 2 以外, 其他索的长度都不存在误差。索 1 的索长误差为  $\delta_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$ , 那么由于该索的索长误差引起的两侧弹簧伸缩量分别为  $d_1$  和  $d_2$ 。飞柱两端的水平位移分别为  $d_3$  和  $d_4$ 。忽略飞柱的轴向伸缩, 其上、下端的竖直位移为  $d_5$ 。以上变量均规定以使右侧上径向索索力增加为正。变形后的位形如图 2 中虚线所示。

如果索 1 不受其他索和弹簧的约束, 那么其两端点的相对水平位移  $\Delta_1$  为

$$\Delta_1 = \delta_1 / \cos \theta_1 \quad (10)$$

因实际上索 1 是无法自由变形的, 对于右侧弹簧而言, 水平方向力的增量存在以下平衡关系

$$k_{c1}(\Delta_1 - d_1 - d_3 - d_5 \tan \theta_1) + k_{c2}(-d_1 + d_4 + d_5 \tan \theta_2) = k_r d_1 \quad (11)$$

左侧弹簧存在以下水平方向的力平衡关系

$$k_{c1}(d_3 - d_2 - d_5 \tan \theta_1) + k_{c2}(-d_2 - d_4 + d_5 \tan \theta_2) = k_r d_2 \quad (12)$$

飞柱上、下两端点水平方向的力平衡关系为

$$k_{c1}(\Delta_1 - d_1 - d_3 - d_5 \tan \theta_1) = k_{c1}(d_3 - d_2 - d_5 \tan \theta_1) \quad (13)$$

$$k_{c2}(-d_1 + d_4 + d_5 \tan \theta_2) = k_{c2}(-d_2 - d_4 + d_5 \tan \theta_2) \quad (14)$$

飞柱竖直方向的力平衡关系为

$$[k_{c1}(\Delta_1 - d_1 - d_3 - d_5 \tan \theta_1) + k_{c2}(-d_1 + d_4 + d_5 \tan \theta_2)] / \cot \theta_1 = [k_{c1}(d_3 - d_2 - d_5 \tan \theta_1) + k_{c2}(-d_2 - d_4 + d_5 \tan \theta_2)] / \cot \theta_2 \quad (15)$$

由式(11)~(15)可以解得

$$d_1 = \frac{k_{c1} \Delta_1 (m + n \tan \theta_1)}{2[mk_r + k_{c1} k_{c2} (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)^2]} \quad (16)$$

$$d_5 = \frac{k_{c1} \Delta_1}{2m} \left[ \tan \theta_1 + \frac{n(m + n \tan \theta_1)}{mk_r + k_{c1} k_{c2} (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)^2} \right] \quad (17)$$

$$m = k_{c2} \tan^2 \theta_2 + k_{c1} \tan^2 \theta_1 \quad (18)$$

$$n = k_{c2} \tan \theta_2 - k_{c1} \tan \theta_1 \quad (19)$$

索 1 的长度误差  $\delta_1$  引起的索 1 和索 2 的内力变化值  $\Delta F_{c1,1}$  和  $\Delta F_{c2,1}$  分别为

$$\Delta F_{c1,1} = \frac{k_{c1}(\Delta_1 - d_1 - d_3 - d_5 \tan \theta_1)}{\cos \theta_1} \quad (20)$$

$$\Delta F_{c2,1} = \frac{k_{c2}(-d_1 + d_4 + d_5 \tan \theta_2)}{\cos \theta_2} \quad (21)$$

根据叠加原理, 由索长误差  $\delta_1$  和  $\delta_2$  引起的内

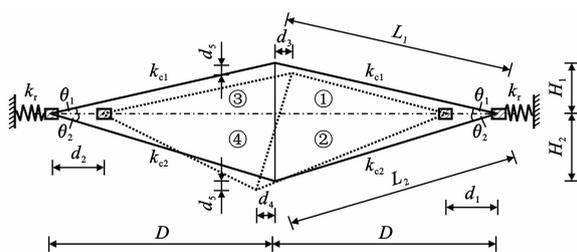


图 2 平面索桁架的计算模型

Fig. 2 Calculation Model of Plane Cable Truss

$$k_{c1} = \frac{E_1 A_1 \cos^2 \theta_1}{L_1} \quad (8)$$

力变化  $\Delta F_1$  和  $\Delta F_2$  分别为

$$\Delta F_1 = |\Delta F_{c1,1} + \Delta F_{c1,2}| = |a_{11}\delta_1 + a_{12}\delta_2| \quad (22)$$

$$\Delta F_2 = |\Delta F_{c2,1} + \Delta F_{c2,2}| = |a_{21}\delta_1 + a_{22}\delta_2| \quad (23)$$

