

文章编号:1673-2049(2017)01-0058-10

# 一边固支三边简支预制矩形肋底板混凝土双向叠合板的简化弹性计算方法

黄海林, 李金华, 曾垂军, 祝明桥

(湖南科技大学 土木工程学院, 湖南 湘潭 411201)

**摘要:**结合预制矩形肋底板混凝土双向叠合板(简称双向叠合板)的受力特点,分析了当前实际工程设计中存在的问题。针对双向叠合板的正交构造异性特征影响,采用荷载叠加法和正交构造异性板理论求解了均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板挠度及弯矩的解。通过对解作形式变换和引入等效跨度比,将双向叠合板等效为各向同性双向板进行计算,提出了简化弹性计算方法。编程计算得到了双向叠合板强、弱方向刚度比为0.5和2.0,以及等效跨度比在0.5~1.0时的弹性系数。介绍了按照等效跨度比查找各向同性双向板弹性系数的线性插值法,并与编程计算结果进行对比。结果表明:采用简化弹性计算方法得到的结果与编程计算结果吻合良好,完全能够满足工程设计要求,该方法准确可行。

**关键词:**双向叠合板;均布荷载;正交构造异性特征;弹性计算方法

**中图分类号:**TU313.1

**文献标志码:**A

## Simplified Elastic Calculation Method of Precast Rectangular Rib Floor Concrete Two-way Composite Slab with One Edge Clamped and Three Edges Simply Supported

HUANG Hai-lin, LI Jin-hua, ZENG Chui-jun, ZHU Ming-qiao

(School of Civil Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, Hunan, China)

**Abstract:** Based on the mechanical property of precast rectangular rib floor concrete two-way composite slab (two-way composite slab), the existing problems in the practical engineering design were analyzed. According to the influence of the structural orthotropic characteristic of the two-way composite slab, the solutions of the deflection and bending moment of two-way composite slab with one edge clamped and three edges simply supported under uniformly distributed loads were solved by load superposition method and orthotropic plate theory. Through the form transformation of solutions and the introduction of equivalent span ratio, the two-way composite slab was calculated as equivalent isotropic two-way slab, and simplified elastic calculation method was presented. The elasticity coefficients of two-way slab composite were obtained by programming computation when the strong and weak directional stiffness ratios were 0.5 and 2.0 and the equivalent span ratio was 0.5~1.0. The linear interpolation method was introduced to find the elastic coefficients of isotropic two-way slab according to the equivalent span ratio, and the results were compared with the programming calculation results. The results

收稿日期:2016-07-27

基金项目:国家自然科学基金项目(51308207, 51278179);湖南省教育厅科学研究项目(14C0439)

作者简介:黄海林(1984-),男,湖南邵东人,讲师,工学博士, E-mail: hhlvsgeenius@163.com.

shows that the results obtained by simplified elastic calculation method are in good agreement with the programming calculation results. The simplified elastic calculation method can completely meet the engineering design requirements, and is accurate and feasible.

**Key words:** two-way composite slab; uniformly distributed load; orthotropic characteristic; elastic calculation method

0 引言

以预制预应力混凝土矩形肋底板(简称预制底板)作为永久性底模,在预制矩形肋的预留圆孔或矩形孔中穿置横向非预应力筋,预制底板拼接完成后沿拼缝安装适量防裂钢筋或钢筋网片,再在上面浇筑相应厚度的混凝土便形成预制矩形肋底板混凝土双向叠合板(简称双向叠合板)<sup>[1-7]</sup>。

与预制底板矩形肋平行方向(强方向)的双向叠合板刚度因铺设预制底板而被加强,与预制底板矩形肋垂直方向(弱方向)的双向叠合板刚度因存在若干拼缝而被削弱,导致双向叠合板呈正交构造异性板特征<sup>[8-11]</sup>。因此,实际工程进行双向叠合板弹性设计时,不能直接采用各向同性双向板的弹性系数,必须重新计算<sup>[12]</sup>。

目前,根据现行有关建筑标准设计图集设计任意跨度比的双向叠合板时,并未考虑双向叠合板的双向受力效应,均按单向板设计。例如,国家建筑标准设计图集《预制带肋底板混凝土叠合楼板》、甘肃省建筑标准设计图集《预制带肋底板混凝土叠合楼板》、陕西省推广应用的标准设计图集《PK 预应力混凝土叠合板》以及山东省建筑标准设计图集《PK 预应力混凝土叠合板》的设计思想均为采用查表法在图集中直接选用预制底板,垂直预制底板方向则按构造布置横向贯穿钢筋,拼缝处按构造布设防裂钢筋或钢筋网片。按单向板进行双向叠合板的弹性设计造成了强方向配筋过多、弱方向配筋不合理的问题。文献[4]借助 ANSYS10.0 数值模拟,研究了该楼板双向受力效应及变化规律,指出双向叠合板的弹性设计应考虑双向受力效应,按双向板进行计算。按双向板设计双向叠合板时,需求解双向叠合板的挠曲面基本微分方程,并依据正交 2 个方向的跨度比与刚度比来编制弹性系数表,其工作量大,计算繁琐,不利于实际工程采用<sup>[12]</sup>。

上述工程设计问题制约了双向叠合板的推广应用。因此,结合双向叠合板的受力特性,研究一种简便、可行的双向叠合板弹性计算方法非常必要且很有意义。围绕双向叠合板的弹性计算方法,中国学

者做了大量创新研究。文献[13],[14]针对双向叠合板的正交构造异性特征,根据弹性薄板原理,分别采用莱维法、纳维法推导了均布荷载下四边简支双向叠合板的挠度和弯矩表达式,并通过实例进行验证,结果表明该弹性计算方法合理可行。文献[15]通过挠度和弯矩表达式的形式变换,引入等效跨度比,将双向叠合板等效成各向同性双向板进行弹性计算,但该文献仅对均布荷载下两对边简支另两对边固支的双向叠合板进行了推导和验证,其他边界条件尚待论证。在此基础上,本文采用荷载叠加法和正交构造异性板理论求解均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板(弱方向一边固支其他边均简支的情形)挠度及弯矩的解。借鉴文献[15]中的思路,对解的形式作变换,并引入等效跨度比,将双向叠合板等效为各向同性双向板,提出了一边固支三边简支双向叠合板的简化弹性计算方法。举例介绍了按照等效跨度比查找各向同性双向板弹性系数的线性插值法,并与编程计算结果进行对比。

