

文章编号:1673-2049(2015)03-0001-06

基于空间等效桁架单元方法的钢筋混凝土结构非线性分析

吴方伯¹,熊江陵¹,李 钧¹,岳建武²,周绪红^{1,3}

(1. 湖南大学 土木工程学院,湖南 长沙 410082; 2. 中航建筑工程有限公司,湖南 长沙 410004;
3. 重庆大学 土木工程学院,重庆 400044)

摘要:针对传统有限元分析的复杂性以及裂缝描述不准确等缺点,从空间应力单元出发,结合平面等效桁架单元的研究方法,提出了一种空间等效桁架单元;基于空间等效桁架单元和空间应力单元刚度等效的原则,推导了等效后的单元刚度矩阵、杆件截面面积和杆件轴力计算公式,探讨了空间等效桁架单元应用于钢筋混凝土结构非线性分析的相关问题;借助 ANSYS 10.0 采用该方法对一桥墩结构进行计算分析,并与采用平面等效桁架单元方法和试验方法所得结果进行了对比。结果表明:采用该方法对钢筋混凝土结构进行分析能够满足工程精度要求,并且能够准确描述裂缝的开展。

关键词:空间等效桁架单元;有限元法;刚度等效;钢筋混凝土结构;非线性分析

中图分类号:TU311.41 **文献标志码:**A

Nonlinear Analysis of RC Structure Based on Space Equivalent Truss Element Method

WU Fang-bo¹, XIONG Jiang-ling¹, LI Jun¹, YUE Jian-wu², ZHOU Xu-hong^{1,3}

(1. School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, Hunan, China;
2. CITIC Construction Co., Ltd., Changsha 410004, Hunan, China;
3. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: In order to deal with complexity of traditional finite element analysis and inaccurate description of cracks, a kind of space equivalent truss element was proposed based on space stress element and plane equivalent truss element method. Based on the principles of stiffness equivalence for space equivalent truss element and space stress element, the equivalent element stiffness matrix, the equivalent sectional area of member bar and the calculation formula of axial force were derived. The problems related to space equivalent truss element used in nonlinear analysis of reinforced concrete (RC) structure were discussed. A bridge pier structure was analyzed by space equivalent truss element with ANSYS 10.0, and the analysis results were compared with the results of plane equivalent truss element and test. The results show that the proposed method is feasible to analyze RC structure, and can satisfy the requirements of engineering precision and accurately describe the crack development.

Key words: space equivalent truss element; finite element method; stiffness equivalence; RC

收稿日期:2015-01-10

基金项目:国家自然科学基金项目(51278179);长沙市科技计划重点项目(K1205229-11)

