

文章编号:1673-2049(2015)02-0077-07

# 弹性支撑拱结构的动力特性研究

康 婷,白应生,王 栋,杨 慧,孙惠香

(空军工程大学 航空航天工程学院,陕西 西安 710038)

**摘要:**以三次B样条函数的线性组合作为拱结构位移振型函数,根据哈密顿原理推导出了弹性支撑拱结构的频率方程,考虑了拱脚处集中质量的附加惯性力等因素的影响,计算分析了竖向弹性支撑和旋转弹性支撑对拱结构动力特性的影响,提出了竖向临界刚度系数的概念。研究结果表明:竖向弹性支撑会使拱结构的基本频率减小,当矢跨比为0.1左右时影响最为显著,同时还会改变拱结构振型序列特点;竖向临界刚度系数是拱结构动力特性的分界点,此时拱结构的基本频率和第二频率几乎相等,若竖向支撑刚度系数小于临界刚度系数,结构的第1阶振型是对称的,而第2阶振型是反对称的,与刚性支撑拱结构的振型序列不同;若竖向支撑刚度系数大于临界刚度系数,结构的第1阶振型是反对称的,而第2阶振型是对称的,与刚性支撑拱结构的振型序列相同;旋转弹性支撑会使拱结构的基本频率减小,但并不改变其振型序列特点。

**关键词:**结构工程;动力特性;哈密顿原理;弹性支撑;拱结构;刚度系数

**中图分类号:**TU311.3

**文献标志码:**A

## Study on Dynamic Characteristics of Elastic Supported Arch Structures

KANG Ting, BAI Ying-sheng, WANG Dong, YANG Hui, SUN Hui-xiang

(School of Aeronautics and Astronautics Engineering, Air Force Engineering University,  
Xi'an 710038, Shaanxi, China)

**Abstract:** The displacement mode shape function of the arch free vibration was simulated with a linear combination of cubic B-spline. The vibration frequency equation of the elastic supported arch structures was derived according to Hamilton principle, in which the additional inertia force of the lumped mass at the arch foot was taken into account. The influences of the vertical and rotational elastic supports on the dynamic characteristics of arch structure were studied. The concept of the vertical critical stiffness coefficient was put forward. The study results show that the vertical elastic supports decrease the natural frequency, and the influence is biggest when the rise-span ratio is about 0.1. Meanwhile, the vibration mode sequence characteristics change. As the stiffness of the vertical elastic supports is same with the vertical critical stiffness coefficient, the natural frequency and the second frequency is almost equal. If the vertical support stiffness coefficient is less than the critical stiffness coefficient, the first vibration mode of structure is symmetrical, and the second vibration mode is antisymmetric. The vibration mode sequence characteristics are different from those of the arch with rigid supports. If the vertical support stiffness coefficient is greater than the critical stiffness coefficient, the first vibration mode is antisymmetric, while the second vibration mode is symmetrical. The vibration mode sequence

收稿日期:2014-10-11

基金项目:国家自然科学基金项目(51308540,51208506)

作者简介:康 婷(1977-),女,陕西佳县人,讲师,工学博士,E-mail:baiyingsheng123@126.com。

characteristics are same with those of the arch with rigid supports. The rotational elastic supports will decrease the natural frequency of the arch structure, but will not change its vibration mode sequence characteristics.

**Key words:** structure engineering; dynamic characteristic; Hamilton principle; elastic support; arch structure; stiffness coefficient

## 0 引言

具有弹性支撑的拱结构在工程中广泛存在,如直接支撑于其他结构或地基上的拱结构,支座处总存在一定的位移,这种拱结构实为具有弹性支撑的拱。具有弹性支撑的拱结构在振动时,拱脚处会产生附加惯性力,对结构动力特性将产生较大影响。

弹性支撑对梁动力特性的影响已经得到了较为深入的研究<sup>[1-2]</sup>。关于拱结构动力特性的研究,多数集中于刚性支撑的情况<sup>[3-4]</sup>。具有弹性支撑的拱结构也有学者进行了研究,但大多是关于内力分析<sup>[5-7]</sup>和稳定性分析方面<sup>[8]</sup>。康婷等<sup>[9]</sup>研究了水平弹性支撑圆拱的动力特性,发现水平弹性支撑不仅会使拱结构基本频率减小,而且会显著改变其振动形态,会使拱结构由拉压振动变为弯曲振动,对结构受力不利。竖向弹性支撑和旋转弹性支撑对拱结构动力特性的影响目前研究较少,是工程中亟待解决的一个问题。

本文以三次 B 样条函数的线性组合作为位移振型函数,根据哈密顿原理推导出弹性支撑拱结构的频率方程,其中考虑拱脚处集中质量的附加惯性力等因素的影响,分析竖向弹性支撑和旋转弹性支撑对拱结构自振特性的影响,提出竖向临界刚度系数的概念,得出若干有益的结论。