式中:系数  $a_{ij}$  为第  $j$  根索的索长误差对第  $i$  根索的影响。

结构的临界状态方程为

$$G_1(\delta_1, \delta_2) = \Delta \bar{F}_1 - \Delta F_1 = 0 \quad (24)$$

$$G_2(\delta_1, \delta_2) = \Delta \bar{F}_2 - \Delta F_2 = 0 \quad (25)$$

式中: $\Delta \bar{F}_1$ 、 $\Delta \bar{F}_2$  为根据力学性能提出的索力容许偏差,取正值。

在以  $\delta_1/\sigma_1$  和  $\delta_2/\sigma_2$  为轴的坐标系中,式(24)和式(25)分别变为  $\bar{G}_1=0$  和  $\bar{G}_2=0$  的形式。如图3所示,阴影区域为失效区域。 $\bar{G}_1=0$  和  $\bar{G}_2=0$  的可靠度指标  $\beta_1$  和  $\beta_2$  分别为

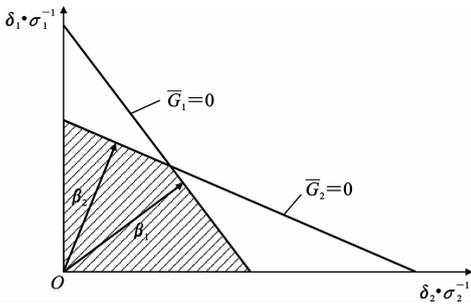


图3 可靠度指标

Fig. 3 Reliability Index

$$\beta_1 = \frac{\Delta \bar{F}_1}{\sqrt{a_{11}^2 \sigma_1^2 + a_{12}^2 \sigma_2^2}} \quad (26)$$

$$\beta_2 = \frac{\Delta \bar{F}_2}{\sqrt{a_{21}^2 \sigma_1^2 + a_{22}^2 \sigma_2^2}} \quad (27)$$

式中: $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  为随机变量的方差。

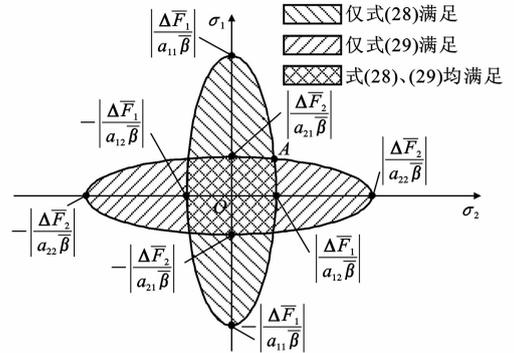
$\min\{\beta_1, \beta_2\} \geq \bar{\beta}$  等价于  $\{\beta_1 \geq \bar{\beta}\} \cap \{\beta_2 \geq \bar{\beta}\}$ , 这2个不等式的解分别为

$$\frac{a_{11}^2 \sigma_1^2}{(\Delta \bar{F}_1 / \bar{\beta})^2} + \frac{a_{12}^2 \sigma_2^2}{(\Delta \bar{F}_1 / \bar{\beta})^2} \leq 1 \quad (28)$$

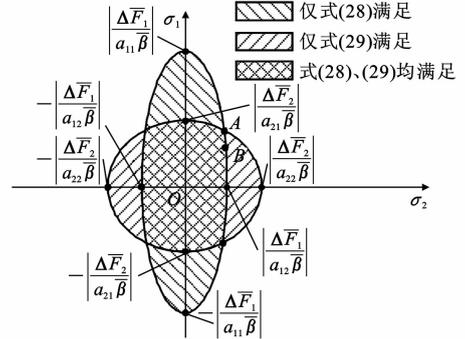
$$\frac{a_{21}^2 \sigma_1^2}{(\Delta \bar{F}_2 / \bar{\beta})^2} + \frac{a_{22}^2 \sigma_2^2}{(\Delta \bar{F}_2 / \bar{\beta})^2} \leq 1 \quad (29)$$

式(28)、(29)在图中表示为2个椭圆形区域,如图4(a)所示,重叠的区域就是满足  $\min\{\beta_1, \beta_2\} \geq \bar{\beta}$  的区域,落在该区域内的点  $(\sigma_1, \sigma_2)$  能够保证结构的可靠度。

显然,点  $(\sigma_1, \sigma_2)$  距离原点越近,结构的可靠度越高。但是由于生产加工总是存在误差,点  $(\sigma_1, \sigma_2)$  不可能位于原点,并且距离原点越近,生产加工的成本和难度就越高,所以当2个椭圆的形状较为近似时[图4(a)],点A作为点  $(\sigma_1, \sigma_2)$  的临界位置可以使



(a) 2个椭圆形状近似



(b) 2个椭圆形状差别较大

图4 方差的安全区域

Fig. 4 Safe Areas of Variance

得  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  较接近,便于生产控制。此时方差  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  分别为

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{a_{12}^2 \Delta \bar{F}_2^2 - a_{22}^2 \Delta \bar{F}_1^2}{\beta^2 (a_{12}^2 a_{21}^2 - a_{11}^2 a_{22}^2)}} \quad (30)$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{a_{21}^2 \Delta \bar{F}_1^2 - a_{11}^2 \Delta \bar{F}_2^2}{\beta^2 (a_{12}^2 a_{21}^2 - a_{11}^2 a_{22}^2)}} \quad (31)$$