1 双向叠合板及其挠曲面基本微分方程

预制底板如图 1 所示。双向叠合板如图 2 所示。

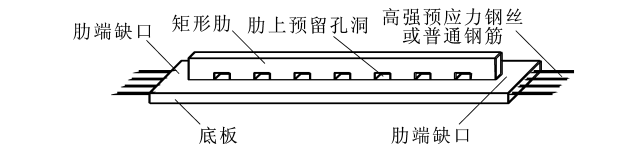


图 1 预制底板  
Fig. 1 Precast Ribbed Panel

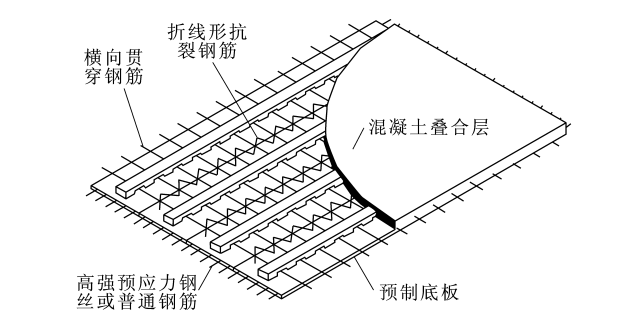


图 2 双向叠合板  
Fig. 2 Two-way Composite Slab

根据正交构造异性板理论建立双向叠合板的挠曲面基本微分方程,具体如下

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (1)$$

式中:  $w$  为双向叠合板面内各点的横向位移;  $D_x, D_y$  分别为双向叠合板  $x, y$  方向的抗弯刚度, 取  $D_x = \frac{B_x}{1 - \mu_x^2}, D_y = \frac{B_y}{1 - \mu_y^2}$ ,  $B_x, B_y$  分别为双向叠合板  $x, y$  方向单位宽度的实际抗弯刚度, 强方向按双向叠合板整板厚度进行计算, 弱方向按后浇混凝土层厚度(叠合板的整板厚度减去板的拼缝高度)进行计算,  $\mu_x, \mu_y$  分别为双向叠合板  $x, y$  方向的泊松比, 取  $\mu_x = \mu_y = 0.2$ ;  $B$  为双向叠合板的综合抗扭刚度, 可按 Huber 公式计算, 取  $B = \sqrt{D_x D_y}$ ;  $q(x, y)$  为垂直于双向叠合板板面的均布荷载。

## 2 一边固支三边简支双向叠合板求解

### 2.1 板中心点挠度计算式及其形式变换

本文采用如图 3 所示的直角坐标系, 其中,  $l_x, l_y$  分别为双向叠合板  $x, y$  方向的跨度。均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板的横向位移求解方法如下(本文研究弱方向一边固支其他边均简支的情形和强方向一边固支其他边均简支的情形, 可借助坐标变换进行计算)。

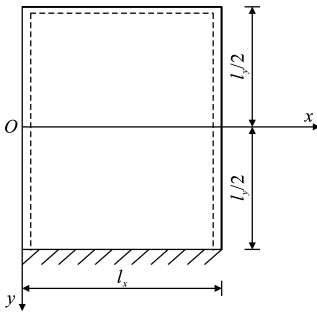


图 3 一边固支三边简支双向叠合板直角坐标系

Fig. 3 Rectangular Coordinate System of Two-way Composite Slab with One Edge Clamped and Three Edges Simply Supported

(1) 求解均布荷载下四边简支双向叠合板的横向位移。均布荷载下四边简支双向叠合板的横向位移记为  $w_1$ , 参照文献[13]方法进行求解, 计算式如下

$$w_1 = \frac{4ql^4}{\pi^5 D_x} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{1}{m^5} \left[ 1 - \frac{2 + \alpha_m \tanh(\alpha_m)}{2 \cosh(\alpha_m)} \right] \cdot \cosh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) + \frac{\alpha_m}{\cosh(\alpha_m)} \frac{y}{l_y} \cdot$$

$$\sinh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (2)$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi r l_y}{2l_x} \quad (3)$$

$$r = \left(\frac{D_x}{D_y}\right)^{1/4} = \lambda^{1/4} \quad (4)$$

式中:  $\lambda$  为双向叠合板  $x, y$  方向的抗弯刚度比值;  $r$  为双向叠合板正交构造各向异性系数。

(2) 沿四边简支双向叠合板的边缘  $y = l_y/2$  施加分布弯矩, 施加的分布弯矩刚好能抵消均布荷载下四边简支双向叠合板边缘  $y = l_y/2$  处产生的转角。将施加的边缘分布弯矩分成两对称分布弯矩和两反对称分布弯矩, 并分别求解。两对称边缘弯矩  $M(x)$  作用在四边简支双向叠合板边缘  $y = \pm l_y/2$  上(图 4)。

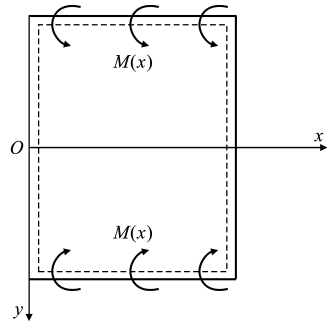


图 4 对称边缘弯矩作用的四边简支双向叠合板

Fig. 4 Two-way Composite Slab with Four Simply Supported Edges Under Symmetrical Edge Bending Moments

对称边缘弯矩  $M(x)$  可用  $x$  的单三角级数来表示, 形式如下

$$M(x) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} E'_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (5)$$