作者简介:吴方伯(1954-),男,湖南长沙人,教授,博士研究生导师,工学硕士,E-mail:wfbprof@163.com。

$$\mathbf{K}_{31} = \begin{bmatrix} -0.5k_2 & 0 & -0.5k_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.5k_2 & 0 & -0.5k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{33} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -0.5k_2 & 0.5k_2 \\ -0.5k_2 & k_1+k_2 & -0.5k_2 \\ 0.5k_2 & -0.5k_2 & k_1+k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{42} = \begin{bmatrix} -0.5k_2 & 0 & 0.5k_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5k_2 & 0 & -0.5k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{44} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0.5k_2 & -0.5k_2 \\ 0.5k_2 & k_1+k_2 & -0.5k_2 \\ -0.5k_2 & -0.5k_2 & k_1+k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{51} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{52} = \begin{bmatrix} -0.5k_2 & 0.5k_2 & 0 \\ 0.5k_2 & -0.5k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{53} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{54} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5k_2 & 0.5k_2 \\ 0 & 0.5k_2 & -0.5k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{61} = \begin{bmatrix} -0.5k_2 & -0.5k_2 & 0 \\ -0.5k_2 & -0.5k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{72} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5k_2 & -0.5k_2 \\ 0 & -0.5k_2 & -0.5k_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{41} &= \mathbf{K}_{32}, \mathbf{K}_{43} = \mathbf{K}_{21}, \mathbf{K}_{55} = \mathbf{K}_{33}, \mathbf{K}_{62} = \mathbf{K}_{51}, \mathbf{K}_{63} = \mathbf{K}_{54}, \\ \mathbf{K}_{64} &= \mathbf{K}_{53}, \mathbf{K}_{65} = \mathbf{K}_{21}, \mathbf{K}_{66} = \mathbf{K}_{44}, \mathbf{K}_{71} = \mathbf{K}_{53}, \mathbf{K}_{73} = \mathbf{K}_{51}, \\ \mathbf{K}_{74} &= \mathbf{K}_{61}, \mathbf{K}_{75} = \mathbf{K}_{31}, \mathbf{K}_{76} = \mathbf{K}_{32}, \mathbf{K}_{77} = \mathbf{K}_{11}, \mathbf{K}_{81} = \mathbf{K}_{72}, \\ \mathbf{K}_{82} &= \mathbf{K}_{53}, \mathbf{K}_{83} = \mathbf{K}_{52}, \mathbf{K}_{84} = \mathbf{K}_{51}, \mathbf{K}_{85} = \mathbf{K}_{32}, \mathbf{K}_{86} = \mathbf{K}_{42}, \\ \mathbf{K}_{87} &= \mathbf{K}_{21}, \mathbf{K}_{88} = \mathbf{K}_{22} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{EA_1}{h} \\ k_2 &= \frac{EA_2}{\sqrt{2}h} \end{aligned}$$

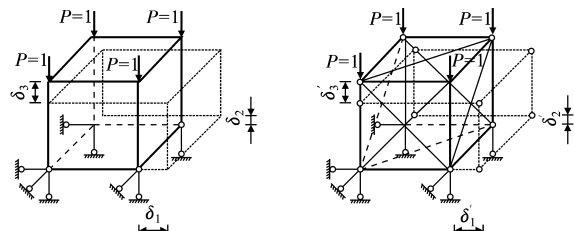
1.3 等效分析

空间等效桁架单元由空间微元体单元等效而

来,等效原则是刚度等效,即在相同的节点荷载作用下结构变形相等。本文考虑空间等效桁架单元与空间微元体单元的正应变等效和剪应变等效,并考虑泊松比的影响,进而得到由空间微元体参数表示的空间等效桁架单元的单元刚度矩阵。

1.3.1 正应变等效分析

对空间微元体单元与空间等效桁架单元施加如图3所示任意大小的单位节点荷载 P ,单元将产生正应变,根据等效原则,节点位移应相等,即 $\delta_1 = \delta'_1$, $\delta_2 = \delta'_2$, $\delta_3 = \delta'_3$ 。



(a) 空间微元体单元正应变 (b) 空间等效桁架单元正应变

图3 正应变等效分析

Fig. 3 Equivalent Analysis of Normal Strain

根据材料力学和结构力学原理,可得相应的节点位移分别为

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 = \delta_2 = h\epsilon_1 &= \frac{h}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{4\mu}{Eh} \\ \delta_3 = h\epsilon_3 &= \frac{h}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{4}{Eh} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta'_1 = \delta'_2 &= \frac{k_2}{5k_1k_2 + 2k_1^2 + 2k_2^2} \\ \delta'_3 &= -\frac{2k_1 + 3k_2}{5k_1k_2 + 2k_1^2 + 2k_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: ϵ_1, ϵ_3 分别为单元体在 x, z 方向的应变; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 分别为单元体在 x, y, z 方向上的应力。

由 $\delta_1 = \delta'_1, \delta_2 = \delta'_2, \delta_3 = \delta'_3$ 可得

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{(1-3\mu)Eh}{4(1+\mu)(1-2\mu)} \\ k_2 &= \frac{\mu Eh}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

1.3.2 剪应变等效分析

空间微元体单元与空间等效桁架单元在如图4所示节点荷载作用下,将产生剪应变,根据等效原则,节点位移应相等,即 $\delta_4 = \delta'_4$ 。

根据材料力学和结构力学原理,可得相应的节点位移 δ_4, δ'_4 分别为

$$\left. \begin{aligned} \delta_4 = \gamma h &= \frac{\tau}{G} h = \frac{4}{Gh^2} h = \frac{4}{Gh} \\ \delta'_4 &= \frac{2}{k_2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

