

文章编号:1673-2049(2016)04-0001-06

TMD等强度悬臂梁实际应用时的频率精确分析

陈政清, 田静莹, 黄智文, 王嘉兴

(湖南大学 风工程与桥梁工程湖南省重点实验室, 湖南 长沙 410082)

摘要: 为了确定实际应用中调谐质量阻尼器(TMD)刚度单元的梯形悬臂梁参数,建立了梯形悬臂梁频率的精确计算公式,计算了梯形等强度悬臂梁与三角形等强度悬臂梁频率的误差,利用梯形悬臂梁频率计算公式确定了TMD等强度悬臂梁的设计步骤与程序,给出了工程示例,并使用仿真软件ANSYS进行了验证。结果表明:悬臂梁自由端的宽度小于固定端宽度的12.65%时,梯形等强度悬臂梁与三角形等强度悬臂梁的频率相对误差小于5%;所用程序可以用于确定满足频率精度要求的TMD等强度悬臂梁的参数,对工程实际有较大指导意义。

关键词: 调谐质量阻尼器;等强度悬臂梁;固有频率;精确分析;程序设计

中图分类号:U441

文献标志码:A

Exact Analysis of Natural Frequency of Equal Strength Cantilever Beams of TMD in Practical Cases

CHEN Zheng-qing, TIAN Jing-ying, HUANG Zhi-wen, WANG Jia-xing

(Key Laboratory for Wind and Bridge Engineering of Hunan Province, Hunan University, Changsha 410082, Hunan, China)

Abstract: In order to determine the parameters of trapezoidal cantilever beam of stiffness element of tuned mass damper (TMD) in practical cases, the exact analytic solution of frequency of trapezoidal cantilever beam was deduced. The error of frequency between triangular equal strength cantilever beam and trapezoidal equal strength cantilever beam was calculated. The design procedure and program of equal strength cantilever beam of TMD using the formula of frequency of trapezoidal cantilever beam was defined. A typical example in engineering field was given and the results were checked with simulation software ANSYS. The results show that when the width of free end is less than 12.65% of the width of fixed end, the error of frequency between them is less than 5%. The designed program can be applied to determine parameters of equal strength cantilever beams of TMD when the accuracy requirements of frequency are met, and it is of great value when applied to the practical cases of engineering.

Key words: tuned mass damper; equal strength cantilever beam; natural frequency; exact analysis; programming

0 引言

随着土木工程基础理论的发展,结构不单要考

虑静力作用,也要满足风荷载和地震荷载等动荷载作用下的振动问题。传统的结构设计仅依靠结构自身的性能,如增加结构刚度、强度、阻尼和改变质量

收稿日期:2016-04-12

基金项目:国家自然科学基金项目(91215302)

作者简介:陈政清(1947-),男,湖南湘潭人,教授,博士研究生导师,中国工程院院士,工学博士,E-mail:zqchen@hnu.edu.cn。

分布来抵抗振动。结构振动控制理论的研究和应用是结构抗振研究的重大突破。根据是否需要外界能源,结构控制方法可以分为以下 4 种:①被动控制,不需要外部能源,仅依靠控制装置与结构的相互作用提供控制,如调谐质量阻尼器(TMD)和多调谐液体阻尼器(TLD);②主动控制,需要外部能源提供控制,控制力的大小由前馈外激励和反馈结构的动力响应决定;③半主动控制,所需能源较少,以被动控制为主;④混合控制,如主-被动控制^[1]。在众多可用的控制装置中,TMD 是最常用的控制装置,TMD 的形式多种多样。刚度单元为弹簧时,若用弹簧控制竖向刚度,则需要有足够的空间满足弹簧的静力伸长与振动位移(如杨浦大桥一阶竖向弯曲频率为 0.286 Hz,弹簧净伸长约为 3 m^[2]),若用弹簧控制横向刚度,则弹簧不能承受 TMD 质量单元的重力,质量单元底部还需要有承受重力的构造,构造比较复杂,所以在使用 TMD 控制结构的横向振动时常使用摆式构造,如台北 101 大厦抑制风振的 TMD 使用的钢索^[3]和榕江特大桥抑制吊杆振动的 TMD 使用的等强度悬臂梁^[4]都是摆式 TMD 刚度单元。等强度悬臂梁作为刚度单元时,一是可以控制 TMD 最大振动对应的应力在疲劳控制应力之内,从而避免往复运动产生疲劳破坏的可能^[4];二是可以最大程度减少材料的使用^[5],更加经济;三是可以同时达到容许应力,减少应力分布不均现象,从而提高安全系数^[6]。