式中:  $E'_m$  为待求系数。

两对称边缘弯矩作用下四边简支双向叠合板的横向位移记为  $w_2$ , 可按文献[15]求解, 计算式如下

$$w_2 = \frac{l_x}{2\pi r D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{E'_m}{m \cosh(\alpha_m)} \left[ \frac{l_y}{2} \tanh(\alpha_m) \cdot \cosh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) - y \sinh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (6)$$

两反对称边缘弯矩  $M'(x)$  作用在四边简支双向叠合板边缘  $y = \pm l_y/2$  上(图 5)。反对称边缘弯矩  $M'(x)$  可用  $x$  的单三角级数来表示, 形式如下

$$M'(x) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} E''_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (7)$$

式中:  $E''_m$  为待求系数。

两反对称边缘弯矩作用下四边简支双向叠合板的横向位移记为  $w_3$ , 边界条件如下

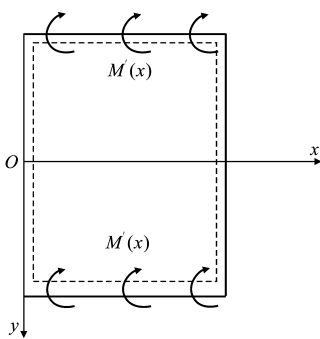


图 5 反对称边缘弯矩作用的四边简支双向叠合板

Fig. 5 Two-way Composite Slab with Four Simply Supported

Edges Under Antisymmetric Edge Bending Moments

$$y = \pm l_y/2, w_3 = 0 \quad (8)$$

$$-D_y \left( \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} \right)_{y=l_y/2} = M'(x) \quad (9)$$

$$-D_y \left( \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} \right)_{y=-l_y/2} = -M'(x) \quad (10)$$

根据对称关系,两反对称边缘弯矩作用下四边简支双向叠合板的横向位移计算式是关于  $y$  的奇函数,形式如下

$$w_3 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \left[ A_m \sinh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) + B_m y \cosh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (11)$$

式中:  $A_m, B_m$  均为系数。

将式(11)代入式(8)中,并将式(7),(11)代入式(9),(10)中,联立方程组解得系数  $A_m, B_m$  分别为

$$A_m = \frac{l_x}{2\pi r D_y m \sinh(\alpha_m)} \frac{l_y}{2 \tanh(\alpha_m)} \quad (12)$$

$$B_m = \frac{-l_x}{2\pi r D_y m \sinh(\alpha_m)} \quad (13)$$

将式(12),(13)代入式(11)中,得两反对称边缘弯矩作用下四边简支双向叠合板的横向位移  $w_3$  为

$$w_3 = \frac{l_x}{2\pi r D_y} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{E'_m}{m \sinh(\alpha_m)} \left[ \frac{l_y}{2 \tanh(\alpha_m)} \cdot \sinh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) - y \cosh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (14)$$

将以上 2 种弯矩作用下四边简支双向叠合板分别产生的横向位移进行叠加,得横向位移  $w_{2,3}$  为

$$w_{2,3} = \frac{l_x}{2\pi r D_y} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \left\{ \frac{E'_m}{m \cosh(\alpha_m)} \left[ \frac{l_y}{2} \tanh(\alpha_m) \cdot \cosh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) - y \sinh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) \right] + \frac{E'_m}{m \sinh(\alpha_m)} \left[ \frac{l_y}{2 \tanh(\alpha_m)} \sinh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) - y \cosh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) \right] \right\} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (15)$$

只讨论沿四边简支双向叠合板的边缘  $y = l_y/2$  施加分布弯矩的情形,则

$$E'_m = E''_m = E_m/2 \quad (16)$$

式中:  $E_m$  为待求系数。

将式(16)代入式(15)中,得到该边缘分布弯矩作用下四边简支双向叠合板产生的横向位移  $w_4$ , 计算式如下

$$w_4 = \frac{l_x}{4\pi r D_y} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{E_m}{m} \left\{ \frac{1}{\cosh(\alpha_m)} \left[ \frac{l_y}{2} \tanh(\alpha_m) \cdot \cosh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) - y \sinh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) \right] + \frac{1}{\sinh(\alpha_m)} \cdot \left[ \frac{l_y}{2 \tanh(\alpha_m)} \sinh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) - y \cosh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) \right] \right\} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (17)$$

此外,横向位移  $w_1$  和  $w_4$  还需应满足弱方向固支端转角为 0 的边界条件,即

$$\left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=l_y/2} + \left( \frac{\partial w_4}{\partial y} \right)_{y=l_y/2} = 0 \quad (18)$$

将式(2),(17)代入式(18)中,整理可得

$$E_m = \left\{ \frac{8ql_x^2}{r^2 \pi^3 m^3} \tanh(\alpha_m) [\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 1] - \alpha_m \right\} / \left[ \alpha_m \tanh^2(\alpha_m) - \tanh(\alpha_m) + \alpha_m \coth^2(\alpha_m) - \coth(\alpha_m) - 2\alpha_m \right] \quad (19)$$

令

$$F_m = \left\{ \tanh(\alpha_m) [\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 1] - \alpha_m \right\} / \left[ \alpha_m \tanh^2(\alpha_m) - \tanh(\alpha_m) + \alpha_m \coth^2(\alpha_m) - \coth(\alpha_m) - 2\alpha_m \right] \quad (20)$$

将式(19),(20)代入式(17)中,整理可得

$$w_4 = \frac{4ql_x^4}{\pi^5 D_y} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{1/2 F_m}{m^5} \left\{ \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)} - \frac{1}{\sinh(\alpha_m)} \frac{m\pi r y}{l_x} \right\} \cosh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) + \left[ \frac{\alpha_m \coth(\alpha_m)}{\sinh(\alpha_m)} - \frac{1}{\cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi r y}{l_x} \right] \cdot \sinh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) \} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (21)$$