当式(28)、(29)代表的2个椭圆形状相差较大时[图4(b)],如果依然选择椭圆的边界交点A,则可能导致  $\sigma_1$  较大,  $\sigma_2$  较小,这对于制作加工控制是不利的。那么可以选择一个椭圆边界上的点B,该点是式(28)与直线  $\sigma_1 = \sigma_2$  的交点。 $\sigma_1$  与  $\sigma_2$  可以按照式(32)求出

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{\frac{\Delta \bar{F}_1^2}{\beta^2 (a_{11}^2 + a_{12}^2)}} \quad (32)$$

如果点B是式(29)与直线  $\sigma_1 = \sigma_2$  的交点,也可以联立方程得到类似的结果。

假设工厂加工的合格率为  $\bar{P}$ ,那么第  $i$  根拉索最大长度误差限值  $\delta_{i\max}$  为

$$\delta_{i\max} = \sigma_i \Phi^{-1}(\bar{P}) \quad i=1,2 \quad (33)$$

式中: $\sigma_i$  为随机变量的方差。

本节用平面索桁架说明了确定误差控制限值的方法。这个例子具有2个随机变量,状态方程是可以图的形式表示出来的,如果随机变量数目增加,

就无法用图的形式表示了。

下面总结一下确定误差控制限值的步骤:

(1)确定结构的失效概率,根据式(6)求出可靠度指标 $\bar{\beta}$ 。

(2)获得临界状态方程,如式(4)所示。

(3)用式(5)确定可靠度指标 $\beta$ 的表达式。

(4)按照式(28)~(32)的过程确定随机变量的方差 $\sigma_i$ 。

(5)用式(33)确定随机变量的最大限值 $\delta_{i\max}$ 。

$\delta_{i\max}$ 和 $\sigma_i$ 就是误差控制的限值。现以一个平面索桁架的算例具体说明。

算例1:如图2所示的平面索桁架, $D=60\text{ m}$ , $H_1=15\text{ m}$ , $H_2=20\text{ m}$ 。拉索截面面积为 $0.0001\text{ m}^2$ ,飞柱截面面积为 $0.01\text{ m}^2$ ,弹簧刚度为 $4.692\times 10^7\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ ,设计初始预应力态的上径向索内力为 $100\text{ kN}$ ,下径向索内力为 $76.696\text{ kN}$ 。按照式(22)、(23)计算索1和索2的内力变化与索长误差的关系。表1为式(22)、(23)中的系数 $a_{11}$ 、 $a_{12}$ 、 $a_{21}$ 、 $a_{22}$ 的理论解和采用有限元软件ANSYS求得的解的比较。图5为 $\Delta F_{c1,1}$ 、 $\Delta F_{c2,1}$ 、 $\Delta F_{c1,2}$ 、 $\Delta F_{c2,2}$ 与 $\delta_1$ 、 $\delta_2$ 的关系。

表1 临界状态方程系数

Tab. 1 Coefficients of Limit State Equation

系数	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$
理论解/ ( $10^5\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ )	1.026 8	0.787 5	0.787 5	0.604 0
有限元解/ ( $10^5\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ )	1.055 4	0.752 5	0.750 5	0.652 0
相对误差/%	2.71	-4.65	-4.93	-7.36

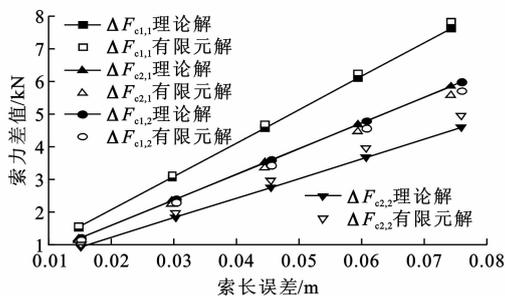


图5 理论解与有限元解的比较

Fig. 5 Comparisons of Theoretical Solutions and Finite Element Solutions

从表1可以看出,本文中推导的公式与有限元计算结果非常接近。从图5可以看出,索力差值与索长误差呈线性关系,其有限元计算得到的索力差值与理论公式非常接近。以上两点为车辐式结构索长误差控制方法提供了依据。

假设容许失效概率为 $0.0001\%$ ,索力容许偏差为设计值的 $5\%$ ,索的合格率为 $99.87\%$ , $\Phi(-\beta)\leq 10^{-6}$ ,可以求得 $\beta\geq\bar{\beta}=4.753$ 。由表1中的临界状态方程系数按照式(30)、(31)计算得到 $\sigma_1=0.00813$ , $\sigma_2=0.00812$ ,用这个方差控制索长制作的索最大误差限值为 $\delta_{1\max}=\delta_{2\max}=0.024\text{ m}$ 。