目前对于等强度悬臂梁的研究主要集中在将等强度悬臂梁作为高频振动传感器的振动元件、光纤光栅传感器的转换元件,以及广泛利用等强度悬臂梁标定应变测试装置和测力传感器。如 1987 年耿运贵^[7]设计了等强度悬臂梁标定应变片的方法和之后其他学者对等强度标定梁应变的不确定分析和最佳设计方法研究,2009 年孙华等^[8]推导了三角形等强度悬臂梁的共振频率计算公式,2015 年王雷等^[9]研究了不同尺寸等强度悬臂梁的自由端挠度量程与作用力量程。

然而,对于实际应用中等强度悬臂梁自振频率的研究却很少,因为实际应用中 TMD 等强度悬臂梁的自由端必须悬挂质量单元,自由端的宽度不能为 0,即等强度悬臂梁的形状不能为三角形。在实际中将三角形等强度悬臂梁自由端加宽后,梁的刚度变大、基频变大。若使用三角形等强度悬臂梁固有频率的简单计算公式来确定符合 TMD 设计频率的梁的参数,则会与 TMD 设计频率产生偏差。

2014 年邱艳宇等^[10]研究发现,在三角形悬臂梁的自由端接上一块长度为总长度 28%、宽度为固定端宽度 45%的矩形板时,其基频与同样尺寸的三角形悬臂梁的基频相差 44%。王文熙^[11]研究发现,频率偏离对 TMD 的减振效果有很大影响,所以当自由端加宽时,悬臂梁的各个参数都需要进一步调整,传统的调整方法是使用有限元软件人为逼近,若是施工过程中存在反复修改,则人为逼近非常麻烦。因此,本文首先研究了实际使用的梯形悬臂梁自由端加宽多少时其频率与三角形梁的频率误差小于限值,即可以使用三角形梁频率计算公式来确定梁的参数;其次,推导了梯形悬臂梁频率的精确计算公式,以及应用此公式设计 TMD 刚度单元时的参数确定方式与程序;最后,提供了 TMD 等强度悬臂梁刚度单元的设计示例,并用仿真软件 ANSYS 对比验证了梯形等强度设计方法的精确性。

1 梯形悬臂梁刚度

图 1 为 TMD 工作时悬臂梁的受力分析。由图 1 可以看出,当 TMD 工作时,其质量单元发生横向振动,梁同时受到横向力(惯性力) F 和重力 G 的影响,此时梁最合理、最经济的设计方式为等强度悬臂梁,即在特定受力条件下梁的任意截面上的最大弯曲正应力同时达到容许应力,这样材料才能得以充分利用。

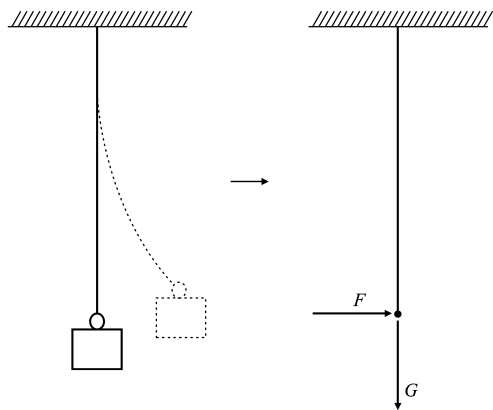


图 1 TMD 工作时悬臂梁的受力分析

Fig. 1 Force Analysis of Cantilever of TMD when Working

当梁只受到横向力作用且厚度不变时,等强度悬臂梁的宽度 $D(x)$ 是 x 的正比例函数,此时梁为三角形等强度悬臂梁(图 2),但工程实际中因为需要在自由端悬挂质量单元,因此常用的形式为梯形,如图 3 所示。