(3)均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板的横向位移可根据以上 2 种情况叠加得到。将横向位移  $w_1, w_4$  叠加起来即为均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板的横向位移  $w_5$ , 同时将板的坐标原点平移到板中心,整理可得

$$w_5 = \frac{4ql_x^4}{\pi^5 D_y} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left\{ 1 + \left[ \frac{F_m}{2} \left( \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)} - \frac{1}{\sinh(\alpha_m)} \frac{m\pi r y}{l_x} \right) - \frac{2 + \alpha_m \tanh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)} \right] \right\} \cdot$$

$$\cosh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) + \left[\frac{F_m}{2} \left(\frac{\alpha_m \coth(\alpha_m)}{\sinh(\alpha_m)} - \frac{1}{\cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi r y}{l_x}\right) + \frac{\alpha_m}{\cosh(\alpha_m)} \frac{y}{l_y}\right] \cdot \sinh\left(\frac{m\pi r y}{l_x}\right) \} \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (22)$$

不考虑泊松比  $\mu$  的影响,取  $\mu=0$ ,当  $x=0, y=0$  时,板中心点挠度  $(w_5)_{x=0, y=0}$  计算式如下

$$(w_5)_{x=0, y=0} = \frac{4ql_x^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left[1 + \frac{F_m}{2} \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)} - \frac{2 + \alpha_m \tanh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)}\right] \quad (23)$$

$$a_f = \frac{4}{\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left[1 + \frac{F_m}{2} \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)} - \frac{2 + \alpha_m \tanh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)}\right] \quad (24)$$

$$(w_5)_{x=0, y=0} = a_f \frac{ql_x^4}{D} \quad (25)$$

式中:  $a_f$  为均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板的板中心点挠度系数。

将本文式(25)与各向同性双向板的板中心点挠度计算式<sup>[16]</sup>进行比较发现,两者形式相同,仅式中参数  $\alpha_m$  的计算值不同。

对  $\alpha_m$  作形式变换,由式(3)可得  $\alpha_m = \frac{m\pi r l_y}{2 l_x}$ ,由式(24)可知:均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板的板中心点挠度系数  $a_f$  等于  $x, y$  方向跨度分别为  $l_x, r l_y$  的各向同性双向板的板中心点挠度系数。

## 2.2 板中心点弯矩计算式及其形式变换

### 2.2.1 $x$ 方向板中心点弯矩计算式及其形式变换

不考虑泊松比影响,取  $\mu=0$ ,当  $x=0, y=0$  时,  $x$  方向板中心点弯矩  $M_x$  计算式如下

$$M_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 w_5}{\partial x^2}\right)_{x=0, y=0} = \frac{4ql_x^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \cdot \left[1 + \frac{F_m}{2} \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)} - \frac{2 + \alpha_m \tanh(\alpha_m)}{2 \cosh(\alpha_m)}\right] \quad (26)$$

$$m_x = \frac{4}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \left[1 + \frac{F_m}{2} \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)} - \frac{2 + \alpha_m \tanh(\alpha_m)}{2 \cosh(\alpha_m)}\right] \quad (27)$$

$$M_x = m_x ql_x^2 \quad (28)$$

式中:  $m_x$  为均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板的  $x$  方向板中心点弯矩弹性系数。

将本文式(28)与各向同性双向板的板中心点弯矩计算式<sup>[16]</sup>进行比较发现,两者形式相同,仅式中参数  $\alpha_m$  的计算值不同。

对  $\alpha_m$  作形式变换,由式(3)可得  $\alpha_m = \frac{m\pi r l_y}{2 l_x}$ ,由式(27)可知:均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板的  $x$  方向板中心点弯矩弹性系数  $m_x$  等于  $x, y$  方向跨度分别为  $l_x, r l_y$  的各向同性双向板的  $x$  方向板中心点弯矩弹性系数。

### 2.2.2 $y$ 方向板中心点弯矩计算式及其形式变换

不考虑泊松比影响,取  $\mu=0$ ,当  $x=0, y=0$  时,  $y$  方向板中心点弯矩  $M_y$  计算式如下

$$M_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 w_5}{\partial y^2}\right)_{x=0, y=0} = \frac{4ql_x^2}{\pi^3 r^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \cdot \left[\frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m)}{2 \cosh(\alpha_m)} - \frac{F_m}{2} \left(\frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)} - 2\right)\right] \quad (29)$$

$$m_y = \frac{4}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \left[\frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m)}{2 \cosh(\alpha_m)} - \frac{F_m}{2} \left(\frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)} - 2\right)\right] \quad (30)$$

则

$$M_y = m_y q \left(\frac{l_x}{r}\right)^2 \quad (31)$$

式中:  $m_y$  为均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板的  $y$  方向板中心点弯矩弹性系数。

将本文式(31)与各向同性双向板的板中心点弯矩计算式<sup>[16]</sup>进行比较发现,两者形式相同,仅式中参数  $\alpha_m$  的计算值不同。

对  $\alpha_m$  进行形式变换,由式(3)可以得到  $\alpha_m = \frac{m\pi l_y}{2 l_x / r}$ ,由式(30)可知:均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板的  $y$  方向板中心点弯矩弹性系数  $m_y$  等于  $x, y$  方向跨度分别为  $l_x / r, l_y$  的各向同性双向板的  $y$  方向板中心点弯矩弹性系数。

### 2.2.3 考虑泊松比影响的跨中弯矩计算式

若考虑泊松比影响,即  $\mu \neq 0$  时,  $x, y$  方向的板中心点弯矩  $M_x^{(\mu)}, M_y^{(\mu)}$  按下式计算

$$\left. \begin{aligned} M_x^{(\mu)} &= M_x + \mu \lambda M_y \\ M_y^{(\mu)} &= M_y + \frac{\mu}{\lambda} M_x \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

## 2.3 固支边中点负弯矩计算式及其形式变换

沿四边简支双向叠合板边缘  $y=l_y/2$  施加分布

弯矩,其支座负弯矩等于两对称边缘弯矩  $M(x)$  和两反对称边缘弯矩  $M'(x)$  的叠加值,且两者大小相同方向相反。

将式(16),(19)代入式(5),(7)中,并将板的坐标原点平移到板中心,整理可得

$$M'_y = \frac{8ql_x^2}{r^2\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \cos\left(\frac{m\pi rx}{l_x}\right) \cdot \{ \tanh(\alpha_m) [\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 1] - \alpha_m \} / [ \alpha_m \tanh^2(\alpha_m) - \tanh(\alpha_m) + \alpha_m \coth^2(\alpha_m) - \coth(\alpha_m) - 2\alpha_m ] \quad (33)$$