### 3 车辐式结构索长误差限值

对于由索桁架组成的车辐式结构而言,第2节中的步骤也是通用的。但是不同之处在于,对于平面索桁架,尚可以通过理论推导获得临界状态方程的解析式;而车辐式结构的拉索数量多,又不在同一平面内,理论推导难以求出临界状态方程的所有系数,不利于工程推广应用。现提出了一种采用通用有限元软件求解状态方程的方法,并通过一定的理论推导证明了这种方法的正确性。

式(22)、(23)中的系数 $a_{ij}$ 表示第 $j$ 根索的索长误差对第 $i$ 根索的影响。当车辐式结构有 $n$ 根索时,临界状态方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (34)$$

式(34)中 $a_{ij}$ 也表示第 $j$ 根索的索长误差对第 $i$ 根索内力的影响,这时临界状态方程被称为超平面。矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中,对角线的元素 $a_{ii}$ 表示每根索的索长误差对于自身索力的影响。文献[7]中的研究表明,径向索的索力受其本身索长误差的影响最大,其次是受其两侧2或3根索的影响较大,距离较远的拉索对它的影响很小,所以矩阵 $\mathbf{A}$ 实际上是一个稀疏矩阵。确定了矩阵 $\mathbf{A}$ ,每根索的可靠度指标就可以用式(5)计算。

以图6为例说明车辐式结构索长误差的理论公式。图6为一个放置在看台上的车辐式屋盖,共36根索桁架,环梁仅能够沿着径向变形,其俯视图如图7所示,设第 $i$ 根索桁架与 $x$ 轴的夹角为 $\varphi_i$ 。当轴线1的上径向索有索长误差 $\delta_1$ 时,结构的变形必然是关于轴线1对称的。忽略除轴线1以外其他环梁发生的径向变形,变形前后计算简图如图7所示。图7与图2非常相似,主要区别在于拉索的水平刚度 $k_{c1}$ 、 $k_{c2}$ 乘以了2个等效系数 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 。这是因为飞柱端点发生 $x$ 、 $z$ 方向位移时,轴线2~36的径向索对其也有约束作用。 $\alpha_1$ 表示了飞柱端点水平位移

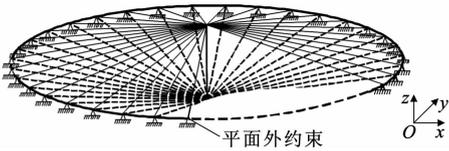


图6 辐式屋盖  
Fig. 6 Spoke Roof

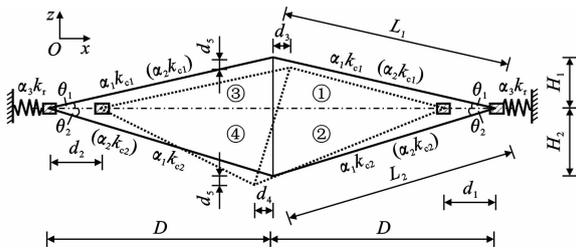


图7 辐式结构计算模型

Fig. 7 Calculation Model of Spoke Structure

的  $y$  轴左侧(或右侧)全部索桁架索力水平分量的变化量与单榀索桁架索力水平分量的变化量之比,可以由式(35)求出

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^9 \cos^2 \varphi_i + \sum_{i=29}^{36} \cos^2 \varphi_i = \sum_{i=11}^{27} \cos^2 \varphi_i \quad (35)$$

$\alpha_2$  表示了飞柱端点竖直位移的  $y$  轴左侧(或右侧)全部索桁架索力竖直分量的变化量与单榀索桁架索力竖直分量的变化量之比,可以由式(36)求出

$$\alpha_2 = \frac{N}{2} \quad (36)$$

式中:  $N$  为全部索桁架的数目,对本算例,  $N$  取 36。

经计算,  $\alpha_1 = 9$ ,  $\alpha_2 = 18$ 。按照第 2 节中的推导过程,可以求出

$$d_1 = d_2 = \frac{k_{c1} \Delta_1 (\alpha_2 m + \alpha_1 n \tan \theta_1)}{2\alpha_2 [k_r m + \alpha_1 k_{c1} k_{c2} (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)]} \quad (37)$$

$$d_3 = \frac{\Delta_1}{2\alpha_1} \quad (38)$$

$$d_4 = 0 \quad (39)$$

$$d_5 = \frac{k_{c1} \Delta_1 \tan \theta_1}{2\alpha_2 m} + \frac{n}{m} d_1 = \frac{k_{c1} \Delta_1}{2\alpha_2 m} \cdot \left[ \tan \theta_1 + \frac{n(\alpha_2 m + \alpha_1 n \tan \theta_1)}{k_r m + \alpha_1 k_{c1} k_{c2} (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)} \right] \quad (40)$$