1.1 弯曲刚度

梯形等强度悬臂梁的尺寸如图 4 所示,其中,

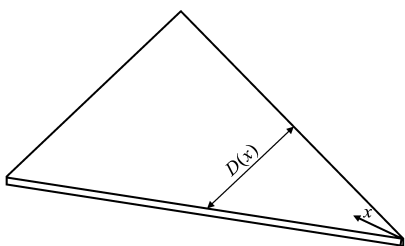


图 2 三角形等强度悬臂梁

Fig. 2 Triangular Equal Strength Cantilever Beam

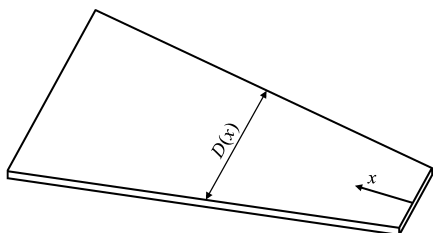


图 3 梯形等强度悬臂梁

Fig. 3 Trapezoidal Equal Strength Cantilever Beam

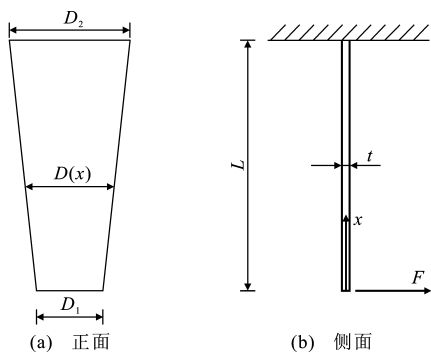


图 4 等强度悬臂梁尺寸参数

Fig. 4 Size Parameters of Equal Strength Cantilever Beam

D_1 为自由端宽度, D_2 为固定端宽度, L 为悬臂梁长度, t 为梁的厚度, x 轴沿梁的纵向并以自由端为原点。梁的宽度 $D(x)$ 随 x 变化如下

$$D(x) = \frac{D_2 - D_1}{L}x + D_1 \quad (1)$$

在不考虑大变形的情况下悬臂梁的柔度 δ 为

$$\delta = \int_0^L \frac{M_F \bar{M}}{EI(x)} dx = \int_0^L x^2 / \left(\frac{1}{12} E D(x) t^3 \right) dx = \frac{12L^3}{Et^3 (D_2 - D_1)^2} \left[\frac{D_2 - 3D_1}{2} + \frac{D_1^2}{D_2 - D_1} \ln \left(\frac{D_2}{D_1} \right) \right] \quad (2)$$

式中: M_F, \bar{M} 分别为在悬臂梁自由端作用力 F 和作用单位力时沿悬臂梁的弯矩; E 为梁的弹性模量; $I(x)$ 为梁 x 位置处的弯曲刚度。

根据等强度悬臂梁的弯曲刚度 $K_1 = \frac{1}{\delta}$ 可得

$$K_1 = Et^3 (D_2 - D_1)^2 / \left\{ 12L^3 \left[\frac{D_2 - 3D_1}{2} + \frac{D_1^2}{D_2 - D_1} \ln \left(\frac{D_2}{D_1} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{D_1^2}{D_2 - D_1} \ln \left(\frac{D_2}{D_1} \right) \} \quad (3)$$

1.2 几何刚度

由于 TMD 控制效果的需要,在实际应用时等强度悬臂梁悬臂端安装的质量块往往质量较大(与悬臂梁的自身质量相比),会引起比较显著的几何刚度效应。因此,在计算等强度悬臂梁 TMD 系统的刚度时还应计入质量块引起的几何刚度,由假定振型法可以求得几何刚度。忽略悬臂梁自身的重力,只考虑端部质量块的重力,由于等强度悬臂梁的振动方向与端部质量块重力的作用方向垂直,所以求振型函数 $\varphi(x)$ 时可以在梁端部沿振动方向作用一横向力 P ,并在梁上任意位置 x 处作用一单位力 P_0 ,2 个作用力的弯矩 M_p 图与 \bar{M} 图如图 5 所示,假定刚度 EI 沿梁长为定值,由图乘法可得 x 处的横向位移 $V(x)$ 为

$$V(x) = \frac{1}{2EI} x^2 P \left(L - \frac{1}{3}x \right) = \frac{1}{6} P x^2 (3L - x) \quad (4)$$