## 1 基本方程

### 1.1 基本假定

基本假定为:①基于平面变形假设,变形前垂直于中线的平面,变形后仍垂直于中线;②忽略剪切变形的影响;③材料是均匀、连续、各向同性的;④振动是线弹性的。

### 1.2 曲杆变形几何关系

从平面拱结构上任取一微段  $ds$ , 建立单元应变和位移之间的关系如下

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{du}{ds} - kv \\ \chi &= \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{d(ku)}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $u$  为切向位移,以绕曲率中心顺时针转动为

正;  $v$  为法向位移,以指向极点为正;  $k$  为微段拱轴线的曲率,若为圆弧拱,则为常数;  $s$  为拱轴线弧长;  $\epsilon_s$  为拱轴向应变,以伸长为正;  $\chi$  为曲率应变。

### 1.3 位移振型函数

对于结构自由振动问题,哈密顿原理可表述为:在所有的可能运动状态中,精确解使泛函  $II$  取驻值

$$II = \int_{t_1}^{t_2} (U + V - T) dt \quad (2)$$

式中:  $V$  为拱自由振动时的形变势能;  $U$  为外力做功引起的势能,在此只研究自由振动,故  $U=0$ ;  $T$  为拱自由振动时的动能;  $t, t_1, t_2$  均为时间。

弹性支撑拱结构在平面内自由振动时的位移  $u(s, t), v(s, t)$  可分别表示为

$$\left. \begin{aligned} u(s, t) &= u(s) \sin(\omega t + a) \\ v(s, t) &= v(s) \sin(\omega t + a) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中:  $u(s), v(s)$  分别为切向位移振型函数和法向位移振型函数;  $\omega$  为基本频率;  $a$  为相位角。

拱结构的位移振型函数用三次 B 样条函数进行拟合。图 1 为弹性支撑拱结构模型,其中,  $K_1, K_2, K_3$  分别为水平、旋转和竖向弹性支撑的刚度系数,  $M_0, M_N$  分别为拱脚左、右端的集中质量,  $f$  为拱高,  $L$  为拱的跨度,  $i$  为质点。

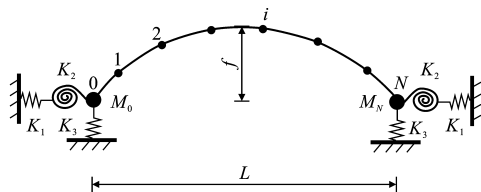


图 1 弹性支撑拱结构模型

Fig. 1 Elastic Supported Arch Structural Model

对如图 1 所示的弹性支撑拱结构进行样条离散化,即

$$\begin{aligned} 0 &= s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_i < \dots < s_N = s \\ s_i &= s_0 + i\Delta s, \Delta s = s_{i+1} - s_i = s/N \end{aligned}$$

则位移振型函数可采用如下形式

$$u = \varphi a, v = \varphi_1 a + \varphi b \quad (4)$$

其中

$$\varphi = (\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}, \phi_N, \phi_{N+1})$$

$$\varphi_1 = (k\phi_0, 0, \dots, 0, k\phi_N)$$

$$\mathbf{a}=(u_0, 0, a_1, \cdots, a_{N-1}, 0, u_N)^T$$

$$\mathbf{b}=(v_0, v_0', b_1, \cdots, b_{N-1}, v_N', v_N)^T$$

式中:  $\phi_i(s)$  为三次 B 样条函数构成的样条基函数;  $u_0, v_0, v_0'$  分别为拱左端 ( $s_0$ ) 处的切向位移、法向位移及法向位移对拱轴的微分, 由边界条件确定;  $u_N, v_N, v_N'$  分别为拱右端 ( $s_N$ ) 处的切向位移、法向位移及对拱轴的微分;  $a_i$  为切向位移参数;  $b_i$  为法向位移参数。

样条基函数的构造类似于有限元法中形函数的构造<sup>[3-4]</sup>, 根据拱结构位移边界条件

$$\begin{cases} u(s_0)=u_0, v(s_0)=v_0, \theta(s_0)=ku_0+v_0' \\ u(s_N)=u_N, v(s_N)=v_N, \theta(s_N)=ku_N+v_N' \end{cases}$$

得满足边界条件的样条基函数如下<sup>[3]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \phi_{-1}(s) &= \frac{3}{2} \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s}\right) \\ \phi_0(s) &= \frac{\Delta s}{2} \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s}\right) - 2h \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s} + 1\right) \\ \phi_1(s) &= \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s} - 1\right) - \frac{1}{2} \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s}\right) + \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s} + 1\right) \\ \phi_2(s) &= \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s} - 2\right) \\ &\vdots \\ \phi_{N-2}(s) &= \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s} - N + 2\right) \\ \phi_{N-1}(s) &= \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s} - N + 1\right) - \frac{1}{2} \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s} - N\right) + \\ &\quad \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s} - N - 1\right) \\ \phi_N(s) &= \frac{\Delta s}{2} \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s} - N\right) - 2h \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s} - N + 1\right) \\ \phi_{N+1}(s) &= \frac{3}{2} \varphi_3\left(\frac{s}{\Delta s} - N\right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中:  $\varphi_3(s)$  为三次样条函数。