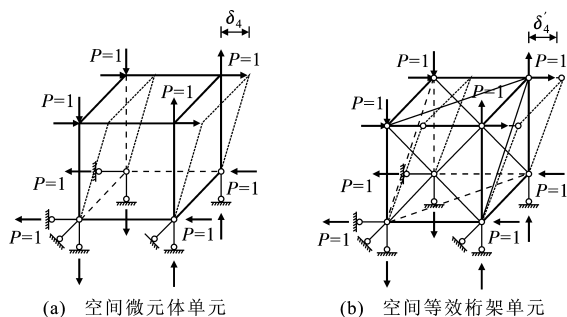


图 4 剪应变等效分析

Fig. 4 Equivalent Analysis of Shear Strain

式中: γ 为单元体在 Oxz 平面的角应变; τ 为在 Oxy 平面的剪切应力。

由 $\delta_4 = \delta'_4$ 可得

$$k_2 = \frac{Gh}{2} \quad (6)$$

1.3.3 剪切刚度对比

从前文推导可知,在正应变和剪应变等效下,由斜杆的刚度 k_2 相等可得

$$G = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad (7)$$

根据弹性理论有

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (8)$$

当 $\mu=0.25$ 时,式(7),(8)中的剪切模量 G 相等,实际混凝土 μ 值范围为 $0.15 \sim 0.23$,与 $\mu=0.25$ 很接近,且实际混凝土在轴压作用下泊松比有所增长,同时从文献[6]可知,用正应变等效得到的斜杆刚度代替剪应变等效得到的斜杆刚度,计算误差很小,对结果影响不大。

1.4 杆件等效截面面积

根据材料力学原理和求得的杆件等效刚度 k_1 , k_2 , 可得杆件的等效截面面积 A_1 , A_2 分别为

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{(1-3\mu)h^2}{4(1+\mu)(1-2\mu)} \\ A_2 &= \frac{\sqrt{2}\mu h^2}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

1.5 单元中各杆轴力的计算

求出各节点的位移之后,可以根据每根杆件的刚度和节点位移求出各杆件的轴力 N^e , 即

$$N^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -\cos(\theta_x) \\ -\cos(\theta_y) \\ -\cos(\theta_z) \\ \cos(\theta_x) \\ \cos(\theta_y) \\ \cos(\theta_z) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中: A 为杆件截面面积; L 为杆件长度; i, j 分别为杆件两端节点编号; $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 分别为杆件与 x, y, z 轴的夹角; u, v, w 分别为杆端沿 x, y, z 轴的位移。

2 模型在钢筋混凝土结构非线性分析中的应用

2.1 钢筋混凝土结构有限元模型及基本假定

本文钢筋混凝土结构有限元模型采用分离式模型,把钢筋混凝土结构离散为混凝土单元和钢筋单元,混凝土单元采用本文推导的空间等效桁架单元,钢筋单元采用杆件单元,其单元刚度矩阵 K_s 。按照式(11)进行计算,即

$$K_s = \frac{E_s A_s}{L} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma & -\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ \beta^2 & \beta\gamma & -\alpha\beta & -\beta^2 & -\beta\gamma & \gamma^2 \\ \gamma^2 & -\alpha\gamma & -\beta\gamma & -\gamma^2 & \alpha\gamma & \beta\gamma \\ \text{sym.} & & & \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ & & & \beta^2 & \beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中: E_s, A_s 分别为钢筋的弹性模量和截面面积; $\alpha = \cos(\theta_x)$; $\beta = \cos(\theta_y)$; $\gamma = \cos(\theta_z)$ 。