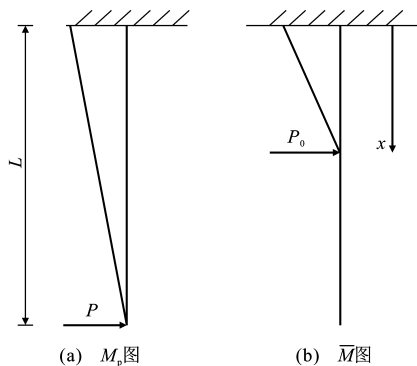


图 5 自由端作用横向力时等强度悬臂梁的振型计算

Fig. 5 Vibration Mode Calculation of Equal Strength

Cantilever Beam when Transversely Forced Is on

Free End

令自由端的位移 $V(L) = \frac{PL^3}{3EI} = Z_0$, 可得振型函

数 $\varphi(x) = \frac{V(x)}{Z_0}$, 从而得

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2L^3} (3L - x) \quad (5)$$

由广义几何刚度 K_2 的定义可知

$$K_2 = \int_0^L N [\varphi'(x)]^2 dx = \frac{6N}{5L} \quad (6)$$

式中: N 为梁所受的拉力, $N = Mg$, M 为 TMD 质量单元的质量, g 为重力加速度。

综上所述,梯形梁的总刚度 $K = K_1 + K_2$, 即

$$K = Et^3 (D_2 - D_1)^2 / \left\{ 12L^3 \left[\frac{D_2 - 3D_1}{2} + \frac{D_1^2}{D_2 - D_1} \ln \left(\frac{D_2}{D_1} \right) \right] \right\} + \frac{6Mg}{5L}$$

$$\frac{D_1^2}{D_2 - D_1} \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)] + \frac{6N}{5L} \quad (7)$$

2 TMD 等强度悬臂梁设计

2.1 设计要求

TMD 等强度悬臂梁必须满足 3 个方面的要求:①频率要求,只有保证 TMD 的频率与设计频率一致才能发挥 TMD 的作用;②强度要求,当 TMD 摆动时,会受到质量单元的惯性力,必须保证其在惯性力作用下不会破坏;③构造要求,由于 TMD 的安装空间和施工难度的限制,其参数必须满足构造要求。

2.2 频率要求

在 TMD 的设计中,需要根据所控制结构的振动频率确定 TMD 的最优频率 f , 达到最佳抑振效果。在 TMD 的频率 f 确定后,其刚度单元需要满足

$$K = K_1 + K_2 = \omega^2 M = 4\pi^2 f^2 M \quad (8)$$

式中: ω 为等强度悬臂梁的自振角频率。

2.2.1 D_1 的取值范围

三角形等强度悬臂梁只有长度 L 、厚度 t 以及固定端宽度 D_2 三个参数,若可以使用三角形梁的频率公式确定梁的参数,并加大自由端的宽度 D_1 以满足构造要求,则能够大大简化计算过程。因此,首先要确定当 D_1 的取值范围为多少时可以使梯形梁与三角形梁的频率相对误差满足精度要求。

设误差限定值为 ϵ^* , 由公式(7)可知,梯形梁的刚度为

$$K_L = K_{L1} + K_{L2} = Et^3 (D_2 - D_1)^2 / \{12L^3 \cdot [\frac{D_2 - 3D_1}{2} + \frac{D_1^2}{D_2 - D_1} \ln(\frac{D_2}{D_1})] + \frac{6N}{5L}\}$$

式中: K_L 为梯形梁的总刚度; K_{L1} 为梯形梁的弯曲刚度; K_{L2} 为梯形梁的重力刚度。

三角形梁的刚度为

$$K_T = K_{T1} + K_{T2} = \frac{Et^3 D_2}{6L^3} + \frac{6N}{5L}$$

式中: K_T 为三角形梁的总刚度; K_{T1} 为三角形梁的弯曲刚度; K_{T2} 为三角形梁的重力刚度。

若要求频率相对误差 ϵ 小于限定值,则有

$$\epsilon = \frac{\omega_L - \omega_T}{\omega_T} = \sqrt{(K_{L1} + \frac{6N}{5L}) / (K_{T1} + \frac{6N}{5L})} - 1 \leq$$

$$\sqrt{\frac{K_{L1}}{K_{T1}}} - 1 \leq \epsilon^* \quad (9)$$

式中: ω_L , ω_T 分别为梯形梁和三角形梁的自振角频率。

当悬臂梁自由端宽度增加时,其刚度必然增加,即刚度 K_{L1} 为 D_1 的单调递增函数。令 $f(D_1) = \sqrt{\frac{K_{L1}}{K_{T1}}}$, 则 $f(D_1)$ 为 D_1 的单调递增函数。