上述基函数有下列特点

$$\begin{cases} \phi_i(0)=0(i \neq -1), \phi_{-1}(0)=1 \\ \phi_i'(0)=0(i \neq 0), \phi_0'(0)=1 \\ \phi_i'(s)=0(i \neq N), \phi_N'(s)=1 \\ \phi_i(s)=0(i \neq N+1), \phi_{N+1}(s)=1 \end{cases}$$

由上述的特点可以看出, 这组基函数可以适用于弹性支撑拱结构边界条件的处理, 计算非常方便。结构的位移矩阵  $\mathbf{W}$ 、应变矩阵  $\boldsymbol{\varepsilon}$  可表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W} &= (\mathbf{u}, \mathbf{v})^T = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \chi \end{bmatrix} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{式中: } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varphi}_1 & \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\varphi}' - k\boldsymbol{\varphi}_1) & -k\boldsymbol{\varphi} \\ (k\boldsymbol{\varphi})' + \boldsymbol{\varphi}_1'' & \boldsymbol{\varphi}'' \end{bmatrix}。$$

## 1.4 体系的势能

体系的势能  $V$  由结构的变形势能  $V_s$ 、拱脚左端弹簧的变形势能  $V_0$  和拱脚右端弹簧的变形势能  $V_N$  三部分组成, 即

$$V = V_s + V_0 + V_N \quad (7)$$

拱脚左、右两端弹簧的水平位移、竖向位移和转角位移振型的分量分别为

$$\begin{aligned} u_x(s_0) &= u_0 \sin(\varphi_0) - w_0 \cos(\varphi_0) = \mathbf{N}_{x0} \boldsymbol{\delta} \\ u_x(s_N) &= u_N \sin(\varphi_N) - w_N \cos(\varphi_N) = \mathbf{N}_{xN} \boldsymbol{\delta} \\ u_y(s_0) &= -u_0 \cos(\varphi_0) - w_0 \sin(\varphi_0) = \mathbf{N}_{y0} \boldsymbol{\delta} \\ u_y(s_N) &= -u_N \cos(\varphi_N) - w_N \sin(\varphi_N) = \mathbf{N}_{yN} \boldsymbol{\delta} \\ \theta(s_0) &= ku_0 + w_0' = \mathbf{N}_{\theta 0} \boldsymbol{\delta} \\ \theta(s_N) &= ku_N + w_N' = \mathbf{N}_{\theta N} \boldsymbol{\delta} \end{aligned}$$

则体系的势能可写为

$$V = \frac{1}{2} \sin^2(\omega t + a) \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 \\ \mathbf{K}_s &= \int_0^s \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, ds \\ \mathbf{K}_1 &= K_1 (\mathbf{N}_{x0}^T \mathbf{N}_{x0} + \mathbf{N}_{xN}^T \mathbf{N}_{xN}) \\ \mathbf{K}_2 &= K_2 (\mathbf{N}_{\theta 0}^T \mathbf{N}_{\theta 0} + \mathbf{N}_{\theta N}^T \mathbf{N}_{\theta N}) \\ \mathbf{K}_3 &= K_3 (\mathbf{N}_{y0}^T \mathbf{N}_{y0} + \mathbf{N}_{yN}^T \mathbf{N}_{yN}) \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中:  $\mathbf{K}$  为刚度矩阵;  $E$  为材料的弹性模量;  $A, I$  分别为  $ds$  微段内的截面面积和截面惯性矩;  $\mathbf{N}_{x0}, \mathbf{N}_{xN}, \mathbf{N}_{y0}, \mathbf{N}_{yN}, \mathbf{N}_{\theta 0}, \mathbf{N}_{\theta N}$  均为系数矩阵。

## 1.5 体系的动能

体系的动能包括拱结构的动能  $T_s$  和拱脚左、右两端集中质量的动能  $T_0, T_N$ , 即

$$T = T_s + T_0 + T_N \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{1}{2} \int_0^s \bar{m} [\dot{u}^2(s, t) + \dot{w}^2(s, t)] \, ds \\ T_0 &= \frac{1}{2} M_0 [\dot{u}^2(s_0, t) + \dot{w}^2(s_0, t)] \\ T_N &= \frac{1}{2} M_N [\dot{u}^2(s_N, t) + \dot{w}^2(s_N, t)] \end{aligned}$$

则体系的动能  $T$  可写为

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \cos^2(\omega t + a) \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\delta} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_s + M_0 \mathbf{N}_0^T \mathbf{N}_0 + M_N \mathbf{N}_N^T \mathbf{N}_N \\ \mathbf{M}_s &= \int_0^s \bar{m} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, ds \end{aligned}$$