将混凝土单元刚度矩阵和钢筋单元刚度矩阵按照刚度集成原理进行集成,可得钢筋混凝土结构有限元模型的整体刚度矩阵。

在一般的钢筋混凝土结构中,可以认为钢筋和混凝土之间粘结整体性比较好,二者之间没有相对滑移。混凝土空间等效桁架单元与钢筋单元在节点处相互铰接,二者之间位移完全协调。本文采用的钢筋混凝土空间等效桁架单元模型如图 5 所示。

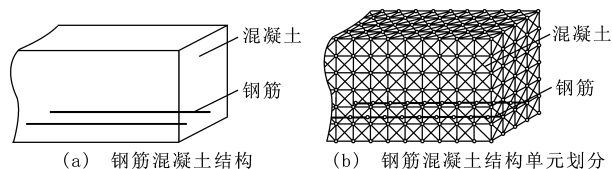


图 5 钢筋混凝土空间等效桁架单元模型

Fig. 5 Space Equivalent Truss Element Models of RC Structure

2.2 钢筋混凝土材料本构关系和破坏准则

本文根据空间等效桁架单元的组成特征,混凝土材料采用在单向受力作用下的本构关系,当混凝土构件处于受压状态时,应力-应变关系采用式(12)所示的 Hongnestad 分段表达式^[7],即

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 \left[2 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right] & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 \\ \sigma_0 \left(1 - 0.15 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_u - \epsilon_0} \right) & \epsilon_0 < \epsilon \leq \epsilon_u \end{cases} \quad (12)$$

式中: σ_0, ϵ_0 分别为混凝土达到抗压强度时的应力和应变; ϵ_u 为混凝土的极限压应变; σ 为混凝土应力; ϵ 为混凝土应变。

式(12)中当混凝土应变达到极限压应变 $\epsilon_u = 0.003\ 3$ 时,认为桁架杆压坏,当混凝土构件处于受拉状态时,应力-应变关系采用式(13)所示的直线表达式^[8],即

$$\sigma = \frac{f_t}{\epsilon_t} \epsilon \quad 0 < \epsilon \leq \epsilon_t \quad (13)$$

式中: f_t 为混凝土的抗拉强度; ϵ_t 为混凝土达到抗拉强度时的拉应变。

式(13)中不考虑下降段的影响,当混凝土拉应力达到抗拉强度时,认为桁架杆拉坏。

一般的钢筋混凝土结构破坏时钢筋的应变都小于 0.01,没有进入强化阶段,因此,在本文的空间等效桁架模型中,钢筋的应力-应变关系采用式(14)所示的理想弹塑性模型^[3],即

$$\sigma_s = \begin{cases} \frac{f_y}{\epsilon_y} & -\epsilon_y \leq \epsilon_s \leq \epsilon_y \\ f_y & \epsilon_y < \epsilon_s \leq \epsilon_b \text{ 或 } -\epsilon_b \leq \epsilon_s < -\epsilon_y, \epsilon_b \leq 0.01 \end{cases} \quad (14)$$

式中: σ_s 为钢筋应力; ϵ_s 为钢筋应变; f_y 为钢筋的屈服强度; ϵ_y 为钢筋达到屈服强度时的屈服应变; ϵ_b 为钢筋的极限应变。

钢筋在屈服点以前应力-应变关系符合胡克定律,屈服点以后按理想的塑性体工作,且极限应变规定为 $\epsilon_b = 0.01$ 。

2.3 混凝土单元破坏及裂缝处理

在本文空间等效桁架单元中,空间微元体单元中各种复合受力状态都转换成了桁架单元中各杆的轴向受力状态,当杆件的拉应力超过开裂强度之后,即认为该杆件受拉开裂,退出工作,同时释放单元内力,将单元内力转化成节点力重新进行迭代计算。杆件开裂后记录下杆件的位置,在后续加载中重复上述步骤,然后将所有标注的裂缝位置用曲线连接起来,就可以描述裂缝的分布和走势。

