

文章编号:1673-2049(2017)06-0011-10

# 深埋水工圆形隧洞塑性位移三剪统一解

赵均海,吕美彤,张常光,姜志琳

(长安大学 建筑工程学院,陕西 西安 710061)

**摘要:**基于三剪统一强度准则和弹脆塑性模型,考虑中间主应力、渗流、剪胀、软化和塑性区弹性模量等因素的影响,推导了含有5种因素综合影响的水工圆形隧洞塑性区位移解析解;通过算例分析,得出了各参数对隧洞塑性区位移的影响规律。结果表明:各参数取不同值时,位移解可退化为一组解,参数值可根据具体工程进行合理选择,具有广泛的适用性;围岩剪胀特性对隧洞塑性区位移的影响显著,若不考虑其影响,将明显低估隧洞的变形以致工程设计偏于危险;考虑中间主应力的影响能发挥围岩的强度潜能,减少支护,节约工程造价;考虑渗流和软化特性对隧洞塑性区半径的影响可使塑性区范围更接近围岩真实的变形范围;塑性区弹性模量采用含有半径幂函数的表达式可充分考虑围岩受扰劣化后的应力重分布及爆破损伤等影响,更符合隧洞真实变形情况;该位移解为隧洞塑性区位移计算提供了理论依据,对工程设计有一定的参考价值。

**关键词:**深埋水工圆形隧洞;中间主应力;半径相关的弹性模量;脆性软化;剪胀特性

**中图分类号:**TU457

**文献标志码:**A

## Triple-shear Unified Solutions of Plastic Displacement for a Deep Circular Hydraulic Tunnel

ZHAO Jun-hai, LU Mei-tong, ZHANG Chang-guang, JIANG Zhi-lin

(School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, Shaanxi, China)

**Abstract:** Based on the triple-shear unified failure criterion and the elastic-brittle-plastic model, taking the integrated influences of intermediate principal stress, seepage, shear dilation, softening, elastic modulus of plastic zone into account, the analytical solution of plastic zone displacement of hydraulic tunnel with 5 factors was deduced. Through example analysis, the influence law of each parameter on the plastic zone displacement of tunnel was obtained. The results show that the analytical solution has wide applicability and can be degenerated into a series of solutions when the parameters are different, the parameter values can be rationally chosen according to the specific project. The shear dilation characteristics of surrounding rock have significant influence on the displacement of plastic zone in tunnel, without considering the influences, the deformation of tunnel will be underestimated obviously, so that the engineering design will be dangerous. Considering the influences of intermediate principal stress, the potential strength of surrounding rock can be brought into play, the support can be reduced, and the engineering cost can be saved. Considering the influence of seepage and softening characteristics on the radius of plastic zone, the plastic zone can be closer to the true deformation

收稿日期:2017-08-21

基金项目:国家自然科学基金项目(51508028,41202191);中国博士后科学基金项目(2016T90879,2014M562357);

中央高校基本科研业务费专项资金项目(310828173402)

作者简介:赵均海(1960-),男,陕西西安人,教授,博士研究生导师,工学博士,E-mail:zhaojh@chd.edu.cn。

range of surrounding rock. The elastic modulus of plastic zone can be fully considered by the expression of radius power function, the stress redistribution and blasting damage can be fully considered after the disturbed degradation of surrounding rock, and the results are more in line with the true deformation of tunnel. The displacement solution provides a theoretical basis for the displacement calculation of the plastic zone in the tunnel, and has a certain reference value for the engineering design.

**Key words:** deep circular hydraulic tunnel; intermediate principal stress; radius-dependent elastic modulus; brittle softening; shear dilation characteristic

## 0 引言

地下水的存在会使隧洞发生突水、涌水等事故,从而影响隧洞的稳定性。隧洞的开挖卸载会导致应力重分布<sup>[1-3]</sup>,使部分围岩进入塑性状态,改变了围岩的材料强度参数。张强等<sup>[4-5]</sup>采用 Mohr-Coulomb 屈服准则,并结合材料软化和剪胀特性,给出了圆形洞室围岩应力场和位移解析解;侯公羽等<sup>[6]</sup>基于广义 Hoek-Brown 屈服准则,对理想弹塑性模型的轴对称圆巷进行理论求解;黄阜等<sup>[7]</sup>基于原始 Hoek-Brown 屈服准则,推导了渗流体积力影响下圆形洞室塑性区半径及塑性区位移。上述研究均没有考虑中间主应力效应,所得结果偏于保守<sup>[8]</sup>。范浩等<sup>[9]</sup>采用统一强度理论,得出了渗流、中间主应力和剪胀影响下隧洞的弹塑性解析解,但解答基于理想弹塑性模型,未考虑材料在应力峰值之后趋于软化的特性;张常光等<sup>[10]</sup>基于双剪统一强度理论,考虑了不同主应力顺序下渗流、应变软化和剪胀影响下的应力和位移,但认为塑性区弹性应变均等于弹塑性交界面上的应变,与实际变形情况存在较大差异;张常光等<sup>[11-12]</sup>综合考虑中间主应力、软化、剪胀特性、塑性区弹性模量等因素的影响,推导了围岩塑性区位移双剪统一解,但忽略了渗流对围岩的影响。曾开华等<sup>[13]</sup>推导了考虑剪胀特性的双剪统一解,但未考虑渗流、软化等因素影响。上述研究均基于双剪统一强度理论,但双剪统一强度理论在某些应力状态下会出现双重滑移面和滑移面突变现象,三剪统一强度准则克服了这个问题,同时考虑了中间主应力的影响,已广泛应用于隧洞围岩的应力分析中<sup>[14]</sup>。张常光等<sup>[15]</sup>基于三剪统一强度准则和脆性软化特性建立了隧洞围岩的应力解析解,但未考虑渗流体积力的影响。以上研究均未考虑弹性区和塑性区弹性模量的不同,但事实上,对岩土材料来说不区分弹塑性区弹性模量会对围岩的变形计算产生较大误差。围岩受扰劣化后塑性区的弹性模量为与塑

性区小主应力相关<sup>[16]</sup>的函数或为与距隧洞中心距离<sup>[17]</sup>相关的函数。Sharan<sup>[18]</sup>采用非关联流动法则和 Hoek-Brown 屈服准则,推导了塑性区与弹性区弹性模量不同的围岩解析解,但其认为塑性区弹性模量为—常量,且小于弹性区弹性模量,与距隧洞中心的距离无关,这与围岩受扰后变形机制不符,且未考虑中间主应力的影响;Zhang 等<sup>[19]</sup>基于统一强度理论和非关联流动法则,建立了平面应变下塑性区半径相关弹性模量的圆形隧洞位移解,但未考虑地下水的影响。以上研究对隧洞塑性区位移的研究均集中在某一方面,没有综合考虑渗流、软化、剪胀、中间主应力效应和塑性区弹性模量等因素的影响,所得结果与围岩真实位移不符。

综上所述,本文针对水工圆形隧洞基于三剪统一强度准则和弹脆塑性模型,考虑不同工况下主应力顺序、渗流、岩石应变软化、剪胀和塑性区半径幂函数的弹性模量等因素综合影响,建立了塑性区位移统一解,并分析了渗流、中间主应力、脆性软化、剪胀特性和塑性区弹性模量等参数对运行期塑性区位移的影响规律。