式中:  $\mathbf{M}$  为质量矩阵;  $\bar{m}$  为  $ds$  微段内的均布质量;  $\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_N$  均为系数矩阵。

质量矩阵  $\mathbf{M}$  各元素为

$$M_{11} = M_{s11} + M_0$$

$$M_{(N+3)(N+3)} = M_{s(N+3)(N+3)} + M_N$$

$$M_{(N+4)(N+4)} = M_{s(N+4)(N+4)} + M_0$$

$$M_{(2N+6)(2N+6)} = M_{s(2N+6)(2N+6)} + M_N$$

而其余元素  $M_{ij} = M_{sij}$ 。

## 1.6 频率方程

设  $t(t_1 \leq t \leq t_2)$  为一个周期  $2\pi/\omega$ , 则由哈密顿原理可得结构的泛函为

$$II = \frac{\pi}{2\omega} (\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} - \omega^2 \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\delta}) \quad (11)$$

由变分原理可得结构的频率方程为

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \omega^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\delta} \quad (12)$$

利用式(12)可求出结构的基本频率  $\omega$  及节点参数向量  $\boldsymbol{\delta}$ , 从而求得结构的振型。由此可分析弹性支撑对拱结构动力特性的影响。当曲率  $k \rightarrow 0$  时, 式(12)即化为梁自由振动的频率方程。

## 2 竖向弹性支撑对拱结构自振特性的影响

定义旋转弹性支撑刚度系数  $k_2 = K_2 L^2 / (EI)$ , 竖向弹性支撑刚度系数  $k_3 = K_3 L^3 / (EI)$ 。

### 2.1 $k_2 = 0$ 时竖向弹性支撑的影响

若旋转弹性支撑刚度系数  $k_2 = 0$ , 当  $k_3 \rightarrow +\infty$  时, 结构为两铰拱。两铰拱、弹性支撑拱结构的基本频率  $\omega_1, \omega_{1k}$  分别可用下式计算

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\mu}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \\ \omega_{1k} &= \frac{\mu_k}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中:  $\mu, \mu_k$  分别为两铰拱和竖向弹性支撑拱结构的基本频率。

图 2 为两铰拱和竖向弹性支撑拱结构径厚比  $R/h$  ( $R$  为圆拱半径,  $h$  为拱结构截面厚度) 不同时基频系数  $\mu$  与矢跨比  $f/L$  的关系, 其中,  $k_3 = 100EI/L^3$ 。由图 2 可以看出: 当拱结构的径厚比  $R/h \geq 20$  时, 若矢跨比  $f/L > 0.1$ , 两铰拱和竖向弹性支撑拱结构的基频系数只与结构的矢跨比有关, 随着矢跨比的增大逐渐减小, 与径厚比的大小没有关系; 当  $0 < f/L < 0.1$  时, 基频系数随矢跨比的增大逐渐增大, 矢跨比一定时, 径厚比越大, 基频系数越大。

竖向弹性支撑拱结构的基频系数比两铰拱结构

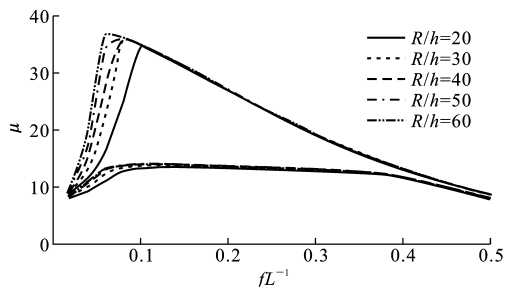


图 2 基频系数与矢跨比变化关系曲线

Fig. 2 Relations of Natural Frequency Coefficient and Rise-span Ratio

小, 由此可见竖向弹性支撑会使拱结构的基本频率减小。设  $\Delta\mu$  ( $\Delta\mu = \mu - \mu_k$ ) 为竖向弹性支撑对拱结构基频系数的影响量, 则  $\Delta\mu$  与矢跨比的关系曲线如图 3 所示。由图 3 可见, 竖向弹性系数  $k_3$  一定时, 对矢跨比和径厚比不同的拱影响不同。图 3 中的曲线可分为上升段和下降段。下降段曲线基本重合, 说明当矢跨比大于 0.1 时, 弹性支座对不同径厚比的拱影响是相同的, 均随着矢跨比的增大逐渐减小。上升段曲线不重合, 矢跨比越小, 影响越小。当矢跨比一定时, 径厚比越大, 影响越大。