式中:  $k_r$  为环梁的等效径向刚度,等于轴线 1 上施加的径向集中力与左侧 18 个节点径向位移之比。

将式(37)~(40)求出的位移量代入下式,可以求出矩阵  $\mathbf{A}$  的系数  $a_{up1,up1}$ 、 $a_{low1,up1}$  分别为

$$a_{up1,up1} = \frac{k_{c1} (\delta_1 / \cos \theta_1 - d_3 - d_1 - d_5 \tan \theta_1)}{\cos \theta_1 \cdot \delta_1} \quad (41)$$

$$a_{low1,up1} = \frac{k_{c2} (-d_4 - d_1 + d_5 \tan \theta_2)}{\cos \theta_2 \cdot \delta_1} \quad (42)$$

对于轴线  $i$  ( $i \neq 1$ ) 的上径向索

$$a_{up1,up1} = \frac{k_{c1} (-d_3 \cos \varphi_i - d_5 \tan \theta_1)}{\cos \theta_1 \cdot \delta_1} \quad (43)$$

对于轴线  $i$  的下径向索

$$a_{low1,up1} = \frac{k_{c2} (-d_4 \cos \varphi_i + d_5 \tan \theta_2)}{\cos \theta_2 \cdot \delta_1} \quad (44)$$

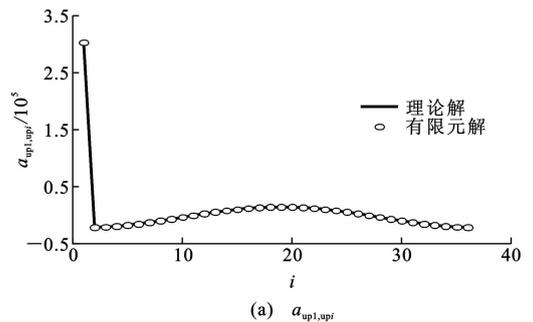
下径向索索长存在误差时,也可以用上述方法求出矩阵  $\mathbf{A}$  的系数。

根据  $a_{ij}$  的物理意义,也可以采用有限元程序确定矩阵  $\mathbf{A}$ 。其方法是:给第  $j$  根索设置一个索长误差  $\delta_j^*$ ,记录下第  $i$  根的内力变化值  $\Delta F_i^*$ ,则

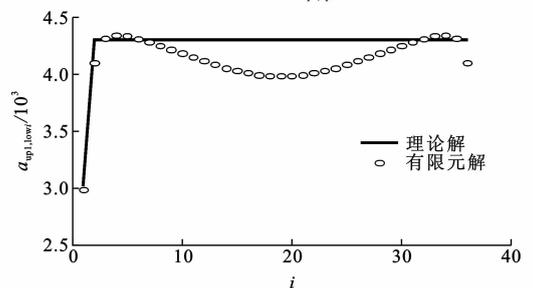
$$a_{ij} = \Delta F_i^* / \delta_j^* \quad (45)$$

下面用一个算例说明有限元程序计算的  $a_{ij}$  与理论推导的结果一致。这一算例也说明在工程计算中可以直接通过有限元软件获得矩阵  $\mathbf{A}$ 。

算例 2:几何尺寸和索杆截面性质与算例 1 相同,共 36 榀索桁架。环梁截面为  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ ,壁厚为  $2 \text{ cm}$ 。求解轴线 1 的上径向索索力变化系数  $a_{up1,up1}$  和  $a_{up1,low1}$ ,下标  $up1$  和  $low1$  表示轴线  $i$  的上、下径向索。本文推导的理论解与采用有限元软件 ANSYS 计算得到的结果比较如图 8 所示。



(a)  $a_{up1,up1}$



(b)  $a_{up1,low1}$

图8 轴线 1 的上径向索系数

Fig. 8 Coefficients of Upper Radial Cable at Axial 1

从图 8 可以看出:①本文推导的理论解与有限元解非常接近,说明本文中的公式较为准确;②轴线 1 的上径向索索力偏差受其本身的索长误差影响最大,受其他上径向索的影响较小;③轴线 1 的上径向索误差受其两侧相隔一条轴线的下径向索影响较大,受轴线 1 的下径向索影响较小;④下径向索对轴

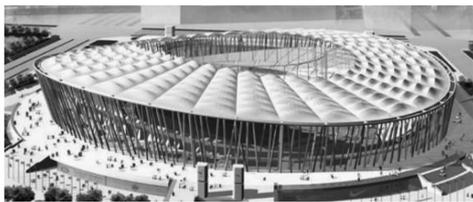
线1的上径向索的影响远小于上径向索。这4个特点与文献[7]中的结论是一致的。

基于以上4个特点,可以忽略其他拉索的影响,将轴线*i*的上径向索状态方程近似为 $G_{up_i} = \Delta \bar{F}_{up_i} - a_{up_i, up_i} \delta_{up_i}$ ,则可可靠度指标为 $\beta_{up_i} = \Delta \bar{F}_{up_i} / |a_{up_i, up_i} \sigma_{up_i}|$ 。