## 1 基本假定和理论

(1)隧洞均匀、连续、各向同性,受各向等值初始地应力  $q$  作用,处于平面应变状态。

(2)隧洞围岩的弹塑性分析适用三剪统一强度准则。三剪统一强度准则已被广泛应用于隧洞围岩的弹塑性分析中,其考虑了材料的拉压强度不同和中间主应力效应,同时还克服了双剪统一强度理论在某些应力状态下的滑移面突变问题,其具体表达式为<sup>[14]</sup>

$$(1+b)(\sigma_1-\sigma_3)f_t=(\alpha\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1-\sigma_3)+b(\alpha\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)+b(\alpha\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_3) \quad (1)$$

式中: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  分别为 3 个方向的主应力,且  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ;  $\alpha$  为材料的拉压强度比;  $f_t$  为单轴抗拉极限强度;  $b$  为反映中间主应力对材料屈服或破坏影响

程度的参数。

$b$  的取值应满足  $\pi$  平面极限线外凸性,即

$$0 \leq b \leq b_{\max} = \frac{\alpha}{\alpha + 2} \quad (2)$$

式(1)可退化或逼近现有的多种强度准则<sup>[15]</sup>,  $\alpha=1, b=0$  时可退化为 Tresca 屈服准则,  $\alpha=1, b=1/3$  时可逼近 Mises 屈服准则;  $0 < \alpha < 1, b=0$  时退化为 Mohr-Coulomb 强度准则,  $0 < b < b_{\max}$  时可对应一系列新的屈服准则。

隧洞塑性区的第二主应力  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ ,  $\alpha$  和  $f_t$  的取值可通过黏聚力  $c$  和内摩擦角  $\varphi$  来确定,即

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\varphi)}{1 + \sin(\varphi)}, f_t = \frac{2c \cos(\varphi)}{1 + \sin(\varphi)} \quad (3)$$

弹脆塑性软化模型与某些岩石的荷载-位移全过程曲线吻合较好<sup>[20]</sup>, 能较好反映出岩石材料强度达到极限后应力迅速下降。假定围岩为弹脆塑性软化材料, 其施工期和运行期塑性软化前、后的三剪统一强度准则为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} &= -\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin(\varphi_{ij}) + c_{ij} \cos(\varphi_{ij}) \\ \sin(\varphi_{ij}) &= \frac{2(1+b) \sin(\varphi_j)}{2+b} \\ c_{ij} &= \frac{2(1+b) c_j \cos(\varphi_j)}{2+b} \frac{1}{\cos(\varphi_{ij})} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中:  $j=0, 1$  分别表示塑性区应变软化前和软化后;  $c_{ij}, \varphi_{ij}$  分别为统一黏聚力和统一内摩擦角, 其表达式与文献[10]双剪统一强度理论表达式不同。

(3) 围岩的剪胀特性符合非关联流动法则, 其塑性应变  $\epsilon_1^p$  与  $\epsilon_3^p$  的关系<sup>[21]</sup>为

$$\beta \epsilon_1^p + \epsilon_3^p = 0 \quad (5)$$

$$\beta = [1 + \sin(\Psi)] / [1 - \sin(\Psi)] \quad (6)$$

式中:  $\epsilon_1^p, \epsilon_3^p$  分别为第一主应变和第三主应变的塑性分量;  $\beta$  为剪胀特性参数;  $\Psi$  为剪胀角, 一般情况下  $\Psi \leq \varphi$ 。

当  $\Psi = \varphi$  时,  $\beta$  达到最大值  $\beta_{\max}$ , 式(6)变为相关流动法则; 当  $\Psi = 0^\circ$  时,  $\beta = 1$ , 即未考虑围岩的剪胀特性。

(4) 围岩塑性区泊松比  $\nu_r$  为一常数, 考虑巷道开挖受扰劣化及爆破对围岩塑性区弹性模量的影响, 其与半径  $r$  相关的弹性模量  $E(r)$ <sup>[11]</sup> 为

$$E(r) = E_r (r/r_1)^n, n = \frac{\lg(E/E_r)}{\lg(r_2/r_1)} \quad (7)$$

式中:  $n$  为反映塑性区和弹性区围岩弹性模量的幂指数;  $r_1$  为隧洞内半径;  $r_2$  为围岩塑性区半径;  $E_r$  为洞壁  $r=r_1$  处的弹性模量, 即  $E(r_1) = E_r$ ;  $E$  为弹性

区弹性模量。

(5) 岩体的渗流符合达西定律。假定隧洞衬砌和围岩具有相同的渗透系数, 则施工期和运行期渗流体积力分别为<sup>[3]</sup>

$$\left. \begin{aligned} p_w &= p_i \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) / \ln\left(\frac{R_0}{r_1}\right) & r_1 \leq r \leq R_0 \\ p'_w &= p_m + (p_m - p_i) \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) / \ln\left(\frac{R_c}{r_1}\right) & r_1 \leq r \leq R_c \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中:  $p_w, p'_w$  分别为隧洞施工期和运行期的渗流场水压力;  $p_i$  为原始渗流场水压力;  $R_0, R_c$  分别为可保持原始渗流场水压力的施工期和运行期的围岩半径, 可通过钻孔实测或抽水试验确定具体值;  $p_m$  为运行期隧洞内半径处的渗流水压力。

## 2 位移统一解

隧洞在不同的工况下, 考虑渗流对围岩的影响, 施工期径向应力  $\sigma_r$  为第一主应力, 运行期切向应力  $\sigma_\theta$  为第一主应力。渗流体积力作用下的应力平衡方程<sup>[3]</sup>为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \eta \frac{dp_w}{dr} &= 0 \\ \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \eta \frac{dp'_w}{dr} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中:  $\eta$  为渗流影响单位面积下的有效面积系数。

### 2.1 施工期围岩位移分析

图1为施工期隧洞力学分析模型, 施工期渗流作用下的三剪统一强度准则为

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} = -\frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \sin(\varphi_{ij}) - \eta p_w \sin(\varphi_{ij}) + c_{ij} \cos(\varphi_{ij}) \quad (10)$$

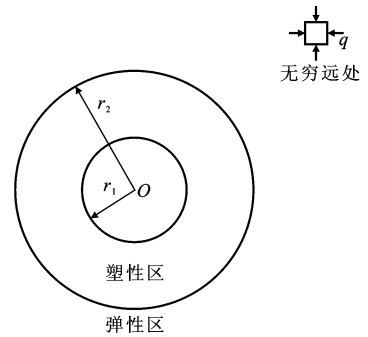


图1 施工期隧洞力学分析模型

Fig. 1 Mechanics Analysis Model of Tunnel

### During Construction Period

在围岩塑性区内, 取  $j=1$ , 联立式(8)~(10), 并以  $\sigma_r|_{r=r_1}=0$  为边界条件, 得塑性区应力<sup>[10]</sup>为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -[c_{t1} \cot(\varphi_{t1}) + D_2] \left(\frac{r}{r_1}\right)^{A_2} - D_1 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + \\ &\quad c_{t1} \cot(\varphi_{t1}) + D_2 \\ \sigma_\theta &= -A_1 [c_{t1} \cot(\varphi_{t1}) + D_2] \left(\frac{r}{r_1}\right)^{A_2} - \\ &\quad D_1 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + c_{t1} \cot(\varphi_{t1}) + D_3 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1 + \sin(\varphi_{t1})}{1 - \sin(\varphi_{t1})}, A_2 = \frac{2 \sin(\varphi_{t1})}{1 - \sin(\varphi_{t1})}, \\ D_1 &= \eta p_i \sin(\varphi_{t1}) / [\sin(\varphi_{t1}) \ln(\frac{R_0}{r_1})], \\ D_2 &= -\eta p_i [1 - \sin(\varphi_{t1})] / [\sin(\varphi_{t1}) \ln(\frac{R_0}{r_1})], \\ D_3 &= -\eta p_i [1 + \sin(\varphi_{t1})] / [\sin(\varphi_{t1}) \ln(\frac{R_0}{r_1})] \end{aligned}$$