不等式(9)等价于

$$\{Et^3 (D_2 - D_1)^2 / [12L^3 (\frac{D_2 - 3D_1}{2} + \frac{D_1^2}{D_2 - D_1} \ln(\frac{D_2}{D_1})) + \frac{6N}{5L}]\}^{1/2} \leq 1 + \epsilon^*$$

即

$$\{(D_2 - D_1)^3 / [D_2 ((D_2 - 3D_1)(D_2 - D_1) + 2D_1^2 \ln(\frac{D_2}{D_1}))]\}^{1/2} \leq 1 + \epsilon^* \quad (10)$$

令 $\frac{D_2}{D_1} = x, x \in [1, +\infty], 1 + \epsilon^* = k$, 式(10)等

价于

$$\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x[(x-3)(x-1) + 2\ln(x)]}} \leq k \quad (11)$$

因为 x 为 D_1 的单调递减函数, $f(D_1)$ 为 D_1 的单调递增函数, 则 $f(x)$ 为 x 的单调递减函数。

令方程式(11)的解为 x^* , 则

$$\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x[(x-3)(x-1) + 2\ln(x)]}} = k \quad (12)$$

由单调性可知, 当 $x \geq x^*$ 时, 不等式(11)成立。

化简方程式(12)得

$$(k^2 - 1)x^3 + (3 - 4k^2)x^2 + (3k^2 - 3)x + 2k^2 x \ln(x) - 1 = 0 \quad (13)$$

若令误差限定值为工程精度, 即 $\epsilon^* = 5\%$, 解得

$$x^* = \frac{D_2}{D_1} = 7.9072$$

即 $D_1 \leq 12.65\% D_2$ 时, 可以保证梯形梁与三角形梁的频率相对误差小于 5% 。

2.2.2 梯形梁的频率计算公式

由第 2.2.1 节可知, 当 $D_1 \leq 12.65\% D_2$ 且满足构造要求时, 可使用三角形梁的频率计算公式确定梁的参数, 且频率相对误差小于 5% 。当上述公式不能满足要求时, 则需要使用梯形梁频率的精确公式确定梁的参数, 即

$$4\pi^2 f^2 ML^3 + \frac{6N}{5} L^2 + Et^3 (D_2 - D_1)^2 / \{12[\frac{D_2 - 3D_1}{2} + \frac{D_1^2}{D_2 - D_1} \ln(\frac{D_2}{D_1})]\} = 0 \quad (14)$$

2.3 强度要求

悬臂梁所受最大应力 σ_{\max} 应满足 $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, $[\sigma]$ 为等强度悬臂梁的容许应力。设悬臂板梁摆动的振幅为 A , 则惯性力 $F = AM(2\pi f)^2$ 。TMD 在工作状

态下的最大应力发生在固定端,其大小由质量块运动引起的惯性力和质量块的重力共同决定,即

$$\sigma_{\max}=\frac{FL}{I(L)}\frac{t}{2}+\frac{Mg}{tD_2}=\frac{6FL}{D_2t^2}+\frac{Mg}{tD_2}\leqslant[\sigma]\quad(15)$$

式中: $I(L)$ 为 $x=L$ 处等强度悬臂梁的惯性矩, $I(L)=\frac{1}{12}D_2t^3$ 。

2.4 构造要求

TMD 安装在结构上其梁长 L 和固定端宽度 D_2 受结构尺寸以及安装空间的限制;自由端宽度 D_1 受悬挂质量单元所需要的螺栓个数、尺寸的限制;板厚 t 受到标准钢板尺寸以及施工难度的限制。

2.5 参数设计方法

由方程式(14)可知,梯形梁需要同时确定的设计参数包括梁长 L 、板的厚度 t 、固定端宽度 D_1 、自由端宽度 D_2 四个参数。在满足设计要求的条件下分别对 t,D_1,D_2,L 取值,求得梯形梁的频率,将其与设计频率比较,小于误差的设计参数序列即可使用。