假设容许失效概率为0.000 1%,索力容许偏差为设计值的5%,索的合格率为99.87%, $\Phi(-\beta) \leq 10^{-6}$ ,可以求得 $\beta \geq \bar{\beta} = 4.753$ 。计算得到方差 $\sigma_{up} = 0.003 40$ ,用这个方差控制索长制作的最大误差限值为 $\delta_{up, max} = 0.01 \text{ m}$ 。

## 4 工程应用

深圳宝安体育场(图9)位于广东深圳市宝安区,是2011年世界大学生运动会的足球场,平面投影近似圆形,2个轴的长度分别为237、230 m,其主体结构为马鞍型车辐式结构体系,包括屋盖结构和支承柱。屋盖结构由单层外环梁、双层柔性拉索内环以及内外环之间的36榀索桁架组成,索桁架由飞柱、上下弦索以及拉索组成。



(a) 效果图

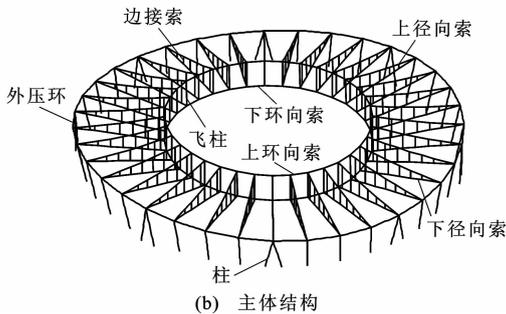


图9 深圳宝安体育场

Fig. 9 Bao'an Stadium of Shenzhen

为确保车辐式屋盖有足够的刚度,规定径向索及环向索的索力容许偏差为设计值的5%。下面将利用前文的方法,计算上、下环向索和36根上、下径向索的制作误差限值 $\delta_{utr}$ 、 $\delta_{ltr}$ 和 $\delta_{uri}$ 、 $\delta_{lri}$ 。设索长误差为相互独立的随机变量,均值均为0,方差分别为 $\sigma_{utr}$ 、 $\sigma_{ltr}$ 、 $\sigma_{uri}$ 、 $\sigma_{lri}$ 。表2为索长最大制作误差。

深圳宝安体育场径向索的索长为54.038~55.660 m,可规定所有径向索的制作误差限值相同。上、下环索长度均为394.175 m,可规定同一个

表2 索长最大制作误差

Tab. 2 Maximum Producing Deviation of Cable's Length

索长 $l$	最大制作误差
$0 \text{ m} < l \leq 50 \text{ m}$	$\pm 15 \text{ mm}$
$50 \text{ m} < l \leq 100 \text{ m}$	$\pm 20 \text{ mm}$
$l > 100 \text{ m}$	$\pm l/5 000$

误差限值,即

$$\left. \begin{aligned} \delta_{urj, max} &= \delta_{lrj, max} \\ \delta_{utr, max} &= \delta_{ltr, max} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

(1)确定结构的失效概率

假设容许失效概率为0.000 1%, $\Phi(-\beta) \leq 10^{-6}$ ,即 $\beta \geq \bar{\beta} = 4.753$ 。

(2)获得临界状态方程

36个上、下径向索和上、下环向索飞柱间36个分段的索力变化等于设计值的5%。临界状态方程可整理为以下4个方程组:

上径向索

$$\begin{aligned} G_{urj} &= \Delta \bar{F}_{urj} - A_{ur, ur} \delta_{uri} - A_{ur, lr} \delta_{lri} - \\ &A_{ur, utr} \delta_{utr} - A_{ur, ltr} \delta_{ltr} = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

下径向索

$$\begin{aligned} G_{lrj} &= \Delta \bar{F}_{lrj} - A_{lr, ur} \delta_{uri} - A_{lr, lr} \delta_{lri} - \\ &A_{lr, utr} \delta_{utr} - A_{lr, ltr} \delta_{ltr} = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

上环向索

$$\begin{aligned} G_{utrj} &= \Delta \bar{F}_{utrj} - A_{utr, ur} \delta_{uri} - A_{utr, lr} \delta_{lri} - \\ &A_{utr, utr} \delta_{utr} - A_{utr, ltr} \delta_{ltr} = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

下环向索

$$\begin{aligned} G_{ltrj} &= \Delta \bar{F}_{ltrj} - A_{ltr, ur} \delta_{uri} - A_{ltr, lr} \delta_{lri} - \\ &A_{ltr, utr} \delta_{utr} - A_{ltr, ltr} \delta_{ltr} = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

式中: $\Delta \bar{F}_{urj}$ 为36维列向量,表示36根索的索力变化容许值; $A_{ur, ur}$ 、 $A_{ur, lr}$ 为 $36 \times 36$ 维矩阵,分别表示上、下径向索误差对上径向索内力变化影响的系数矩阵, $A_{ur, lr} = (a_{uri, lrj})_{36 \times 36}$ , $a_{uri, lrj}$ 表示仅轴线*j*的下径向索存在单位误差时,轴线*i*的上径向索的索力变化; $A_{ur, utr}$ 、 $A_{ur, ltr}$ 为 $36 \times 1$ 维矩阵,分别表示上、下环向索误差对上径向索内力变化影响的系数矩阵; $\delta_{uri}$ 、 $\delta_{lri}$ 为36维列向量; $\delta_{utr}$ 、 $\delta_{ltr}$ 为一维列向量,表示索长制作误差。