围岩弹性区的应力和位移分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -q(1 - \frac{r_2^2}{r^2}) - p_{r_2} \frac{r_2^2}{r^2} - \eta p_w \\ \sigma_\theta &= -q(1 + \frac{r_2^2}{r^2}) + p_{r_2} \frac{r_2^2}{r^2} - \eta p_w \\ u^e &= -\frac{(1+v)r_2^2(q - p_{r_2})}{E r} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中:  $p_{r_2}$  为施工期弹塑性交界处的径向压力;  $v$  为围岩弹性区泊松比;  $u^e$  为弹性区位移。

弹性区应力在  $r=r_2$  即围岩弹塑性交界处满足  $j=0$  时的强度准则式(10), 且径向应力  $\sigma_r$  连续, 整理可得<sup>[10]</sup>

$$p_{r_2} = q[1 - \sin(\varphi_{t0})] - c_{t0} \cos(\varphi_{t0}) \quad (13)$$

$$[c_{t1} \cot(\varphi_{t1}) + D_2] \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{A_2} = q[1 - \sin(\varphi_{t0})] - c_{t0} \cos(\varphi_{t0}) + c_{t1} \cot(\varphi_{t1}) - D_1 \ln(\frac{r_2}{r_1}) + D_2 \quad (14)$$

式中:  $c_{t0}$ ,  $\varphi_{t0}$  分别为围岩初始的统一黏聚力和统一内摩擦角。

式(14)为含有围岩塑性区外半径  $r_2$  的隐式, 通过求解超越方程可解出。

在围岩塑性区内, 第一、第三主应变分别为径向应变和切向应变, 即  $\epsilon_1 = \epsilon_r$ ,  $\epsilon_3 = \epsilon_\theta$ , 由式(5)可得

$$\beta \epsilon_r^p + \epsilon_\theta^p = 0 \quad (15)$$

式中:  $\epsilon_r^p$ ,  $\epsilon_\theta^p$  分别为径向应变  $\epsilon_r$  和切向应变  $\epsilon_\theta$  的塑性分量。

同时, 塑性区围岩的应变可分解为塑性应变和弹性应变两部分, 由式(15)可得

$$\beta \epsilon_r + \epsilon_\theta = \beta(\epsilon_r^e + \epsilon_r^p) + \epsilon_\theta^p + \epsilon_\theta^e = \beta \epsilon_r^e + \epsilon_\theta^e \quad (16)$$

式中:  $\epsilon_r^e$ ,  $\epsilon_\theta^e$  分别为径向应变  $\epsilon_r$  和切向应变  $\epsilon_\theta$  的弹

性分量。

将几何方程式  $\epsilon_r = \frac{du}{dr}$  ( $u$  为围岩塑性区位移),

$\epsilon_\theta = \frac{u}{r}$  代入式(16), 得

$$\beta \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = \beta \epsilon_r^e + \epsilon_\theta^e = f(r) \quad (17)$$

以式(12)中  $r=r_2$  时的位移  $u_{r_2}$  为边界条件, 代入式(17)积分可得

$$u = \frac{1}{r^{1/\beta}} \int_{r_2}^r \frac{1}{\beta} r^{1/\beta} f(r) dr + u_{r_2} \left(\frac{r_2}{r}\right)^{1/\beta} \quad (18)$$

由式(18)可知, 要确定围岩塑性区位移的具体表达式, 就要对塑性区的弹性应变进行计算。围岩塑性区的弹性应变采用广义胡克定律, 并扣除初始地应力  $q$ , 能更加真实反映隧道的受力变形。围岩塑性区的弹性应变为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r^e &= \frac{1+v_r}{E(r)} [(1-v_r)(\sigma_r - q) + v_r(\sigma_\theta - q)] \\ \epsilon_\theta^e &= \frac{1+v_r}{E(r)} [(1-v_r)(\sigma_\theta - q) + v_r(\sigma_r - q)] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

则

$$\begin{aligned} f_3(r) &= \beta \epsilon_r^e + \epsilon_\theta^e = \frac{1+v_r}{E(r)} [(1-v_r - \beta v_r) \sigma_\theta + \\ &\quad (\beta - v_r - \beta v_r) \sigma_r - (1-2v_r)(\beta+1)q] \end{aligned} \quad (20)$$

将式(20)代入式(18), 进而积分可得

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r^{1/\beta}} \left\{ -\frac{1+v}{E} [q \sin(\varphi_{t0}) + c_{t0} \cos(\varphi_{t0})] r_2^{\frac{1+\beta}{\beta}} + \right. \\ &\quad \frac{1+v_r}{E(r)} \left[ F_1 \left( r^{\frac{1+\beta+A_2\beta-\eta\beta}{\beta}} - r_2^{\frac{1+\beta+A_2\beta-\eta\beta}{\beta}} \right) + \right. \\ &\quad F_2 (\ln(r) r^{\frac{1+\beta-\eta\beta}{\beta}} - \ln(r_2) r_2^{\frac{1+\beta-\eta\beta}{\beta}} - \\ &\quad \left. \left( \frac{\beta}{1+\beta-\eta\beta} + \ln(r_1) \right) \left( r^{\frac{1+\beta-\eta\beta}{\beta}} - r_2^{\frac{1+\beta-\eta\beta}{\beta}} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. F_3 \left( r^{\frac{1+\beta-\eta\beta}{\beta}} - r_2^{\frac{1+\beta-\eta\beta}{\beta}} \right) \right] \} \\ F_1 &= \frac{[-A_1 + (A_1+1)v_r + (v_r A_1 - 1 + v_r)\beta]}{(A_2\beta + 1 + \beta - \eta\beta) r_1^{A_2 - n}} \cdot \\ &\quad [c_{t1} \cot(\varphi_{t1}) + D_2] \\ F_2 &= \frac{-(1-2v_r)(\beta+1)}{(1+\beta-\eta\beta) r_1^{-n}} D_1 \\ F_3 &= \{ (1-2v_r)(\beta+1) [c_{t1} \cot(\varphi_{t1}) + q] + \\ &\quad (1-v_r - \beta v_r) D_3 + (\beta - v_r - \beta v_r) D_2 \} / \\ &\quad (1+\beta-\eta\beta) r_1^{-n} \end{aligned} \quad (21)$$