不考虑泊松比影响,即  $\mu=0$ ,式(33)中取  $x=0$  时,其为均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板固支边中点负弯矩  $M'_y$ ,计算式如下

$$M'_y = \frac{8ql_x^2}{r^2\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \{ \tanh(\alpha_m) [\alpha_m \cdot \tanh(\alpha_m) + 1] - \alpha_m \} / [ \alpha_m \tanh^2(\alpha_m) - \tanh(\alpha_m) + \alpha_m \coth^2(\alpha_m) - \coth(\alpha_m) - 2\alpha_m ] \quad (34)$$

令

$$m'_y = \frac{8}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \{ \tanh(\alpha_m) [\alpha_m \cdot \tanh(\alpha_m) + 1] - \alpha_m \} / [ \alpha_m \tanh^2(\alpha_m) - \tanh(\alpha_m) + \alpha_m \coth^2(\alpha_m) - \coth(\alpha_m) - 2\alpha_m ] \quad (35)$$

则

$$M'_y = m'_y q \left( \frac{l_x}{r} \right)^2 \quad (36)$$

式中:  $m'_y$  为均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板固支边中点负弯矩弹性系数。

将本文式(36)与各向同性双向板的固支边中点负弯矩计算式<sup>[16]</sup>进行比较发现,两者形式相同,仅式中参数  $\alpha_m$  的计算值不同。

对  $\alpha_m$  进行形式变换,由式(3)可以得到  $\alpha_m = \frac{m\pi}{2} \frac{l_y}{l_x/r}$ ,由式(35)可知:均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板固支边中点负弯矩弹性系数  $m'_y$  等于  $x, y$  方向跨度分别为  $l_x/r, l_y$  的各向同性双向板固支边中点负弯矩弹性系数。

## 2.4 不同区格双向叠合板的求解方法

均布荷载作用下一边固支三边简支单区格双向叠合板可根据弹性薄板理论、正交构造异性板理论计算其挠度和弯矩。

对于均布荷载作用下一边固支三边简支多区格等跨连续双向叠合板,则采用近似计算方法,即简化

活荷载的支撑条件与最不利位置,将多区格双向叠合板的内力求解问题转化为单区格双向叠合板的内力求解问题<sup>[17]</sup>。

## 3 一边固支三边简支双向叠合板简化弹性计算方法

在实际工程中,双向叠合板的弹性计算需求解正交构造异性板的挠曲面基本微分方程,并依据正交 2 个方向的跨度比与刚度比来编制弹性系数表,工作量大,计算繁琐。

为简化双向叠合板的弹性计算,本文借鉴文献[15]中的思路,引入等效跨度比  $\lambda_c$ ,直接按等效跨度比  $\lambda_c$  查找各向同性双向板的弹性系数进行均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板的弹性计算。

双向叠合板的等效跨度比  $\lambda_c$  定义为

$$\lambda_c = \frac{l_x}{rl_y} \quad (37)$$

或

$$\lambda_c = \frac{l_x/r}{l_y} \quad (38)$$

式(37),(38)中  $r$  按式(4)计算。当  $r=1$  时,式(25),(28),(31),(36)与各向同性双向板的计算式<sup>[16]</sup>相同。

当  $r \neq 1$  时,对  $\alpha_m$  作相应的形式变换,由式(25),(28),(31),(36)分别可得均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板中心点挠度、 $x$  与  $y$  方向的板中心点弯矩及固支边中点负弯矩的简化弹性计算方法:

(1)板中心点挠度。等同于以双向叠合板的弱方向边长乘以系数  $r$  而强方向边长保持不变的各向同性双向板中心点的挠度[图 6(a),其中,  $h_1$  为叠合板整板厚度,  $h_2$  为面层后浇混凝土厚度]。

(2) $x$  方向板中心点弯矩。等同于以双向叠合板的弱方向边长乘以系数  $r$ ,而强方向边长保持不变的各向同性双向板在  $x$  方向板中心点单位板宽内的弯矩[图 6(b)]。

(3) $y$  方向板中心点弯矩。等同于以双向叠合板的强方向边长除以系数  $r$ ,而弱方向边长保持不变的各向同性双向板在  $y$  方向板中心点单位板宽内的弯矩[图 6(c)]。

(4) $y$  方向固支边中点负弯矩。等同于以双向叠合板的强方向边长除以系数  $r$ ,而弱方向边长保持不变的各向同性双向板固支边中点沿  $y$  方向单位板宽内的负弯矩[图 6(c)]。

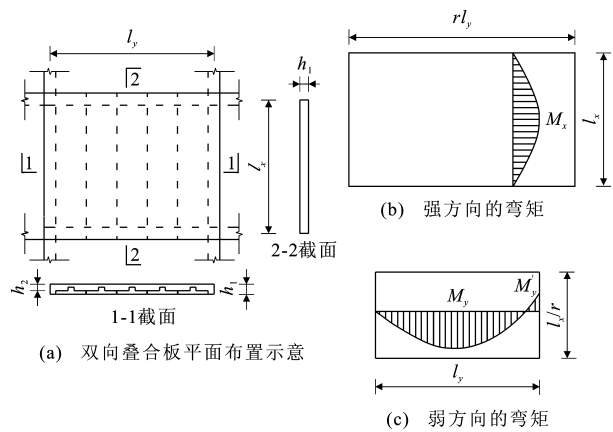


图 6 一边固支三边简支双向叠合板的计算示意  
Fig. 6 Calculating Diagram of Two-way Composite Slab with One Edge Clamped and Three Edges Simply Supported

计算得到  $\lambda_c$  后,便可以采用线性插值法或其他

表 1 一边固支三边简支双向叠合板弹性系数( $\lambda=0.5$ )