4个临界状态方程组分别包含36个临界状态方程(事实上,由于该结构具有对称性,可以将36个方程简化为10个方程),其中只有系数矩阵 $A$ 未知,可由第3节中提出的方法,在有限元软件ANSYS中解得。

(3)确定可靠度指标的表达式

根据上径向索的临界状态方程组的第*i*个方

程,第  $i$  根上径向索的可靠度指标  $\beta_{uri}$  应满足

$$\beta_{uri} = \frac{\Delta \bar{F}_{uri}}{\sqrt{\sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4}} \geq \bar{\beta}$$

$$i = 1, 2, \dots, 36 \quad (51)$$

$$\sum_1 = \sum_{j=1}^{36} (a_{uri,urj} \sigma_{urj})^2$$

$$\sum_2 = \sum_{j=1}^{36} (a_{uri,lrj} \sigma_{lrj})^2$$

$$\sum_3 = (a_{uri,utr} \sigma_{utr})^2$$

$$\sum_4 = (a_{uri,ltr} \sigma_{ltr})^2$$

同理可得其他索的可靠度指标。

(4) 确定随机变量的方差

由式(34)、(46)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{urj} &= \sigma_{lrj} \\ \sigma_{utr} &= \sigma_{ltr} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

设  $\sigma_r$  表示所有径向索误差的方差,  $\sigma_{tr}$  表示所有环向索的误差,则将式(52)代入式(51)可以求出  $\sigma_r$  和  $\sigma_{tr}$  的范围。以  $\sigma_r$ 、 $\sigma_{tr}$  为坐标轴,可以得到形如图4所示的椭圆,共144个。当径向索和环向索误差的方差位于所有椭圆公共部分的区域内,车辐式结构是安全的。

(5) 确定随机变量的最大值

以径向索误差  $\delta_r$  为横轴、环向索误差  $\delta_{tr}$  为纵轴建立坐标系。

假设工厂加工拉索的合格率  $\bar{P} = 99.87\%$ ,由式(34),可将  $\sigma_r$ 、 $\sigma_{tr}$  坐标系中的椭圆转化到  $\delta_r$ 、 $\delta_{tr}$  坐标系。建议采用表2中的索长误差限值,径向索长误差限值为  $\delta_r = 20.0$  mm,环向索长误差限值为  $\delta_{tr} = 78.8$  mm,在  $\delta_r$ 、 $\delta_{tr}$  坐标系中表示一个矩形,如图10所示。

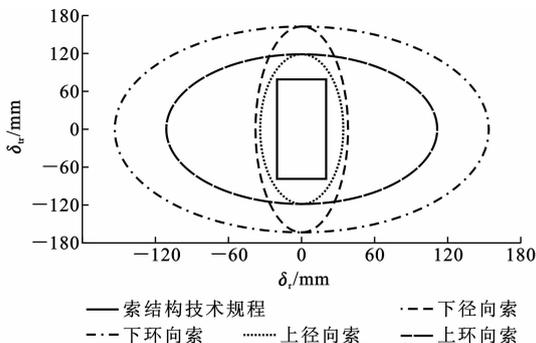


图10 索长的误差限值

Fig. 10 Deviation Limitation Values of Cable's Length

表2中索长误差限值包含在所有椭圆内部,并与文献[18]中采用的索长误差控制限值一致,说明按

照该限值控制索长误差能够保证所有拉索的预应力与设计预应力的偏差在容许范围之内,可按照这一限值进行拉索的生产和安装。

## 5 结语

首先以一个平面索桁架为例,推导了索长误差随机变量与索力变化量的关系,并基于一次二阶矩可靠度指标,提出了一种确定索长误差限值的方法,然后将这种方法推广到车辐式结构中。计算结果表明,可以采用有限元软件 ANSYS 计算出索力变化临界状态方程中的各索长误差随机变量的系数,从而获得临界状态可靠度指标的表达式及索长误差控制限值。将这一方法应用到深圳宝安体育场的工程分析中,确定了其索长误差控制限值。