求解式(14)可计算出塑性区半径  $r_2$ , 代入式(21)即可求得位移解析解, 再将  $r=r_1$  代入式(21)可得施工期隧洞洞壁位移。

## 2.2 运行期围岩位移分析

图2为运行期隧洞力学分析模型, 其中  $r'_2$  为运

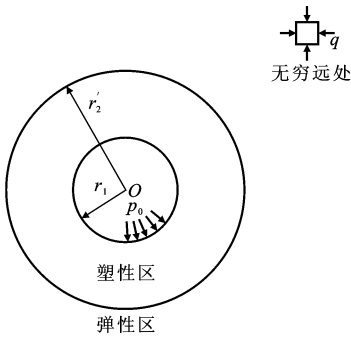


图2 运行期隧洞力学分析模型

Fig. 2 Mechanics Analysis Model of Tunnel During Operating Period

运行期围岩塑性区外半径,  $p_0$  为运行期隧洞内水压力, 假定施工期围岩处于弹性状态。运行期破坏时, 满足平面应变状态的三剪统一强度准则为

$$\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = -\frac{\sigma_\theta + \sigma_r}{2} \sin(\varphi_{ij}) - \eta p'_w \sin(\varphi_{ij}) + c_{ij} \cos(\varphi_{ij}) \quad (22)$$

在围岩塑性区内,  $\sigma_1 = \sigma_\theta$ ,  $\sigma_3 = \sigma_r$ , 具体分析同第2.1节, 则运行期可得如下结果。

围岩弹性区的应力和位移分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -q \left(1 - \frac{r_2'^2}{r^2}\right) - p'_{r_2} \frac{r_2'^2}{r^2} - \eta p'_w \\ \sigma_\theta &= -q \left(1 + \frac{r_2'^2}{r^2}\right) + p'_{r_2} \frac{r_2'^2}{r^2} - \eta p'_w \\ u^e &= -\frac{(1+\nu)}{E} \frac{r_2'^2 (q - p'_{r_2})}{r} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$p'_{r_2} = q[1 + \sin(\varphi_{i0})] + c_{i0} \cos(\varphi_{i0}) \quad (24)$$

式中:  $p'_{r_2}$  为运行期弹塑性交界处的径向压力。

围岩塑性区的应力<sup>[10]</sup>为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -[p_0 + c_{i1} \cot(\varphi_{i1}) + M_1 - M_2] \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-A_3} + \\ &\quad M_3 \ln\left(\frac{r}{R_c}\right) - M_4 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + c_{i1} \cot(\varphi_{i1}) + M_1 \\ \sigma_\theta &= -\frac{1}{A_1} [p_0 + c_{i1} \cot(\varphi_{i1}) + M_1 - M_2] \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-A_3} + \\ &\quad M_3 \ln\left(\frac{r}{R_c}\right) - M_4 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + c_{i1} \cot(\varphi_{i1}) + M_5 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{2\sin(\varphi_{i1})}{1 + \sin(\varphi_{i1})}, M_1 = \eta \frac{[1 + \sin(\varphi_{i1})](p_i - p_m)}{\sin(\varphi_{i1}) \ln(R_c/r_1)}, \\ M_2 &= \eta p_m, M_3 = \eta p_m / \ln\left(\frac{R_c}{r_1}\right), M_4 = \eta p_i / \ln\left(\frac{R_c}{r_1}\right), \\ M_5 &= \eta \frac{[1 - \sin(\varphi_{i1})](p_i - p_m)}{\sin(\varphi_{i1}) \ln(R_c/r_1)} \end{aligned}$$

围岩塑性区外半径  $r_2'$  的隐式计算式为

$$\begin{aligned} [p_0 + c_{i1} \cot(\varphi_{i1}) + M_1 - M_2] \left(\frac{r_2'}{r_1}\right)^{-A_3} = \\ q[1 + \sin(\varphi_{i0})] + c_{i0} \cos(\varphi_{i0}) + c_{i1} \cot(\varphi_{i1}) + \\ M_3 \ln\left(\frac{r_2'}{R_c}\right) - M_4 \ln\left(\frac{r_2'}{r_1}\right) + M_1 \end{aligned} \quad (26)$$

运行期塑性区弹性应变也采用广义胡克定律, 能更真实反映围岩的变形情况, 则

$$\begin{aligned} f(r) = \beta \epsilon_\theta^e + \epsilon_r^e = \frac{1 + \nu_r}{E(r)} [(1 - \nu_r - \beta \nu_r) \sigma_r + \\ (\beta - \nu_r - \beta \nu_r) \sigma_\theta - (1 - 2\nu_r)(\beta + 1)q] \end{aligned} \quad (27)$$

将式(27)代入式(17)且以运行期弹塑性交界  $r = r_2'$  处的位移  $u_{r_2}'$  为边界条件, 积分可得

$$u = \frac{1}{r^\beta} \int_{r_2}^r r^\beta f(r) dr + u_{r_2}' \left(\frac{r_2'}{r}\right)^\beta \quad (28)$$

求解式(28), 可得塑性区位移解析解为

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{r^\beta} \left\{ \frac{1 + \nu}{E} [q \sin(\varphi_{i0}) + c_{i0} \cos(\varphi_{i0})] r_2'^{1+\beta} + \right. \\ \left. \frac{1 + \nu_r}{E(r)} [H_1 (r^{1+\beta-A_3-n} - r_2'^{1+\beta-A_3-n}) + H_2 \cdot \right. \\ \left. [(M_3 - M_4)(\ln(r) r^{1+\beta-n} - \ln(r_2') r_2'^{1+\beta+n}) - \right. \\ \left. \left(\frac{M_3 - M_4}{1 + \beta - n} + M_3 \ln(R_c) - M_4 \ln(r_1)\right) (r^{1+\beta-n} - \right. \\ \left. r_2'^{1+\beta-n})] + H_3 (r^{1+\beta-n} - r_2'^{1+\beta-n}) \right\} \\ H_1 = \frac{[-1 + (1/A_1 + 1)\nu_r + (\nu_r - 1/A_1 + \nu_r/A_1)\beta]}{(-A_3 + 1 + \beta - n) r_1^{-A_3-n}} \cdot \\ [p_0 + c_{i1} \cot(\varphi_{i1}) + M_1 - M_2] \\ H_2 = \frac{(1 - 2\nu_r)(\beta + 1)}{(1 + \beta - n) r_1^{-n}} \\ H_3 = \{ (1 - 2\nu_r)(\beta + 1) [c_{i1} \cot(\varphi_{i1}) + q] + \\ (1 - \nu_r - \beta \nu_r) M_1 + (\beta - \nu_r - \beta \nu_r) M_5 \} / \\ (1 + \beta - n) r_1^{-n} \end{aligned} \quad (29)$$

由式(26)计算出  $r_2'$ , 再将  $r_2'$  代入式(29), 可得运行期塑性区位移解析解。将  $r = r_1$  代入式(29), 可求得运行期隧洞洞壁位移。

### 3 解的对比分析

#### 3.1 解的退化与文献对比

本文所推导的塑性区位移公式能反映5种因素的综合影响, 为一系列解的集合。通过不同的参数取值可具体反映每一种因素的影响, 包括渗流体力参数  $\eta$ 、中间主应力参数  $b$ 、脆性软化参数  $c_r$  和  $\varphi_r$ 、剪胀特性参数  $\beta$  和塑性区与弹性区不同弹性模量的参数  $E_r$  与  $n$ 。当参数取不同值时, 本文解答可得到多种不同解。当中间主应力参数  $b = 0$  时, 退化