2.6 工程示例

某悬索桥的某阶人致横向振动频率 $f=1.39$ Hz,欲使用板式电涡流 TMD 抑制其振动。此桥主梁为边主梁,是包含 2 道纵梁和若干横梁的梁格体系,TMD 放置在两纵梁之间的梁格中,受横梁间隔尺寸限制,等强度悬臂梁的固定端宽度范围为 $0.4\text{ m}\leqslant D_2\leqslant 0.6\text{ m}$;受施工限制,梁的板厚范围为 $0.006\text{ m}\leqslant t\leqslant 0.01\text{ m}$,梁长范围为 $0.06\text{ m}\leqslant L\leqslant 1.1\text{ m}$;等强度悬臂梁自由端需悬挂 400 kg 的质量块,受螺丝尺寸与间距限制, $0.1\text{ m}\leqslant D_1\leqslant D_2$ 。设悬臂板梁摆动的振幅 $A=0.06\text{ m}$, $[\sigma]=300\text{ MPa}$ 。使用程序计算出符合 3 个要求的等强度悬臂梁参数序列并随机选取 6 组数据,见表 1。

表 1 设计频率 $f=1.39\text{ Hz}$ 时的部分参数组合
Tab. 1 Partial Parameter Combinations when Design Frequency $f=1.39\text{ Hz}$

序号	t/m	D_1/m	D_2/m	L/m
1	0.007	0.17	0.60	0.7
2	0.007	0.23	0.57	0.7
3	0.007	0.33	0.53	0.7
4	0.008	0.10	0.41	0.7
5	0.008	0.22	0.60	0.8
6	0.008	0.33	0.55	0.8

2.7 仿真校核

用大型仿真软件 ANSYS 进行悬臂板梁模态与应力的仿真校核。梯形梁尺寸如表 1 所示。梁采用

Shell63 壳单元,质量块采用 Mass21 质量单元,悬臂梁固定端约束 6 个自由度,质量单元节点与壳单元节点采用 cp 命令进行铰接,有限元建模如图 6 所示,有限元计算频率和应力分别如图 7 和图 8 所示。

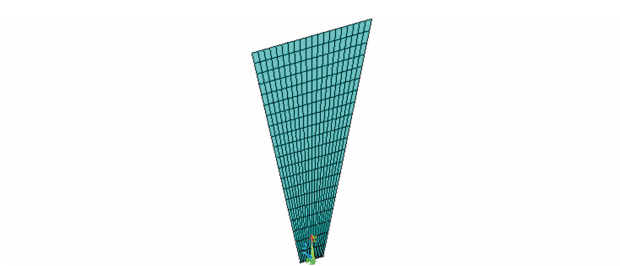


图 6 悬臂梁的有限元模型
Fig. 6 Finite Element Model of Cantilever Beam



图 7 悬臂梁模型计算频率
Fig. 7 Calculated Frequency of Cantilever Beam Model

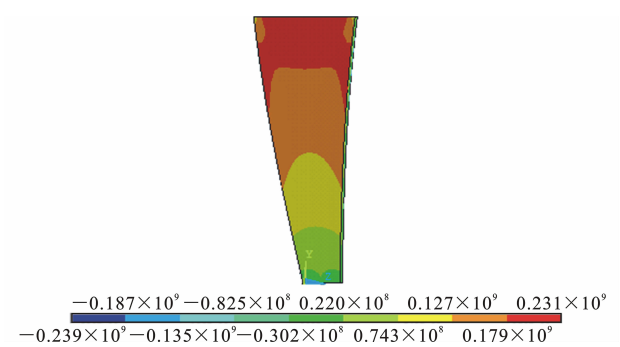


图 8 悬臂梁模型计算应力(单位:Pa)
Fig. 8 Calculated Stress of Cantilever Beam Model (Unit:Pa)

ANSYS 的计算结果与误差如表 2 所示,结果表明经由 MATLAB 程序计算出的参数与有限元仿真的结果差异很小,此程序可以用于工程实际。

3 结 语

(1)给出了梯形梁与三角形梁在只有自由端宽度不相同两者频率相对误差的计算公式,并根据此公式确定了在工程精度下可以使用三角形梁频率公式确定梁参数时梁自由端宽度的取值范围。

表 2 ANSYS 仿真结果

Tab. 2 ANSYS Simulation Results

序号	频率/Hz	最大应力/MPa	频率相对误差/%
1	1.422 9	255	2.366 906
2	1.425 1	268	2.525 180
3	1.430 5	284	2.913 669
4	1.430 8	298	2.935 252
5	1.426 7	231	2.640 288
6	1.428 1	248	2.741 007

(2)给出了用于实际 TMD 梯形悬臂梁的频率精确计算公式,并用 MATLAB 程序确定了梁参数,对工程实际具有很好的指导意义。

(3)研究了梯形等强度悬臂梁频率的精确计算公式,但在实际中等强度悬臂梁还有其他的变形形式,如三角形等强度悬臂梁自由端加宽为矩形形式,其频率的精确计算公式和参数设计程序还有待研究。

(4)推导的三角形悬臂梁与梯形悬臂梁在频率相对误差小于限定值时自由端宽度的取值范围偏保守,还可以进一步深入研究。

参考文献:

References:

[1] 李春祥,刘艳霞,王肇民. 质量阻尼器的发展[J]. 力学进展,2003,33(2):194-206.