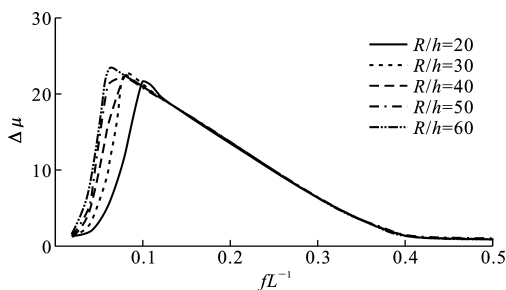


图 3 基频系数影响量与矢跨比关系曲线

Fig. 3 Relations of Natural Frequency Coefficient Difference and Rise-span Ratio

总的来说, 对于工程中一般的拱结构, 当矢跨比在 0.1 左右时, 影响最大, 对支座的弹性最为敏感。

对于等截面两铰拱结构, 当矢跨比  $f/L > 0.1$  时, 结构的基本频率和第二频率一般不相等, 结构的第 1 阶振型是反对称的, 而第 2 阶振型是对称的。然而对于竖向弹性支撑拱结构, 这一性质将会发生显著变化。

当转动支撑刚度系数为 0 时, 竖向弹性支撑拱结构的基本频率和第二频率系数随竖向刚度系数  $k_3$  的变化规律如图 4 所示。图 5 为  $k_2 = 0$  时竖向弹性支撑拱的前 2 阶振型。由图 4 可见, 基本频率和第二频率的系数  $\mu_k$  随竖向刚度系数  $k_3$  的增大而增大, 2 条曲线在某一点处异常接近, 此时, 基本频率和第二频率的系数几乎相等。图 4(b) 中, 当  $k_3 =$

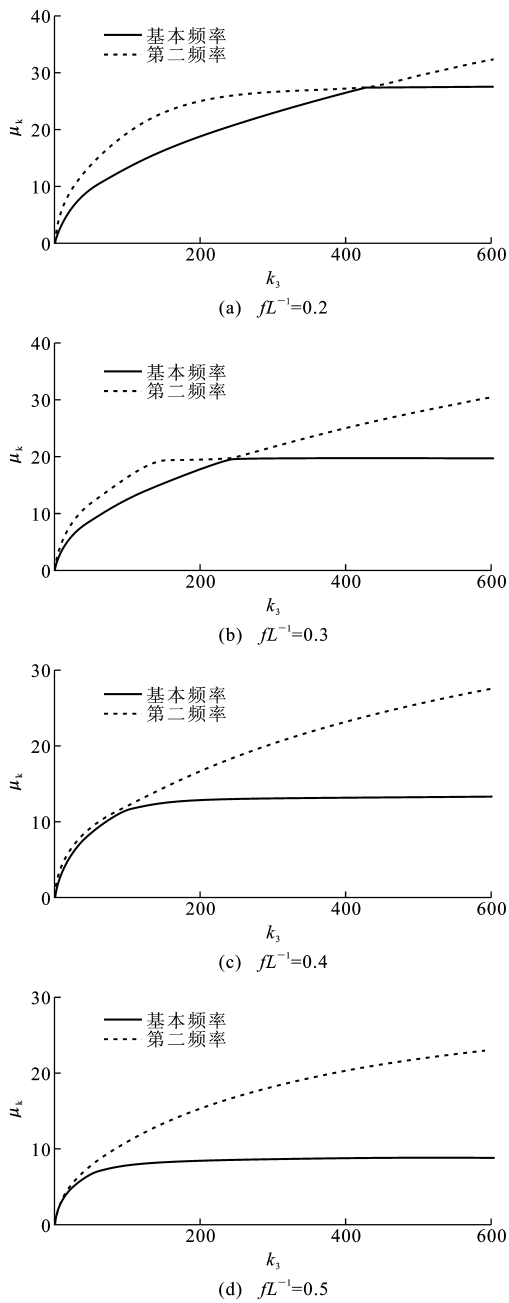


图 4  $k_2=0$  时基频系数与竖向刚度系数的关系曲线  
Fig. 4 Relations of Natural Frequency Coefficient and Vertical Stiffness Coefficient when  $k_2=0$

245 时,基频系数  $\mu_k=19.814$ ,第二频率系数  $\mu_{k2}=19.816$ ,结构的基本频率和第二频率几乎相等,此时结构第 1 阶振型是对称的[图 5(a)],而第 2 阶振型是反对称的[图 5(b)],与刚性支撑拱结构不同。

根据大量计算分析发现, $f/L=0.3$  时竖向刚度系数  $k_3=245$  是结构振动特性发生变化的分界点,可将这一刚度系数叫做竖向临界刚度系数  $k_{cr}$ 。由图 4 还可以看出,竖向临界刚度系数随着矢跨比的增大而逐渐减小。当  $k_3 \leq k_{cr}$  时[图 5(a),(b)],结构