2.4 钢筋单元屈服后的处理

在有限元计算过程中,当钢筋单元超过屈服条件时,须根据钢筋采用的单元形式和应力-应变关系作出相应的调整。在施加某一级荷载增量的过程中,当钢筋应变超过 ϵ_y 达到 ϵ_t 时,须做相应的处理^[7]:调整弹性模量 E 的取值,此时 $E=0$;同时将超额应力转换成节点力重新进行分配,按屈服前钢筋弹性模量 E_0 计算的钢筋应力 $\sigma_s = E_0 \epsilon_t$ 超过了钢筋的屈服强度 f_y ,把超额应力 $\sigma_{ex} = \sigma_s - f_y$ 转化成节点

力 F^e ,即

$$F^e = \sigma_{ex} A_s = (\sigma_s - f_y A_s) A_s \quad (15)$$

3 钢筋混凝土桥墩非线性分析算例

文献[6]做了钢筋混凝土桥墩模型试验,模型的尺寸及配筋如图6所示。该模型由1个墩身与1个底座组成,墩身截面尺寸为 $200\text{ mm} \times 200\text{ mm}$,墩身高为 $1\ 200\text{ mm}$,墩身顶部施加的轴力 $N=155\text{ kN}$,横向荷载 F 施加在模型的左侧,荷载加载点与墩底的距离为 $1\ 000\text{ mm}$,模型所用材料混凝土强度为 27.66 MPa ,纵向钢筋的屈服应力为 392.95 MPa ,弹性模量为 $2.0 \times 10^5\text{ MPa}$,箍筋的屈服应力为 210 MPa ,弹性模量为 $2.1 \times 10^5\text{ MPa}$ 。

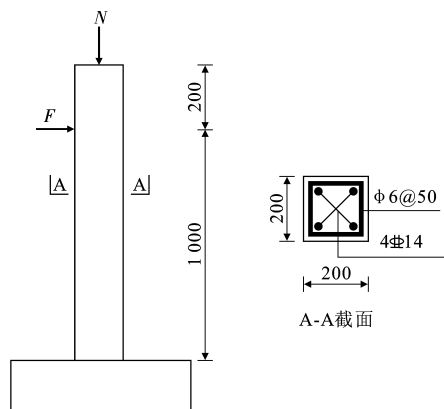


图6 钢筋混凝土桥墩模型尺寸及配筋(单位:mm)

Fig. 6 Size and Reinforcement of RC Bridge Pier Model (Unit:mm)

借助 ANSYS 10.0 采用本文空间等效桁架单元和文献[5]平面等效桁架单元,分别对钢筋混凝土桥墩进行非线性分析。用空间等效桁架单元对钢筋混凝土结构进行网格划分时,采用本文第2.1节中介绍的计算模型,将混凝土单元转化成空间等效桁架单元,单元外围尺寸为 25 mm ,钢筋单元为一维杆单元,假定钢筋与混凝土单元之间粘结良好,不需插入粘结单元,二者在节点处直接连接,钢筋和混凝土的本构关系采用第2.2节中介绍的单轴受力作用下的本构关系。

将用空间等效桁架单元和平面等效桁架单元计算得到的荷载-位移曲线与试验得到的曲线进行比较,如图7所示。从图7可以看出:用空间等效桁架单元计算得到的极限荷载为 31.32 kN ,平面等效桁架单元计算得到的极限荷载为 27.18 kN ,试验得到的极限荷载为 33.21 kN ;空间等效桁架单元精度优于平面等效桁架单元,这是因为平面问题是空间问题的一种简化,空间等效桁架单元计算结果与试验

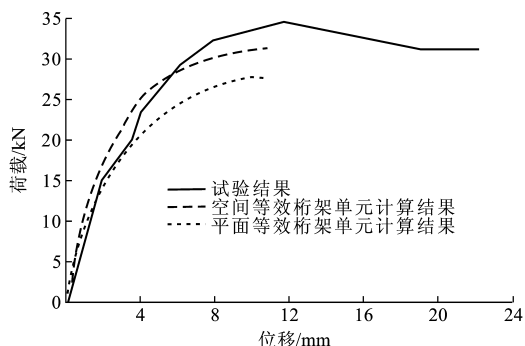


图7 钢筋混凝土桥墩荷载-位移曲线

Fig. 7 Load-displacement Curves of RC Bridge Pier

结果相差 5.69%，满足工程精度要求。

用本文空间等效桁架单元分析钢筋混凝土结构的另一重要特点就是裂缝的模拟,在本文中混凝土单元用空间等效桁架单元代替,当单元中杆件达到抗拉强度时,混凝土杆件断裂,可以根据杆件的断裂位置描述裂缝的发展情况。本文模型的剪跨比 $\lambda = 5$,属于弯曲型结构