LI Chun-xiang, LIU Yan-xia, WANG Zhao-min. A Review on Mass Dampers[J]. Advances in Mechanics,2003,33(2):194-206.

[2] 顾明,陈甦人,项海帆,等. 用于杨浦大桥抖振控制的 MTMD 研究[J]. 振动工程学报,1998,11(1):1-8.

GU Ming, CHEN Su-ren, XIANG Hai-fan, et al. Buffeting Control of the Yangpu Bridge Using Multiple Tuned Mass Dampers[J]. Journal of Vibration Engineering,1998,11(1):1-8.

[3] 刘勋,施卫星,陈希. 单摆式 TMD 简介及其减振性能分析[J]. 结构工程师,2012,28(6):66-71.

LIU Xun, SHI Wei-xing, CHEN Xi. Introduction and Analysis of the Pendulum-type Tuned Mass Damper[J]. Structural Engineers,2012,28(6):66-71.

[4] 雷旭,牛华伟,陈政清,等. 大跨度钢拱桥吊杆减振的新型电涡流 TMD 开发与应用[J]. 中国公路学报,2015,28(4):60-68.

LEI Xu, NIU Hua-wei, CHEN Zheng-qing, et al. Development and Application of a New-type Eddy Current TMD for Vibration Control of Hangers of Long-

span Steel Arch Bridges[J]. China Journal of Highway and Transport,2015,28(4):60-68.

[5] 夏云. 基于 ANSYS 的矩形截面等强度悬臂梁的设计[J]. 中国西部科技,2010,9(23):26-27,32.

XIA Yun. Design the Rectangle Equal Strength Cantilever Based on ANSYS[J]. Science and Technology of West China,2010,9(23):26-27,32.

[6] 张针粒,李世其,朱文革. 一类整星隔振器的等强度设计方法[J]. 振动工程学报,2012,25(4):418-425.

ZHANG Zhen-li, LI Shi-qi, ZHU Wen-ge. Equal Strength Design Method for a Kind of Whole-spacecraft Isolator[J]. Journal of Vibration Engineering,2012,25(4):418-425.

[7] 耿云贵. 等强度悬臂梁实验装置的设计和应用[J]. 焦作矿业学院学报,1987(2):200-206.

GENG Yun-gui. Application and Design of Cantilever Beam with Equalized Strength for Testing Equipment[J]. Journal of Jiaozuo Mining Institute,1987(2):200-206.

[8] 孙华,刘波,周海滨,等. 一种基于等强度梁的光纤光栅高频振动传感器[J]. 传感技术学报,2009,22(9):1270-1275.

SUN Hua, LIU Bo, ZHOU Hai-bin, et al. A Novel FBG High Frequency Vibration Sensor Based on Equi-intensity Cantilever Beam[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators,2009,22(9):1270-1275.

[9] 王雷,刘爱莲,李英娜,等. 光纤光栅在等强度悬臂梁均匀应变区的转换与有限元分析[J]. 光学技术,2015,41(3):221-224.

WANG Lei, LIU Ai-lian, LI Ying-na, et al. The Change of Fiber Bragg Grating in Uniform Strain Zones and Finite Element Analysis[J]. Optical Technique,2015,41(3):221-224.

[10] 邱艳宇,赵跃堂,张虹. 等强度悬臂梁自振频率计算与实验研究[J]. 实验科学与技术,2014,12(2):26-28.

QIU Yan-yu, ZHAO Yue-tang, ZHANG Hong. Calculation and Experiment of Natural Frequency of Equal Strength Beam[J]. Experiment Science and Technology,2014,12(2):26-28.

[11] 王文熙. 桥梁 TMD 系统的参数优化与设计[D]. 长沙:湖南大学,2014.

WANG Wen-xi. Parametric Optimization and Design of Bridge TMD System[D]. Changsha: Hunan University,2014.