为 Mohr-Coulomb 屈服准则解; 渗流体积力有效面积参数  $\eta=0$  时, 得到不考虑渗透体积力解<sup>[11-12,15]</sup>; 软化特性参数  $c_i=c_r, \varphi_i=\varphi_r$  时, 得到理想弹塑性模型解<sup>[13]</sup>; 剪胀特性参数  $\beta=1$  时, 得到不考虑围岩剪胀解; 弹性模量  $E_r=E_i$  (弹性区) 和  $n=0$  时, 得到弹性区和塑性区弹性模量相同解<sup>[10,13]</sup>。

### 3.2 对比分析

为验证本文公式的正确性, 将公式结果与文献[11],[13]进行比较。文献[11]综合考虑软化特性、剪胀特性、塑性区弹性模量等因素的影响, 推导了围岩塑性区位移双剪统一解, 但忽略了渗流对围岩的影响。将本文所得结果取  $\eta=0$  即不考虑渗透体积力时得到的三剪统一解与文献结果进行对比。

将式(29)所得结果取  $\eta=0$ , 可得

$$u = \frac{1}{r^\beta} \left\{ u_r' r_2'^\beta + \frac{1+v_r}{E(r)} [H_1 (r^{1+\beta-A_3-n} - r_2'^{1+\beta-A_3-n}) + H_3 (r^{1+\beta-n} - r_2'^{1+\beta-n})] \right\} \quad (30)$$

其中

$$H_1 = \frac{[-1 + (1/A_1 + 1)v_r + (v_r - 1/A_1 + v_r/A_1)\beta]}{(-A_3 + 1 + \beta - n)r_1^{-A_3-n}} [p_0 + c_{t1} \cot(\varphi_{t1})]$$

$$H_3 = \frac{(1 - 2v_r)(\beta + 1)[c_{t1} \cot(\varphi_{t1}) + q]}{(1 + \beta - n)r_1^{-n}}$$

将式(30)与文献[11],[12]中公式进行对比分析, 取文献[11]相关参数:  $r_1 = 2.5$  m, 初始地应力  $p_0 = 150$  MPa,  $E_i = 42$  GPa,  $E_r = 10$  GPa, 泊松比  $\nu = 0.2$ ,  $c_i = 14.1$  MPa,  $\varphi_i = 45.8^\circ$ ,  $c_r = 6.4$  MPa,  $\varphi_r = 28.3^\circ$ , 剪胀特性参数  $\beta = 1$ 。所得塑性区位移结果比较如图 3 所示, 双剪统一强度理论中间主应力参数用  $b'$  来表示。

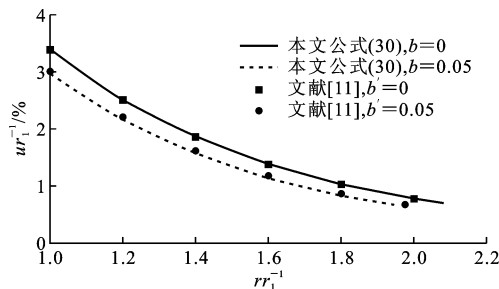


图 3 本文结果与文献[11]结果比较

Fig. 3 Results Comparison of This Paper and Literature [11]

文献[13]推导了考虑剪胀特性的双剪统一解, 但未考虑渗流、软化及塑性区弹性模量等因素影响。

将式(29)中各参数取为  $\eta=0, c_i=c_r, \varphi_i=\varphi_r, E_i=E_r$  和  $n=0$ , 即不考虑渗流体积力、软化、弹塑性

区弹性模量等因素的影响, 整理可得

$$u = \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{r^\beta} [u_r' r_2'^\beta + H_1 (r^{1+\beta-A_3} - r_2'^{1+\beta-A_3}) + H_3 (r^{1+\beta} - r_2'^{1+\beta})] \quad (31)$$

其中

$$H_1 = \frac{[-1 + (1/A_1 + 1)\nu + (\nu - 1/A_1 + \nu/A_1)\beta]}{(-A_3 + 1 + \beta)r_1^{-A_3}} [p_0 + c_{t1} \cot(\varphi_{t1})]$$

$$H_3 = (1 - 2\nu_r) [c_{t1} \cot(\varphi_{t1}) + q]$$

将式(31)与文献[13]中公式进行对比分析, 仍采用文献[11]中的参数, 并将材料参数取为  $E_i = E_r = 42$  GPa,  $c_i = c_r = 14.1$  MPa,  $\varphi_i = \varphi_r = 45.8^\circ$ , 所得塑性区位移结果比较如图 4 所示。

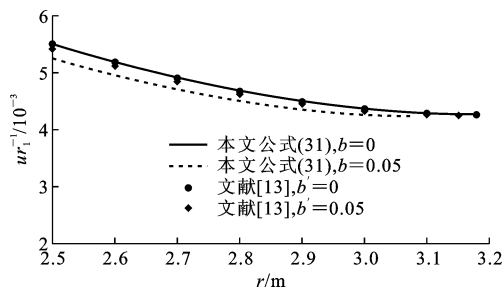


图 4 本文结果与文献[13]结果比较

Fig. 4 Results Comparison of This Paper and Literature [13]

由图 3, 4 可以看出: 本文与文献[11],[13]在塑性区范围内位移均随半径的增大而减小, 且当  $b=0$  时两者均退化为 Mohr-Coulomb 屈服准则解, 两者结果完全一致。当中间主应力参数取值为 0.05 时, 本文计算的塑性区相对位移小于文献[11],[13]所得结果。在隧洞洞壁处, 文献[11]的相对位移为  $3.029 \times 10^{-2}$  m, 比本文结果的塑性区相对位移  $2.965 \times 10^{-2}$  m 多 2.11%, 文献[11]和本文结果的平均相对误差为 2.57%。文献[13]在洞壁处的绝对位移为  $5.432 \times 10^{-3}$  m, 比本文结果  $5.254 \times 10^{-3}$  m 多 3.28%, 与本文结果的平均相对误差为 2.42%。文献[11]比文献[13]多考虑了脆性软化的影响, 其位移明显增大, 说明软化对围岩强度具有减弱作用, 实际工程要加以考虑。

双剪统一强度理论参数  $b'$  反映了中间主剪应力  $\tau$  以及相应面上的正应力  $\sigma$  对材料屈服或破坏的影响程度, 其取值范围为  $0 \leq b' < 1$  时,  $\sigma\tau$  组合应力双剪统一屈服线的各种特例都是外凸的。三剪强度准则中参数  $b$  反映了中间主剪应力  $\tau$  以及相应面上的正应力对材料屈服或破坏的影响程度, 三剪统一强度准则参数  $b$  只有在  $0 \leq b \leq b_{\max} = \frac{\alpha}{\alpha+2}$  (最大值与

材料的单轴抗拉与抗压强度比有关)时,才能保证屈服线的外凸性。由文献[15]可知,当三剪统一强度准则参数  $b$  取  $1/3$  时,三剪统一强度准则逼近 Mises 屈服准则,由文献[22]可知,当  $b'$  取  $1/2$  时,双剪统一强度理论逼近 Mises 屈服准则,当两者的参数取相同值时,三剪强度准则考虑的中间主应力效应更明显,更能发挥材料的潜能,故所得位移小于双剪统一强度理论的结果。