Tab. 1 Elasticity Coefficients of Two-way Composite Slab with One Edge Clamped and Three Edges Simply Supported ( $\lambda=0.5$ )

$l_y/l_x$	$l_x/l_y$	$\lambda_c$	$\lambda_c$	$a_f$	$m_x$	$m_y$	$m'_x$ 或 $m'_y$
0.420 45		0.50		0.004 88	0.006 0	0.058 8	-0.121 2
0.462 49		0.55		0.004 71	0.008 1	0.056 3	-0.118 7
0.504 54		0.60		0.004 53	0.010 4	0.053 9	-0.115 8
0.546 58		0.65		0.004 32	0.012 6	0.051 3	-0.112 4
0.588 63		0.70		0.004 10	0.014 8	0.048 5	-0.108 7
0.630 67		0.75		0.003 88	0.016 8	0.045 7	-0.104 8
0.672 72		0.80		0.003 65	0.018 7	0.042 8	-0.100 7
0.714 76		0.85		0.003 43	0.020 4	0.040 0	-0.096 5
0.756 81		0.90		0.003 21	0.021 9	0.037 2	-0.092 2
0.798 85		0.95		0.002 99	0.023 2	0.034 5	-0.088 0
0.840 90		1.00		0.002 79	0.024 3	0.031 8	-0.083 9
	0.798 85		0.95	0.003 16	0.028 0	0.032 4	-0.088 2
	0.756 81		0.90	0.003 60	0.032 2	0.032 8	-0.092 6
	0.714 76		0.85	0.004 09	0.037 0	0.032 9	-0.097 0
	0.672 72		0.80	0.004 64	0.042 4	0.032 6	-0.101 4
	0.630 67		0.75	0.005 26	0.048 5	0.031 9	-0.105 6
	0.588 63		0.70	0.005 95	0.055 3	0.030 8	-0.109 6
	0.546 58		0.65	0.006 70	0.062 7	0.029 1	-0.113 3
	0.504 54		0.60	0.007 52	0.070 7	0.026 8	-0.116 6
	0.462 49		0.55	0.008 38	0.079 2	0.023 9	-0.119 3
	0.420 45		0.50	0.009 27	0.088 0	0.020 5	-0.121 5

注:预制底板均沿  $y$  方向布置;当根据第 1 列跨度比与第 3 列等效跨度比进行查表时, $y$  方向为短跨方向, $x$  方向为长跨方向;当根据第 2 列跨度比与第 4 列等效跨度比进行查表时, $x$  方向为短跨方向, $y$  方向为长跨方向。

对比分析表 1,2 可知,刚度比不同而等效跨度比相等时,实际跨度比虽然不同,但各项弹性系数是相等的。此外,将预制底板安装在双向叠合板的短跨时,强方向的弯矩弹性系数变大,而弱方向的弯矩弹性系数变小。

精度较高的插值方法查找文献[17]给出的均布荷载作用下一边固支三边简支双向同性板的弹性计算系数表,从而简化均布荷载作用下一边固支三边简支双向叠合板的弹性计算过程。

4 算例分析

均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板中心点的挠度、弯矩和固支边中点负弯矩的级数解可通过编制程序进行计算,每个级数取 100 项以上,各弹性系数的计算值均能达到足够精度。

例如考虑双向叠合板正交构造异性特征影响,取  $\lambda=0.5$  和  $\lambda=2.0$ ,根据式(24),(27),(30),(35)编制程序进行计算,且每个级数均取 100 项,可得到均布荷载下一边固支三边简双向叠合板等效跨度比范围在 0.5~1.0 的弹性系数,结果见表 1,2。

为便于进一步比较分析,根据文献[17]给出均布荷载下一边固支三边简支双向同性板的弹性系数,见表 3。

通过对比分析表 1~3 可知:表 1,2 中的等效跨度比与表 3 中的跨度比相等时,各项弹性系数是相

表 2 一边固支三边简支双向叠合板弹性系数(λ=2.0)

Tab.2 Elasticity Coefficients of Two-way Composite Slab with One Edge Clamped and Three Edges Simply Supported (λ=2.0)

$l_y/l_x$	$l_x/l_y$	$\lambda_c$	$\lambda_c$	$a_f$	$m_x$	$m_y$	$m'_x$ 或 $m'_y$
0.594 60		0.50		0.004 88	0.006 0	0.058 8	−0.121 2
0.454 06		0.55		0.004 71	0.008 1	0.056 3	−0.118 7
0.713 52		0.60		0.004 53	0.010 4	0.053 9	−0.115 8
0.772 98		0.65		0.004 32	0.012 6	0.051 3	−0.112 4
0.832 44		0.70		0.004 10	0.014 8	0.048 5	−0.108 7
0.891 91		0.75		0.003 88	0.016 8	0.045 7	−0.104 8
0.951 37		0.80		0.003 65	0.018 7	0.042 8	−0.100 7
1.010 83		0.85		0.003 43	0.020 4	0.040 0	−0.096 5
1.070 29		0.90		0.003 21	0.021 9	0.037 2	−0.092 2
1.129 75		0.95		0.002 99	0.023 2	0.034 5	−0.088 0
1.189 21	1.189 21	1.00	1.00	0.002 79	0.024 3	0.031 8	−0.083 9
	1.129 75		0.95	0.003 16	0.028 0	0.032 4	−0.088 2
	1.070 29		0.90	0.003 60	0.032 2	0.032 8	−0.092 6
	1.010 83		0.85	0.004 09	0.037 0	0.032 9	−0.097 0
	0.951 37		0.80	0.004 64	0.042 4	0.032 6	−0.101 4
	0.891 91		0.75	0.005 26	0.048 5	0.031 9	−0.105 6
	0.832 44		0.70	0.005 95	0.055 3	0.030 8	−0.109 6
	0.772 98		0.65	0.006 70	0.062 7	0.029 1	−0.113 3
	0.713 52		0.60	0.007 52	0.070 7	0.026 8	−0.116 6
	0.654 06		0.55	0.008 38	0.079 2	0.023 9	−0.119 3
	0.594 60		0.50	0.009 27	0.088 0	0.020 5	−0.121 5