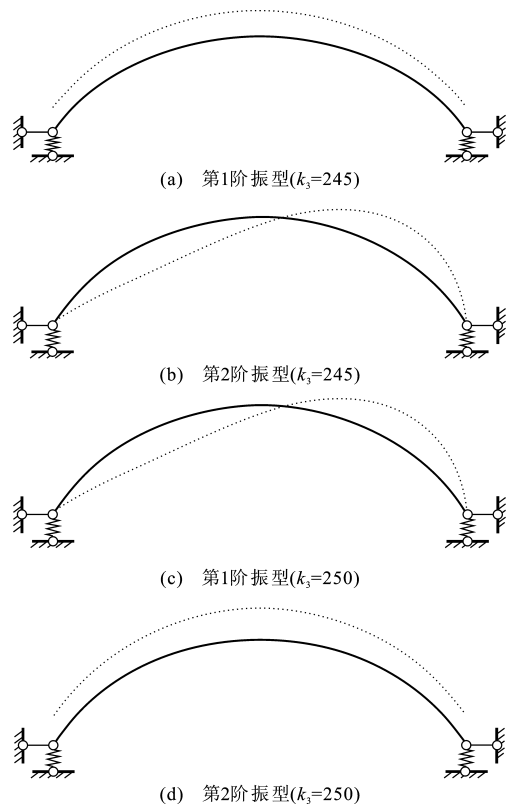


图 5  $k_2=0$  时竖向弹性支撑拱的前 2 阶振型  
Fig. 5 The First Two Vibration Modes of Vertical Elastic Supported Arch when  $k_2=0$

的第 1 阶振型是对称的,而第 2 阶振型是反对称的,与刚性支撑拱结的振型序列不同;当  $k_3 > k_{cr}$  时[图 5(c),(d)],结构的第 1 阶振型是反对称振型,而第 2 阶振型是对称振型,与刚性支撑拱结的振型序列相同。

## 2.2 $k_2 \rightarrow +\infty$ 时竖向弹性支撑的影响

若旋转弹性支撑刚度  $k_2 \rightarrow +\infty$ ,当竖向弹性刚度系数  $k_3 \rightarrow +\infty$  时,结构为无铰拱。

竖向刚度系数  $k_3$  与结构基本频率和第二频率系数的变化规律见图 6。图 7 为  $k_2 \rightarrow +\infty$  时竖向弹性支撑拱的前 2 阶振型。

由图 6 可以看出,基本频率和第二频率系数随竖向刚度系数  $k_3$  的变化规律与图 4 相似,也随  $k_3$  的增大而增大,2 条曲线在某一点处异常接近,此时,基本频率和第二频率系数几乎相同。图 6(b)中,当  $k_3=703$  时,基频系数  $\mu_k=33.345$ ,第二频率系数  $\mu_{k2}=33.357$ ,结构的竖向临界刚度系数  $k_{cr}=703$ ,此时,结构若发生自由振动,可能出现拍振现象,对结构的受力会产生不利影响。结构的振型序列特点(图 7)与图 5 相似。当  $k_3 \leq k_{cr}$  时[图 7(a),(b)],结构的第 1 阶振型是对称的,而第 2 阶振型是

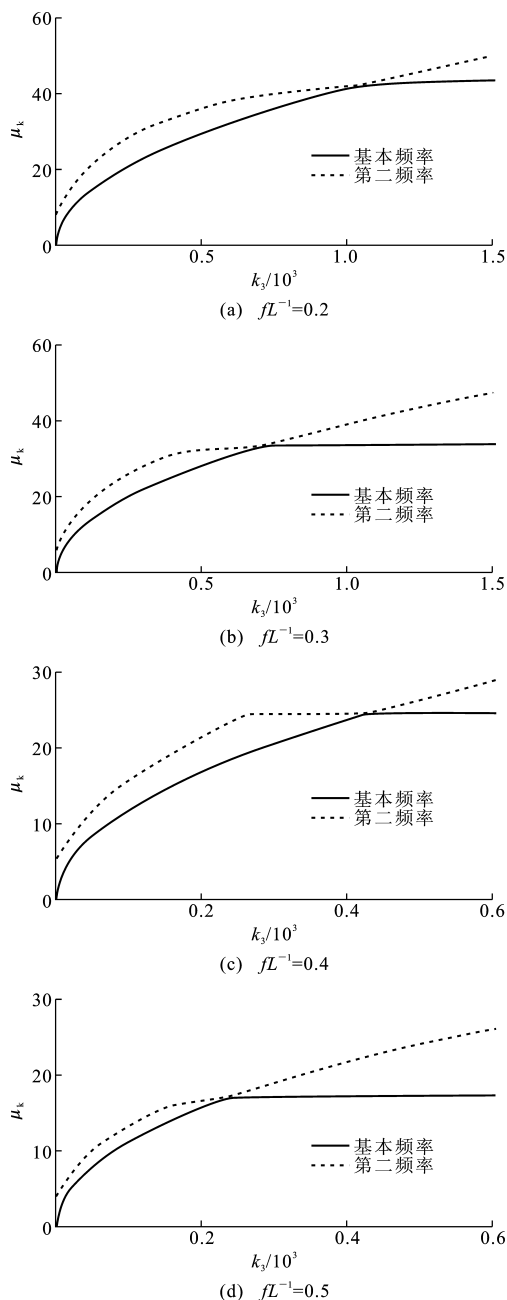


图 6  $k_2=0$  时基频系数与竖向刚度系数的关系曲线

Fig. 6 Relations of Natural Frequency Coefficient and Vertical Stiffness Coefficient when  $k_2=0$