### 4 参数分析

取文献[10]中算例进行参数分析,围岩材料力学参数如表 1 所示,隧洞内半径  $r_1=2.5\text{ m}$ ,  $R_0=12r_1=30\text{ m}$ ,  $R_c=8r=20\text{ m}$ 。将算例中的各参数代

表 1 围岩参数  
Tab. 1 Parameters of Surrounding Rock

| $q/\text{MPa}$ | $p_0/\text{MPa}$ | $p_i/\text{MPa}$ | $p_m/\text{MPa}$ | $\eta$ | $\nu$ | $E/\text{GPa}$ | $E_r/\text{GPa}$ | $c_0/\text{kPa}$ | $\varphi_0/(\text{^\circ})$ | $c_1/\text{kPa}$ | $\varphi_1/(\text{^\circ})$ |
|----------------|------------------|------------------|------------------|--------|-------|----------------|------------------|------------------|-----------------------------|------------------|-----------------------------|
| 1              | 6                | 1                | 0.5              | 1      | 0.3   | 20             | 10               | 450              | 30                          | 250              | 28                          |

#### 4.1 中间主应力

中间主应力参数  $b$  反映的是隧洞围岩中间主应力效应,参数  $b$  取值越大,中间主应力效应越明显。由式(2),(3)可得,弹-脆-塑性模型和理想弹塑性模型对应于不同的  $\alpha$  值,从而参数  $b$  的最大值分别为 0.153 和 0.143。当  $\varphi$  取不同值时, $b$  的最大值也发生变化,为方便对比,本文取  $0\leq b\leq 0.1$ ,保持  $c_r=250\text{ kPa}$ ,  $\beta=1$ ,  $E_i=E_r=20\text{ GPa}$ ,  $n=0$  不变进行分析,中间主应力的影响如图 5 所示。

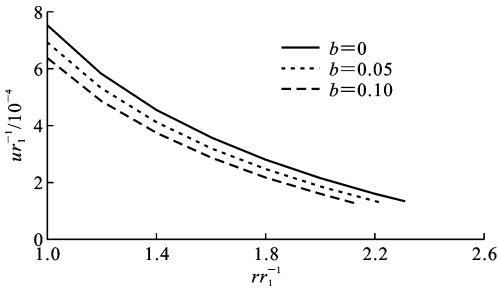


图 5 中间主应力的影响

Fig. 5 Influence of Intermediate Principal Stress

由图 5 可以看出,在塑性区范围内位移随半径  $r$  的增大而减小, $b=0$  时围岩塑性区位移最大,随着  $b$  的增加,围岩塑性区位移不断减小,特别是在隧洞洞壁处, $b=0.1$  时的塑性区位移为  $15.925\times 10^{-4}\text{ m}$ ,比  $b=0$  时的  $18.855\times 10^{-4}\text{ m}$  减少了 15.5%。总之,考虑不同的  $b$  值对围岩塑性区位移分布有显著影响,说明考虑围岩中间主应力的影响能更充分发挥材料的强度潜能,从而减少支护费用。

入式(14)可以求得当围岩处于施工期时塑性区半径  $r_2=r_1=2.5\text{ m}$ ,即此时围岩不存在塑性区,安全等级高;由式(26)可以求得  $b$  取 0,0.05,0.10 时运行期塑性区半径  $r_2'$  分别为 5.78,5.54,5.31 m,即隧洞处于弹塑性状态,安全等级低。如果不考虑渗流即  $\eta=0$  的影响,由式(26)可以求得  $b$  取 0,0.05,0.10 时运行期塑性区半径  $r_2'$  分别为 4.85,4.67,4.50 m。与考虑渗流体积力即  $\eta=1$  相比,塑性区半径明显减小,说明不考虑渗流体积力设计的隧洞安全等级低,与实际情况相比偏于危险,易发生事故,考虑渗流体积力的影响是很有必要的,故本文分析了渗流体积力作用下各参数对运行期塑性区位移的影响规律。

#### 4.2 脆性软化

围岩的塑性区残余黏聚力  $c_r$  变化较大,而残余内摩擦角  $\varphi_r$  对岩土材料来说变化较小,故本文只考虑  $c_r$  对塑性区位移的影响。保持  $b=0.05$ ,  $\beta=1$ ,  $E_i=E_r=20\text{ GPa}$ ,  $n=0$  不变进行分析,由式(26)可知,软化参数  $c_r$ ,  $\varphi_r$  对塑性区半径有影响,计算出当  $c_r$  取 350,250,150 kPa 时运行期塑性区半径  $r_2'$  分别为 5.02,5.54,6.21 m。脆性软化的影响见图 6。

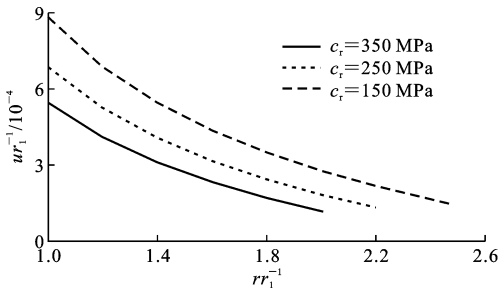


图 6 脆性软化的影响

Fig. 6 Influence of Brittle Softening

由图 6 可知,随着  $c_r$  的减小, $u$  会明显增大,说明  $c_r$  对运行期的塑性区位移有显著影响。 $c_r=350\text{ kPa}$  时隧洞洞壁处塑性区相对位移为  $13.717\times 10^{-4}\text{ m}$ ,比  $c_r=150\text{ kPa}$  时的  $22.055\times 10^{-4}\text{ m}$  减少了 37.8%。这说明不考虑围岩的应变软化,围岩的位移会偏小,使设计偏于危险,增加了发生事故的风险,应在施工设计中合理考虑软化的影响。

#### 4.3 剪胀特性

围岩塑性屈服后符合非关联流动法则,可通过

剪胀特性参数  $\beta$  来考虑剪胀的影响程度。分别取  $\beta$  为 1, 2, 2.77 (由文献[21]所得的  $\beta$  最大值), 保持  $b=0.05, c_r=250 \text{ kPa}, E_i=E_r=20 \text{ GPa}, n=0$  不变来分析运行期隧洞塑性区位移  $u$ , 剪胀特性的影响如图 7 所示。

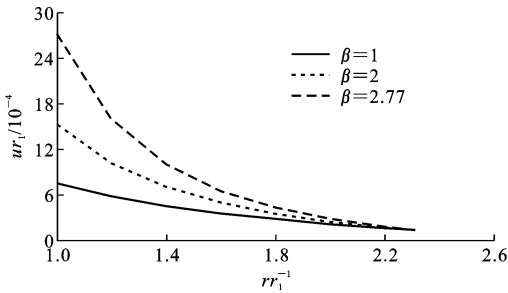


图 7 剪胀特性的影响

Fig. 7 Influence of Shear Dilation Characteristic

由图 7 可以看出,  $\beta$  对塑性区位移影响显著, 且距离围岩洞壁处越近影响越显著。  $\beta=1$  时, 围岩塑

性区位移最小, 随着  $\beta$  增加, 围岩塑性区位移不断增大,  $\beta=2.77$  时运行期隧洞洞壁相对位移  $67.767 \times 10^{-4} \text{ m}$  比  $\beta=1$  时的  $18.753 \times 10^{-4} \text{ m}$  增大了 72.3%。这说明不考虑围岩剪胀会明显低估隧洞的变形情况, 工程设计偏于危险。