注:预制底板均沿  $x$  方向布置;当根据第 1 列跨度比与第 3 列等效跨度比进行查表时, $y$  方向为短跨方向, $x$  方向为长跨方向;当根据第 2 列跨度比与第 4 列等效跨度比进行查表时, $x$  方向为短跨方向, $y$  方向为长跨方向。

等的,表明本文提出的简化弹性计算方法是合理可行的。

下面再举例介绍按照等效跨度比查找各向同性双向板弹性系数的线性插值法,并与编程计算结果进行对比。

例如均布荷载下一边固支三边简支双向叠合楼板  $x,y$  方向尺寸分别为 3,4 m,已知预制底板沿  $x$  方向布置,强、弱方向刚度比为 2,弱方向一边固支其他边均简支,现采用查表法确定该叠合板的跨中弹性系数  $a_f,m_x,m_y,m'_y$ 。

求解过程如下:

已知  $l_x/l_y=0.75,\lambda=2$ 。由式(4)计算可得  $r=\lambda^{1/4}\approx1.189\ 2$ 。将  $r$  代入等效跨度比计算式(37)中,可得

$$\lambda_c=\frac{l_x}{rl_y}\approx0.630\ 68$$

采用线性插值法,按照跨度比为 0.630 68 在表 3 中进行查表插值计算,得

$$a_f=\frac{0.630\ 68-0.60}{0.65-0.60}\times(0.006\ 70-0.007\ 52)+0.007\ 52\approx0.007\ 02$$

$$m_x=\frac{0.630\ 68-0.60}{0.65-0.60}\times(0.062\ 7-0.070\ 7)+0.070\ 7\approx0.065\ 8$$

$$m_y=\frac{0.630\ 68-0.60}{0.65-0.60}\times(0.029\ 1-0.026\ 8)+0.026\ 8\approx0.028\ 2$$

$$m'_y=\frac{0.630\ 68-0.60}{0.65-0.60}\times(0.116\ 6-0.113\ 3)-0.116\ 6\approx-0.114\ 6$$

按等效跨度比取为 0.630 68,利用式(24),(27),(30)进行计算,分别可得

$$a_f\approx0.007\ 01,m_x\approx0.065\ 7,m_y\approx0.028\ 3,m'_y\approx-0.114\ 6$$

对比以上结果可知,在表 3 中查表计算所得的弹性系数与编程计算的结果非常接近,精度完全能够满足工程设计要求,实际工程中可采用本文提出的简化弹性计算方法。

## 5 结 语

(1)现有国家及地方标准图集所采用的设计思路并未考虑叠合板的受力特点,一律按单向板进行



表 3 一边固支三边简支同性双向板弹性系数

Tab.3 Elasticity Coefficients of Isotropic Two-way Slab with One Edge Clamped and Three Edges Simply Supported

$l_y/l_x$	$l_x/l_y$	$a_1$	$m_x$	$m_y$	$m'_x$ 或 $m'_y$
0.50		0.004 88	0.006 0	0.058 8	-0.121 2
0.55		0.004 71	0.008 1	0.056 3	-0.118 7
0.60		0.004 53	0.010 4	0.053 9	-0.115 8
0.65		0.004 32	0.012 6	0.051 3	-0.112 4
0.70		0.004 10	0.014 8	0.048 5	-0.108 7
0.75		0.003 88	0.016 8	0.045 7	-0.104 8
0.80		0.003 65	0.018 7	0.042 8	-0.100 7
0.85		0.003 43	0.020 4	0.040 0	-0.096 5
0.90		0.003 21	0.021 9	0.037 2	-0.092 2
0.95		0.002 99	0.023 2	0.034 5	-0.088 0
1.00	1.00	0.002 79	0.024 3	0.031 8	-0.083 9
	0.95	0.003 16	0.028 0	0.032 4	-0.088 2
	0.90	0.003 60	0.032 2	0.032 8	-0.092 6
	0.85	0.004 09	0.037 0	0.032 9	-0.097 0
	0.80	0.004 64	0.042 4	0.032 6	-0.101 4
	0.75	0.005 26	0.048 5	0.031 9	-0.105 6
	0.70	0.005 95	0.055 3	0.030 8	-0.109 6
	0.65	0.006 70	0.062 7	0.029 1	-0.113 3
	0.60	0.007 52	0.070 7	0.026 8	-0.116 6
	0.55	0.008 38	0.079 2	0.023 9	-0.119 3
	0.50	0.009 27	0.088 0	0.020 5	-0.121 5

设计,造成了双向叠合板强方向配筋过多、弱方向配筋不合理的问题。建议实际工程中应根据叠合板的受力特点与经济条件,明确单向板与双向板界限,选用相应的设计方法。

(2)提出了均布荷载下一边固支三边简支双向叠合板的简化弹性计算方法,便于实际工程设计采用,有利于双向叠合板的推广应用。采用该简化计算方法时,应考虑双向叠合板的正交构造异性特征影响,强方向的刚度按双向叠合板整板厚度进行计算,弱方向的刚度按后浇混凝土层厚度进行计算。后浇混凝土层厚度按照叠合板的整板厚度减去板的拼缝高度计算。

(3)编程计算得到了双向叠合板强、弱方向刚度比为 0.5 和 2.0 以及等效跨度比在 0.5~1.0 时的弹性系数,结果表明,刚度比不同而等效跨度比相等时,实际跨度比虽然不同,但弹性系数是相等的。建议预制底板按双向叠合板的短跨方向布置,以充分利用其高强性能,降低钢筋用量获得经济效益。

(4)举例介绍了按照等效跨度比查找各向同性双向板弹性系数的线性插值法,并与编程计算结果

进行了对比验证,结果表明,双向叠合板的等效跨度比与各向同性双向板的跨度比相等时弹性系数是相等的。

参考文献:  
References:

[1] 黄海林,吴方伯,祝明桥,等. 预制 T 形肋底板混凝土叠合板弯曲疲劳性能试验研究[J]. 建筑结构学报, 2016,37(5):233-241.  
HUANG Hai-lin, WU Fang-bo, ZHU Ming-qiao, et al. Experimental Study on Bending Fatigue Behavior of Concrete Composite Slab with Precast Prestressed T-type Rib Panel[J]. Journal of Building Structures, 2016, 37(5): 233-241.