反对称的,与刚性支撑拱结构的振型序列不同;当  $k_3 > k_{cr}$  时[图 7(c),(d)],结构的第 1 阶振型是反对称振型,而第 2 阶振型是对称振型,与刚性支撑拱结构的振型序列相同。

### 3 旋转弹性支撑的影响分析

竖向为刚性支撑,当旋转支撑弹性系数  $k_2 \rightarrow 0$  时,结构为两铰拱,  $k_2 \rightarrow +\infty$  时,结构为无铰拱。

不同矢跨比拱结构的旋转刚度系数  $k_2$  与结构基本频率和第二频率的系数  $\mu_{k2}$  变化规律如图 8 所

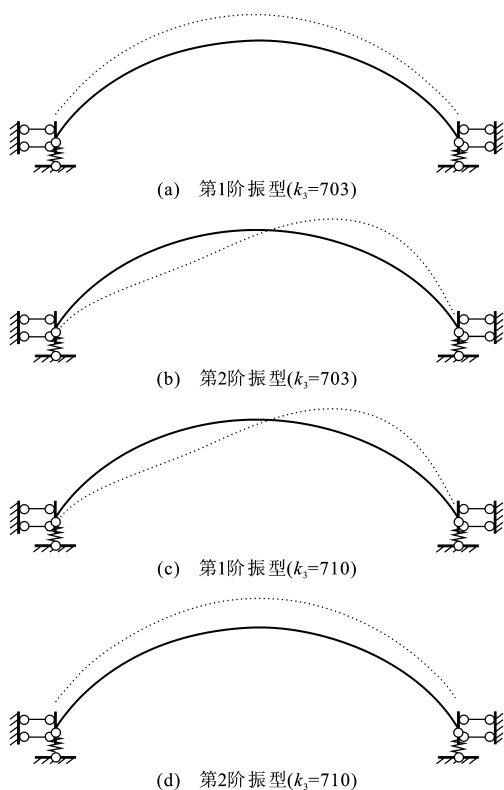


图 7  $k_2 \rightarrow +\infty$  时竖向弹性支撑拱的前 2 阶振型

Fig. 7 The First Two Vibration Modes of Vertical Elastic Supported Arch when  $k_2 \rightarrow +\infty$

示。由图 8 可以看出,旋转弹性支撑会使拱结构的基本频率减小,且弹性系数越小,减小得越多。图 8(b)中,  $k_2 \rightarrow +\infty$  时(无铰拱)基频系数为 33.046 (频率为 42.328 Hz),  $k_2 \rightarrow 0$  时(两铰拱)基频系数为 19.906 (频率为 25.492 Hz)。

根据计算分析,旋转弹性支撑并不改变拱结构的振型序列特点,  $n$  自由度体系有  $2n$  个基本频率和主振型,其中有  $n$  个振型以法向振动为主,  $n$  个振型以切向振动为主,结构的第 1 阶振型是反对称的,而第 2 阶振型是对称的。

### 4 结语

(1) 竖向弹性支撑会使拱结构的基本频率减小,且支撑的弹性系数越小,频率减小得越多。对于径厚比  $R/h \geq 20$  的拱结构,当矢跨比  $f/L=0.1$  左右时影响最为显著。

(2) 提出竖向临界刚度系数的概念,当竖向支撑弹性系数  $k_3 = k_{cr}$  时,结构的基本频率和第二频率几乎相等。此时,结构若发生自由振动,可能出现拍振现象,对结构的受力会产生不利影响。