4.4 塑性区弹性模量

针对弹性区和塑性区弹性模量之间的关系, 有 3 种方法进行处理: 方法 1, 塑性区弹性模量不发生变化, 保持和弹性区一致, 即  $E_i=E_r=20 \text{ GPa}$  和  $n=0$ ; 方法 2, 塑性区弹性模量取与半径无关且比弹性区小的一常量, 即  $E_r=10 \text{ GPa} < E_i=20 \text{ GPa}$  和  $n=0$ ; 方法 3, 塑性区的弹性模量为半径的幂函数, 即  $E_r=10 \text{ GPa} < E_i=20 \text{ GPa}$  和  $n>0$ 。图 8 给出了 3 种不同处理方法下围岩塑性区位移  $u$  与中间主应力参数  $b$  和剪胀特性参数  $\beta$  的变化关系。

从图 8 可以看出: 方法 1 得到的运行期塑性区位移最小; 方法 2 得到的运行期塑性区位移最大; 围

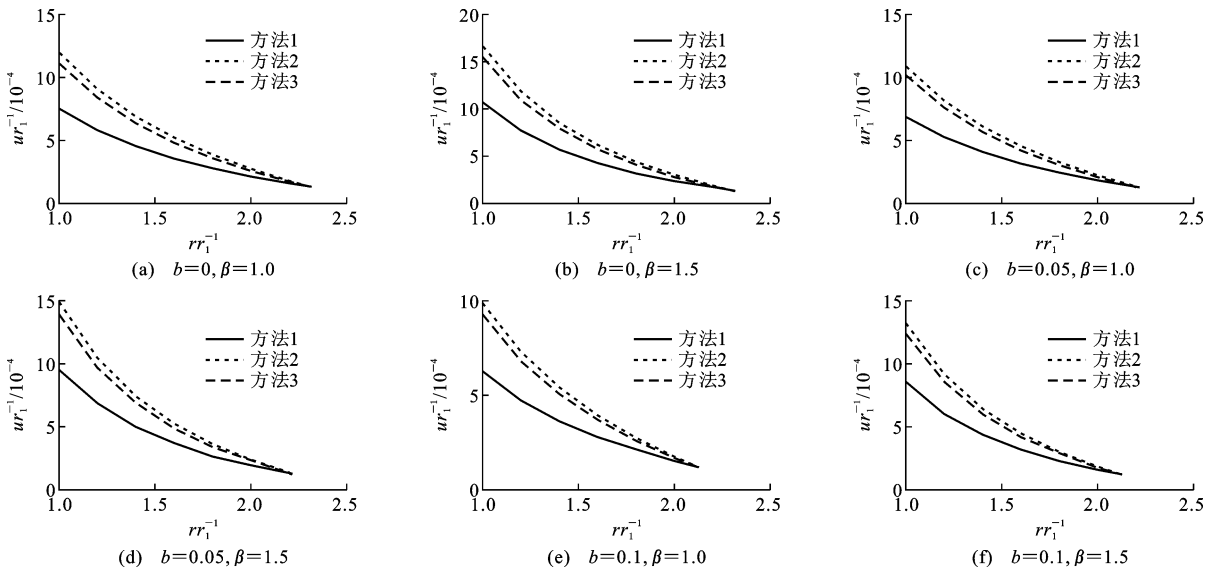


图 8 塑性区弹性模量的影响

Fig. 8 Influence of Elastic Modulus in Plastic Zone

岩弹性模量采用含有半径的幂函数即方法 3 得到的结果处于方法 1, 2 之间, 充分考虑了围岩开挖受扰劣化的影响, 方法 3 更接近巷道变形的真实情况。

从图 8 还可以看出: 3 种方法所得出的围岩塑性区位移随  $b$  的增大而减小, 随  $\beta$  的增大而增大。当  $b=0, \beta=1.5$  时, 方法 2 结果比方法 3 高 7.06%, 方法 3 结果比方法 1 高 32.3%, 方法 2 结果比方法 1 高 37.1%, 此时 3 种处理方法下运行期隧洞洞壁相对位移的绝对差值相差最大; 当  $b=0.1, \beta=1.0$  时, 方法 2 结果比方法 3 高 6.22%, 方法 3 结果比方法 1 高 32.61%, 方法 2 结果比方法 1 高

36.80%, 此时 3 种处理方法相差最小。其余 4 种  $b$  和  $\beta$  的不同组合状态, 所得结果处于二者之间, 故应根据具体工程情况, 合理进行选择。

5 结 语

(1) 本文采用三剪统一强度准则, 考虑了中间主应力、渗流、软化、剪胀和塑性区弹性模量等因素的影响, 得到了水工圆形隧洞塑性区位移统一解, 该解综合反映了 5 种因素的共同影响, 参数取不同值时, 可为一系列解的集合。当中间主应力参数  $b=0$  时, 退化为 Mohr-Coulomb 屈服准则解; 渗流体积力有



效面积参数  $\eta=0$  时,得到不考虑渗透体积力解;软化特性参数  $c_i=c_r, \varphi_i=\varphi_r$  时,得到理想弹塑性模型解;剪胀特性参数  $\beta=1$  时,得到不考虑围岩剪胀解;弹性模量  $E_r=E_i$  和  $n=0$  时,得到弹性区和塑性区弹性模量相同解。该解析解克服了双剪统一强度理论在某些应力状态下的滑移面突变问题。

(2)中间主应力对围岩塑性区位移具有重要影响,  $b=0.1$  时运行期塑性区洞壁位移比  $b=0$  时减少了 15.5%,这说明考虑中间主应力效应能更充分发挥材料的潜能,减少支护费用,降低工程造价。脆性软化和剪胀特性对围岩塑性区位移有显著影响,  $c_r=350$  kPa 时围岩洞壁塑性区位移比  $c_r=150$  kPa 减少了 37.8%,  $\beta=2.77$  时运行期巷道洞壁位移比  $\beta=1$  时增大了 72.3%。不考虑软化和剪胀特性会导致工程设计偏于危险,故应根据围岩的变形规律合理选择软化强度参数和剪胀特性参数。

(3)隧洞塑性区弹性模量采用含有半径幂函数的表达式,得到的结果能充分体现隧洞开挖卸载受扰劣化后的应力重分布影响,更符合真实的隧洞变形情况。

(4)隧洞在施工期时要适时进行支护和衬砌,避免隧洞施工期进入弹塑性状态,若在施工期隧洞已产生塑性变形,隧洞应力-应变关系会呈非线性,故运行期隧洞应力不能直接用叠加原理进行计算,可采用有限环变位协调法确定,具体内容可进一步研究。