## 参考文献:

### References:

- [1] 郭彦林,江磊鑫,田广宇,等.车辐式张拉结构张拉过程模拟分析及张拉方案研究[J].施工技术,2009,38(3):30-35.  
GUO Yan-lin,JIANG Lei-xin,TIAN Guang-yu,et al. Simulation Tension Analysis and Tension Scheme for Wheel Tension Structure[J]. Construction Technology,2009,38(3):30-35.
- [2] 张丽梅.非完全对称 Geiger 索穹顶结构特征与分析理论研究[D].上海:上海交通大学,2008.  
ZHANG Li-mei. Structural Analysis Algorithm and Structural Performance Research for Non-fully Symmetry Geiger Cable Dome [D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University,2008.
- [3] 蒋本卫.受荷连杆机构的运动稳定性和索杆结构的索长误差效应分析[D].杭州:浙江大学,2008.  
JIANG Ben-wei. Analysis on Kinematic Stability of Loaded Linkage Mechanisms and Length-error Effect of Cable-strut Structures [D]. Hangzhou: Zhejiang University,2008.
- [4] 尤德清,张建华,张毅刚,等.支座施工误差对索穹顶结构初始预应力的影响[J].工业建筑,2007,37(增1):1123-1127.  
YOU De-qing, ZHANG Jian-hua, ZHANG Yi-gang, et al. Influence of Support Construction Error on the Initial Pre-stress of Cable Dome[J]. Industrial Construction,2007,37(S1):1123-1127.
- [5] 徐茂波,刘西拉.用蒙特卡洛方法计算钢筋混凝土梁的结构可靠度以及对人为误差的敏感度分析[J].四川建筑科学研究,1990(1):12-15.  
XU Mao-bo, LIU Xi-la. Structural Stability of RC

- Beam and Sensitivity Analysis of Man-made Error Based on Monte Carlo Method[J]. Building Science Research of Sichuan, 1990(1):12-15.
- [6] GAO Bo-qing, WENG En-hao. Sensitivity Analyses of Cables to Suspend-dome Structural System[J]. Journal of Zhejiang University: Science A, 2004, 5(9): 1045-1052.
- [7] 郭彦林,王小安,田广宇,等. 车辐式张拉结构施工随机误差敏感性研究[J]. 施工技术, 2009, 38(3): 35-39.  
GUO Yan-lin, WANG Xiao-an, TIAN Guang-yu, et al. Sensitivity Study of Random Errors for Cable Tension Structure of Baoan Stadium[J]. Construction Technology, 2009, 38(3): 35-39.
- [8] CORNELL C A. A Probability-based Structural Code [J]. Journal of the American Concrete Institute, 1969, 66(12):974-985.
- [9] HASOFER A M, LIND N C. Exact and Invariant Second-moment Code Format [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1974, 100(1):111-121.
- [10] RACKWITZ R, FIESSLER B. Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences[J]. Computers & Structures, 1978, 9:489-494.
- [11] DITLEVSEN O. Generalized Second Moment Reliability Index [J]. Journal of Structural Mechanics, 1979, 7(4):435-451.
- [12] DITLEVSEN O. Taylor Expansion of Series System Reliability[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1984, 110(2):293-307.
- [13] KARAMCHANDANI A, CORNELL C A. Sensitivity Estimation Within First and Second Order Reliability Methods[J]. Structural Safety, 1992, 11(2):95-107.
- [14] MADSEN H O, KRENK S, LIND N C. Methods of Structural Safety[M]. London: Prentice Hall, 1986.
- [15] 张新培. 索网结构可靠指标 $\beta$ 的计算方法[J]. 计算结构力学及其应用, 1993, 10(1):53-58.  
ZHANG Xin-pei. A Method of Calculating the Reliability Indexes of Cable Network Structures[J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1993, 10(1):53-58.
- [16] NOWAK A S, COLLINS K R. Reliability of Structures[M]. New York: McGraw-Hill, 2000.
- [17] 林元烈, 梁宗霞. 随机数学引论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003:198-203.  
LIN Yuan-lie, LIANG Zong-xia. Introduction to Stochastic Mathematics [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003:198-203.
- [18] 程 军. 柔性预张力结构的构件长度误差敏感性分析[D]. 杭州: 浙江大学, 2010.  
CHENG Jun. Sensitivity Analysis of Member Length Errors of Flexible Tensile Structures[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2010.

## 《空间结构》2011年征订通知

《空间结构》是由国家教育部主管、浙江大学主办的全国性专业科技期刊, 1994年创刊, 面向国内外公开发行。《空间结构》主要刊载空间结构的理论研究、分析设计、试验与实测、建筑造型、施工工艺、管理经验、工程实例、信息报道及有特色的空间结构工程照片等方面的内容。读者对象为科研单位、设计院、生产施工单位、质检管理部门的科技人员及大专院校师生。

《空间结构》为季刊, 大16开本, 96页, 每期定价15元, 全年共60元。本刊兼营广告, 10月起征订下一年度广告。《空间结构》自办发行, 请直接汇款至本编辑部订阅, 发行组收到汇款后即寄发票并按期寄给订户, 务请在汇款用途栏内注明订购《空间结构》份数及年限。订购款按以下方式汇寄:

开户行: 工商银行杭州市浙大分理处

电话: (0571)87952414(带传真)

账号: 1202024619914482876

邮编: 310006

账户: 浙江大学《空间结构》编辑部

E-mail: kjjgzz@163.com

地址: 杭州玉泉浙江大学空间结构研究中心《空间结构》杂志编辑部