(3) 竖向弹性支撑不仅使拱结构的基本频率减小,而且会改变其振型序列特点。当  $k_3 \leq k_{cr}$  时,结

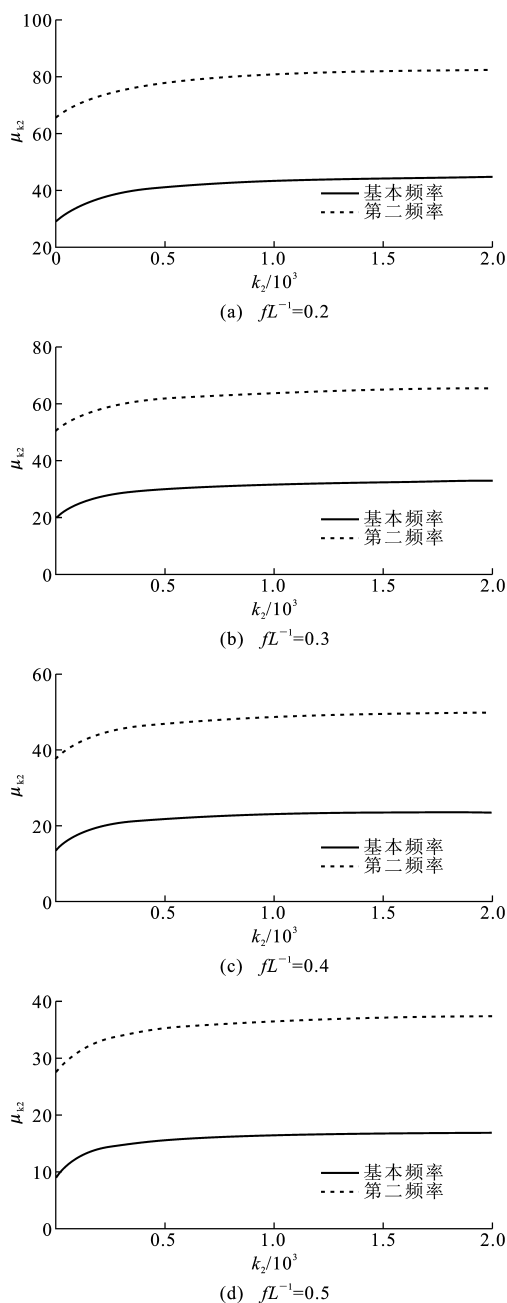


图8 基频系数与旋转刚度系数关系曲线

Fig. 8 Relations of Natural Frequency Coefficient and Rotational Stiffness Coefficient

构的第1阶振型是对称的,而第2阶振型是反对称的,与刚性支撑拱结构的振型序列不同;当  $k > k_{cr}$  时,结构的第1阶振型是反对称振型,而第2阶振型是对称振型,与刚性支撑拱结构的振型序列相同。旋转弹性支撑会使拱结构的基本频率减小,但并不改变其振型序列特点。

#### 参考文献:

#### References:

[1] 晏麓晖,曾首义,陈 斌. 弹性支承梁动力响应分析

[J]. 工程力学,2003,20(增):381-384.

YAN Lu-hui, ZENG Shou-yi, CHEN Bin. The Dynamic Responses of an Elastic Support Beam[J]. Engineering Mechanics, 2003, 20(S): 381-384.

[2] 方 秦,杜茂林. 爆炸荷载作用下弹性与阻尼支承梁的动力响应[J]. 力学与实践,2006,28(2):53-56.

FANG Qin, DU Mao-lin. Dynamic Responses of an Elastically Supported Beams with Damping Subjected to Blast Loads[J]. Mechanics in Engineering, 2006, 28(2): 53-56.

[3] 康 婷,许金余,白应生,等. 恒载效应对拱结构自振频率的影响分析[J]. 动力学与控制学报,2014,12(1):62-66.

KANG Ting, XU Jin-yu, BAI Ying-sheng, et al. Spline Finite Point Method for Analyzing the Effect of Dead Loads on Natural Frequencies of Arch[J]. Journal of Dynamics and Control, 2014, 12(1): 62-66.

[4] 赵跃宇,劳文全,冯 锐. 圆弧拱的面内非线性动力学分析[J]. 动力学与控制学报,2006,4(2):122-126.

ZHAO Yue-yu, LAO Wen-quan, FENG Rui. In-plane Nonlinear Dynamic Analysis of Circular Arches [J]. Journal of Dynamics and Control, 2006, 4(2): 122-126.

[5] 蒋志刚. 弹性支承圆弧梁内力分析[J]. 力学与实践, 1999, 21(4): 50-53.

JIANG Zhi-gang. Analysis of Internal Forces in Curved Beam with Spring[J]. Mechanics in Engineering, 1999, 21(4): 50-53.

[6] XU J X, HUANG H, ZHANG P Z, et al. Dynamic Stability of Shallow Arch with Elastic Supports[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2002, 37(4/5): 909-920.

[7] 宋春明,王明洋. 动支座对拱结构抗爆承载力的影响[J]. 爆炸与冲击, 2009, 29(3): 312-317.

SONG Chun-ming, WANG Ming-yang. Effects of Flexible Supports on Explosion Resistant Capabilities of Arches[J]. Explosion and Shock Waves, 2009, 29(3): 312-317.

[8] 杨 洋,童根树. 水平弹性支承圆弧钢拱的弹性屈曲分析[J]. 工程力学, 2011, 28(3): 9-16.

YANG Yang, TONG Gen-shu. In-plane Elastic Buckling of Steel Circular Arches with Horizontal Spring Support[J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(3): 9-16.

[9] 康 婷,白应生,孙惠香. 水平弹性支撑圆拱的动力特性研究[J]. 力学与实践, 2013, 35(2): 50-55.

KANG Ting, BAI Ying-sheng, SUN Hui-xiang. Dynamic Characteristics of the Horizontal Elastic Support Circular Arch[J]. Mechanics in Engineering, 2013, 35(2): 50-55.