形式,其在极限荷载作用下的变形及裂缝如图 8 所示。从图 8 可以看出,在底部截面附近,由于弯矩、应力比较大,竖向杆件相继被拉断,将拉断的杆件连接起来可以形成一条条横向的弯曲型裂缝,符合实际结构的受力特点。

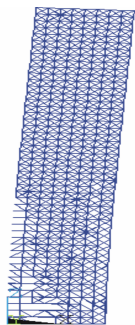


图8 钢筋混凝土桥墩模型在极限荷载作用下的变形及裂缝

Fig. 8 Deformation and Cracks of RC Bridge Pier Model Under Limit Load

4 结 语

(1)采用空间等效桁架单元代替空间微元体单元对三维问题进行分析是可行的,特别是对于钢筋混凝土结构,在满足工程精度要求的情况下,不仅能将复杂的模型简单化,而且还能够准确地描述裂缝的开展。

(2)对于钢筋混凝土结构,确定混凝土材料的本构关系、破坏准则、钢筋屈服准则和钢筋混凝土组合模型就可以用空间等效桁架单元模型模拟整个构件从加载到破坏的全过程。需要指出的是,本文未考虑几何非线性问题。

(3)对空间等效桁架单元的研究尚处于起步阶

段,如何将此种单元与其他单元组合应用等问题还需进一步研究。

参考文献:

References:

- [1] NGO D, SCORDELIS A C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams[J]. ACI Journal Proceedings, 1967, 64(3): 152-163.
- [2] 王传志, 过镇海, 张秀琴. 二轴和三轴受压混凝土的强度试验[J]. 土木工程学报, 1987, 20(1): 15-27.
WANG Chuan-zhi, GUO Zhen-hai, ZHANG Xiu-qin. Experimental Investigation of Concrete Strength Under Biaxial and Triaxial Compressive Stresses[J]. China Civil Engineering Journal, 1987, 20(1): 15-27.
- [3] 吕西林, 金国芳, 吴晓涵. 钢筋混凝土结构非线性有限理论与应用[M]. 上海: 同济大学出版社, 1997.
LU Xi-lin, JIN Guo-fang, WU Xiao-han. Nonlinear FEM Theory and Application of Reinforced Concrete Structures[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1997.
- [4] HIRAISHI H. Evaluation of Shear and Flexural Deformations of Flexural Type Shear Walls[J]. Bulletin of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering, 1984, 17(2): 135-144.
- [5] 吴方伯, 丁先立, 周绪红, 等. 采用等效平面桁架单元对钢筋混凝土结构进行非线性分析[J]. 建筑结构学报, 2005, 26(5): 112-117.
WU Fang-bo, DING Xian-li, ZHOU Xu-hong, et al. Study on the Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures by Equivalent Plane Truss Element Method[J]. Journal of Building Structures, 2005, 26(5): 112-117.
- [6] 秦 东. 钢筋混凝土桥墩横向地震破坏与倒塌的计算机仿真[D]. 上海: 同济大学, 2000.
QIN Dong. Computer Simulation for Transverse Earthquake Damage and the Collapse of Reinforced Concrete Bridge Pier[D]. Shanghai: Tongji University, 2000.
- [7] 江见鲸. 钢筋混凝土结构非线性有限元分析[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1994.
JIANG Jian-jing. Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structure[M]. Xi'an: Shaanxi Science and Technology Press, 1994.
- [8] 康清梁. 钢筋混凝土有限元分析[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1996.
KANG Qing-liang. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structure[M]. Beijing: China Water & Power Press, 1996.