## 参考文献:

## References:

- [1] 卞康,肖明,刘会波.考虑脆性损伤和渗流的圆形水工隧洞解析解[J].岩土力学,2012,33(1):209-214,219.  
BIAN Kang, XIAO Ming, LIU Hui-bo. Analytical Solutions of Circular Hydraulic Tunnel Considering Brittle Damage and Seepage[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33(1): 209-214, 219.
- [2] 高召宁,孟祥瑞,付志亮.考虑渗流、应变软化和扩容的巷道围岩弹塑性分析[J].重庆大学学报,2014,37(1):96-101.  
GAO Zhao-ning, MENG Xiang-rui, FU Zhi-liang. Elasto-plastic Analysis on Surrounding Rock of Roadways Based on Seepage, Strain Softening and Dilatancy[J]. Journal of Chongqing University, 2014, 37(1): 96-101.
- [3] 蔡晓鸿,蔡勇平.水工压力隧洞结构应力计算[M].北京:中国水利水电出版社,2004.
- CAI Xiao-hong, CAI Yong-ping. Structure Stress Calculation for Hydraulic Pressure Tunnel[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2004.
- [4] 张强,王水林,葛修润.圆形巷道围岩应变软化弹塑性分析[J].岩石力学与工程学报,2010,29(5):1031-1035.  
ZHANG Qiang, WANG Shui-lin, GE Xiu-run. Elastoplastic Analysis of Circular Openings in Strain-softening Rock Masses[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(5): 1031-1035.
- [5] WANG S L, WU Z J, GUO M W, et al. Theoretical Solutions of a Circular Tunnel with the Influence of Axial in Situ Stress in Elastic-brittle-plastic Rock[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2012, 30: 155-168.
- [6] 侯公羽,牛晓松.基于 Levy-Mises 本构关系及 Hoek-Brown 屈服准则的轴对称圆巷理想弹塑性解[J].岩石力学与工程学报,2010,29(4):765-777.  
HOU Gong-yu, NIU Xiao-song. Perfect Elastoplastic Solution of Axisymmetric Cylindrical Cavity Based on Levy-Mises Constitutive Relation and Hoek-Brown Failure Criterion[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(4): 765-777.
- [7] 黄阜,杨小礼.考虑渗透力和原始 Hoek-Brown 屈服准则时圆形洞室解析解[J].岩土力学,2010,31(5):1627-1632.  
HUANG Fu, YANG Xiao-li. Analytical Solution of Circular Openings Subjected to Seepage in Hoek-Brown Media[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(5): 1627-1632.
- [8] XU S Q, YU M H. The Effect of the Intermediate Principal Stress on the Ground Response of Circular Openings in Rock Mass[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2006, 39(2): 169-181.
- [9] 范浩,刘万荣,付腾飞,等.考虑渗流剪胀和中间主应力的隧洞围岩稳定性分析[J].中国安全科学学报,2016,26(2):139-145.  
FAN Hao, LIU Wan-rong, FU Teng-fei, et al. Stability Analysis of Surrounding Rock of Tunnel Considering Seepage, Shear Dilation and Intermediate Principal Stress[J]. China Safety Science Journal, 2016, 26(2): 139-145.
- [10] 张常光,张庆贺,赵均海.考虑应变软化、剪胀和渗流的水工隧洞解析解[J].岩土工程学报,2009,31(12):1941-1946.  
ZHANG Chang-guang, ZHANG Qing-he, ZHAO Jun-hai. Analytical Solutions of Hydraulic Tunnels Considering Strain Softening, Shear Dilation and Seepage

- [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(12): 1941-1946.
- [11] 张常光, 徐 飞, 张庆贺, 等. 岩石隧道塑性位移新解[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(增 2): 3551-3556.
- ZHANG Chang-guang, XU Fei, ZHANG Qing-he, et al. New Plastic Solution for Displacement of Rock Tunnels[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, 30(S2): 3551-3556.
- [12] 张常光, 范 文, 赵均海. 深埋圆形巷道围岩塑性区位移及特征曲线新解和参数分析[J]. 岩土力学, 2016, 37(1): 12-24, 32.
- ZHANG Chang-guang, FAN Wen, ZHAO Jun-hai. New Solutions of Rock Plastic Displacement and Ground Response Curve for a Deep Circular Tunnel and Parametric Analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(1): 12-24, 32.
- [13] 曾开华, 鞠海燕, 盛国君, 等. 巷道围岩弹塑性解析解及工程应用[J]. 煤炭学报, 2011, 36(5): 752-755.
- ZENG Kai-hua, JU Hai-yan, SHENG Guo-jun, et al. Elastic-plastic Analytical Solutions for Surrounding Rocks of Tunnels and Its Engineering Applications [J]. Journal of China Coal Society, 2011, 36(5): 752-755.
- [14] 胡小荣, 俞茂宏. 三剪强度准则及其在巷道围岩弹塑性分析中的应用[J]. 煤炭学报, 2003, 28(4): 389-393.
- HU Xiao-rong, YU Mao-hong. New Tri-shear Failure Criterion and Its Application in Elasto-plastic Analysis for the Wall Rock of Tunnel[J]. Journal of China Coal Society, 2003, 28(4): 389-393.
- [15] 张常光, 赵均海, 孙珊珊. 隧道围岩弹-脆-塑性应力的三剪统一解[J]. 应用力学学报, 2012, 29(5): 530-534.
- ZHANG Chang-guang, ZHAO Jun-hai, SUN Shan-shan. An Analytical Solution for Tunnel Stress in an Elastic-brittle-plastic Rock Based on the Triple-shear Unified Strength Criterion[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2012, 29(5): 530-534.
- [16] BROWN E T, BRAY J W, SANTARELLI F J. Influence of Stress-dependent Elastic Moduli on Stresses and Strains Around Axisymmetric Boreholes[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 1989, 22(3): 189-203.
- [17] NAWROCKI P A, DUSSEAUULT M B. Modelling of Damaged Zones Around Openings Using Radius-dependent Young's Modulus[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 1995, 28(4): 227-239.
- [18] SHARAN S K. Analytical Solutions for Stresses and Displacements Around a Circular Opening in a Generalized Hoek-Brown Rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2008, 45(1): 78-85.
- [19] ZHANG C G, ZHAO J H, ZHANG Q H, et al. A New Closed-form Solution for Circular Openings Modeled by the Unified Strength Theory and Radius-dependent Young's Modulus [J]. Computers and Geotechnics, 2012, 42: 118-128.
- [20] 沈新普, 岑章志, 徐秉业. 弹脆塑性软化本构理论的特点及其数值计算[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 1995, 35(2): 22-27.
- SHEN Xin-pu, CEN Zhang-zhi, XU Bing-ye. The Characteristics of Elasto-brittle-plastic Softening Constitutive Theory and Its Numerical Calculation [J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 1995, 35(2): 22-27.
- [21] 蒋明镜, 沈珠江. 岩土类软化材料的柱形孔扩张统一解问题[J]. 岩土力学, 1996, 17(1): 1-8.
- JIANG Ming-jing, SHEN Zhu-jiang. Unified Solution to Expansion of Cylindrical Cavity for Geomaterials with Strain-softening Behaviour [J]. Rock and Soil Mechanics, 1996, 17(1): 1-8.
- [22] 赵均海. 强度理论及其工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- ZHAO Jun-hai. Strength Theory and Its Engineering Application[M]. Beijing: Science Press, 2003.