[2] ZHANG J S, YAO Y, ZHOU X H, et al. Failure Mode and Ultimate Bearing Capacity of Precast Ribbed Panels Used for Concrete Composite Slabs[J]. Advances in Structural Engineering, 2013, 16(12): 2005-2017.

[3] 吴方伯,黄海林,陈伟,等. 肋上开孔对预制预应力混凝土带肋薄板施工阶段挠度计算方法的影响研究[J]. 工程力学, 2011, 28(11): 64-71.  
WU Fang-bo, HUANG Hai-lin, CHEN Wei, et al. Influence of Preformed Holes on Flexural Deflection Calculation Methods of Precast Prestressed Concrete Ribbed Panels for Composite Slabs[J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(11): 64-71.

[4] 吴方伯,黄海林,陈伟,等. 预制预应力带肋底板-混凝土叠合板双向受力效应理论研究[J]. 工业建筑, 2010, 40(11): 55-58.  
WU Fang-bo, HANG Hai-lin, CHEN Wei, et al. Theoretical Study on Two-way Effects of Concrete Composite Slab with Precast Prestressed Ribbed Panel[J]. Industrial Construction, 2010, 40(11): 55-58.

[5] ZHANG J S, YAO Y, ZHOU X H, et al. Failure Mode and Ultimate Bearing Capacity of Precast Ribbed Panels Used for Concrete Composite Slabs[J]. Advances in Structural Engineering, 2013, 16(12): 2005-2017.

[6] ZHANG J S, WANG Y Z, YAO Y, et al. Influence of Reinforcement on In-plane Mechanical Behaviors of CSPRP Under Cyclic Reversed Load[J]. Materials and Structures, 2016, 49(1): 101-116.

[7] 黄海林,吴方伯,祝明桥,等. 板肋形式对预制带肋底板混凝土叠合板受弯性能的影响研究[J]. 建筑结构学报, 2015, 36(10): 66-72.  
HUANG Hai-lin, WU Fang-bo, ZHU Ming-qiao, et al. Influence of Rib Details on Flexural Behavior of

- Concrete Composite Slab with Precast Prestressed Ribbed Panel[J]. Journal of Building Structures, 2015,36(10):66-72.
- [8] 胡肇滋,钱寅泉. 正交构造异性板刚度计算的探讨[J]. 土木工程学报,1987,20(4):49-61.  
HU Zhao-zi, QIAN Yin-quan. Research on Calculation of Structurally Orthotropic Plate Rigidity[J]. China Civil Engineering Journal, 1987,20(4):49-61.
- [9] 吴方伯,黄海林,陈伟,等. 预制带肋底板混凝土双向叠合板极限承载力[J]. 土木建筑与环境工程, 2011,33(5):34-40.  
WU Fang-bo, HUANG Hai-lin, CHEN Wei, et al. Ultimate Bearing Capacity of Concrete Two-way Composite Slabs with Precast Concrete Ribbed Panels[J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2011,33(5):34-40.
- [10] REZAIGUIA A, OUELAA N, LAEFER D F, et al. Dynamic Amplification of a Multi-span, Continuous Orthotropic Bridge Deck Under Vehicular Movement[J]. Engineering Structures, 2015,100:718-730.
- [11] KAINUMA S, JEONG Y S, AHN J H, et al. Behavior and Stress of Orthotropic Deck with Bulb Rib by Surface Corrosion[J]. Journal of Constructional Steel Research, 2015,113:135-145.
- [12] 黄海林. 预制带肋底板混凝土叠合楼板受力性能及设计方法[D]. 长沙:湖南大学,2013.  
HUANG Hai-lin. Structural Behavior and Design Method of Concrete Composite Slab with Precast Prestressed Concrete Ribbed Panel[D]. Changsha: Hunan University, 2013.
- [13] 周绪红,张微伟,吴方伯,等. 预应力混凝土四边简支双向叠合板的设计方法[J]. 建筑科学与工程学报, 2006,23(4):54-57,94.  
ZHOU Xu-hong, ZHANG Wei-wei, WU Fang-bo, et al. Design Method of Prestressed Concrete Simply Supported on Four Sides of Two-way Composite Slab[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2006,23(4):54-57,94.
- [14] 周鲲鹏,吴方伯. 四边简支矩形单向预应力双向叠合板的弹性设计方法[J]. 邵阳学院学报:自然科学版, 2006,3(1):63-65.  
ZHOU Kun-peng, WU Fang-bo. Elastic Design Method of Rectangular Unidirectional Prestressed Two-way Concrete Composite Slab Simply Supported on Four Sides[J]. Journal of Shaoyang University: Science and Technology, 2006,3(1):63-65.
- [15] 吴方伯,黄海林,陈伟,等. 预制带肋底板混凝土双向叠合板实用弹性计算方法[J]. 建筑结构, 2012,42(4):99-103.  
WU Fang-bo, HUANG Hai-lin, CHEN Wei, et al. Practical Elastic Calculation Methods of Concrete Two-way Composite Slab with Precast Ribbed Panels[J]. Building Structure, 2012,42(4):99-103.
- [16] 曲庆璋,章权,季求知,等. 弹性板理论[M]. 北京:人民交通出版社,2000.  
QU Qing-zhang, ZHANG Quan, JI Qiu-zhi, et al. Theory of Elastic Slab[M]. Beijing: China Communications Press, 2000.
- [17] 沈蒲生,梁兴文. 混凝土结构设计[M]. 4版. 北京:高等教育出版社,2012.  
SHEN Pu-sheng, LIANG Xing-wen. Design of Concrete Structure[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2012.