

文章编号:1673-2049(2018)06-0094-08

基于改进萤火虫优化算法和考虑空间变异特性的 边坡最小安全系数确定研究

褚雪松, 李 亮

(青岛理工大学 土木工程学院, 山东 青岛 266033)

摘要:在基本萤火虫算法中引入“短视”策略,结合一典型不排水边坡短期稳定问题,考虑土体材料的空间变异特性,构建相应参数的随机场,探讨了萤火虫个体数目 N 、移动步长 β 对萤火虫算法搜索效率的影响。结果表明:在其他条件相同的前提下,引入“短视”策略的萤火虫算法较未采取“短视”策略的萤火虫算法结果标准差要小,说明“短视”策略可以提高萤火虫算法的寻优能力;萤火虫个体数目 N 的增加也会提高算法的寻优能力,但是算法的计算时间 T 与 $N^{2.1}$ 成正比;从安全系数平均值角度来看,移动步长 β 的合理取值建议介于0~2之间;相同参数设置下萤火虫算法在波动范围较大时搜索到的安全系数标准差较之波动范围较小时的标准差要小,证明了波动范围增大后,边坡稳定最小化安全系数这一优化问题的复杂程度减弱;在考虑土体材料空间变异特性时,要变换算法的参数或者尝试不同的优化算法,以确保找到最小的安全系数及失稳模式。

关键词:边坡稳定;萤火虫算法;安全系数;可靠度;失稳模式

中图分类号:TU437 **文献标志码:**A

Improved Firefly Optimization Algorithm for Location of Minimum Factor of Safety Considering Spatial Variability

CHU Xue-song, LI Liang

(School of Civil Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao 266033, Shandong, China)

Abstract: The short-sighted strategy was introduced into the original firefly algorithm, and a typical short-term stability problem of undrained slope was considered. The random field of corresponding parameters was constructed considering the spatial variability of soil material. Finally, the influence of the number of firefly individuals N and the moving step β on the search efficiency of the algorithm was discussed. The results show that under the same other conditions, the standard deviation of the firefly algorithm results with the short-sighted strategy is smaller than that of the firefly algorithm without the short-sighted strategy, which indicates that the short-sighted strategy can improve the searching ability of the algorithm. Increasing the number of firefly individuals N will also improve optimization ability of the algorithm, but the calculation time T of the algorithm is proportional to $N^{2.1}$. From the point of view of the average safety factor, the reasonable value of the moving step β is between 0 and 2. Under the same parameters, the standard deviation of the safety factor searched by the firefly algorithm with larger fluctuation

收稿日期:2018-01-19

基金项目:国家自然科学基金项目(51274126)

作者简介:褚雪松(1977-),女,辽宁铁岭人,工学博士研究生,E-mail:chuxuesong@qtech.edu.cn。

通信作者:李 亮(1977-),男,山东济南人,副教授,工学博士,E-mail:cellldl@126.com。

range is smaller than that with smaller fluctuation range. It is proved that the complexity of the optimization problem of minimizing the safety factor of slope stability decreases with the increase of the fluctuation range. Considering the spatial variability characteristics of soil materials, the parameters or different optimization algorithms should be transformed to ensure finding the minimum safety factor and instability mode.

Key words: slope stability; firefly algorithm; safety factor; reliability; failure mechanism

0 引言

确定边坡的最小安全系数(失稳模式或者滑动面)是边坡稳定分析以及边坡可靠度分析中非常重要的步骤。对于边坡确定性分析而言,需要知道边坡最可能的滑动面以便为边坡设计与加固提供决策依据;对于边坡可靠度分析而言,需要知道蒙特卡洛每个样本下对应的确定性分析中可能的最小安全系数(失稳模式),以便为边坡失稳的可靠度分析(风险分析)提供定量支持。实际上,归根结底,在输入参数确定的前提下,如何确定边坡最小安全系数是非常古老而又关键的问题。在边坡稳定确定性分析中,许多学者均开展过卓有成效的研究工作,陈祖煜等^[1]采用单纯形等方法确定边坡的最小安全系数,邹广电^[2]采用非线性规划原理结合 Bishop 法对边坡的最小安全系数进行了搜索,香港理工大学郑榕明博士自主研发了 SLOPE2000 边坡稳定分析软件,集成了包括模拟退火算法^[3]、和声搜索算法^[4-5]、粒子群算法^[6-7]在内的多种优化算法,其他方法譬如复合形法^[8]、禁忌鱼群算法^[9]、遗传算法^[10]、蚁群算法^[11-12]、网鱼算法^[13-14]等都应用于边坡最小安全系数的搜索中,取得了一系列的研究成果。上述研究多采用均质边坡或者多层含软弱层的边坡为例,然而在考虑土体材料空间变异特性时,边坡的材料参数一般采用随机场模拟,对于每一个随机场的实现,将其参数输入到边坡确定性分析模型,然后进行最小安全系数的搜索,通过判断该最小安全系数是否小于 1 来决定该样本是否属于失效样本,该最小安全系数对应的滑动面积或者体积作为边坡失稳风险分析的重要参数,因此非常有必要研究土体材料参数随机场模拟前提下如何才能有效地确定边坡的最小安全系数及失稳模式。

1 边坡最小安全系数的确定

边坡稳定分析的确定性模型可以表述为如下的数学模型

$$\min F_s \{G_x, P_x, F_x, S_x\} \quad (1)$$

式中: F_s 为安全系数; G_x 为边坡的几何模型; P_x 为边坡土层的材料参数,包括密度 ρ 、内摩擦角 φ 以及黏聚力 c ; F_x 为边坡所承受的荷载,譬如自重,堆载等; S_x 为边坡失稳模式相关的数学变量,譬如圆弧滑动面的圆心或者一系列点的坐标等。

图 1 为边坡最小安全系数确定模型,其中, ρ_i , c_i , φ_i 分别为第 i 个土层土体材料的密度、黏聚力以及内摩擦角。边坡最小安全系数的确定就是在给定的边坡几何形状 G_x 、给定的土层材料参数 P_x 、给定的荷载 F_x 下,通过不断地变换可能的失稳模式 S_x ,以期寻找到最小的安全系数及其对应的失稳模式。上述介绍的所有优化方法都是不同的变换 S_x 策略,失稳模式可以假定为圆弧或者非圆弧,作为一般情况,本文假定失稳模式为非圆弧,由一系列的点通过样条函数插值得到,限于篇幅,本文不再详细描述非圆弧滑动面的模拟步骤,读者可参考文献^[15],^[16]。安全系数的计算方法采用 Spencer 法^[17]。

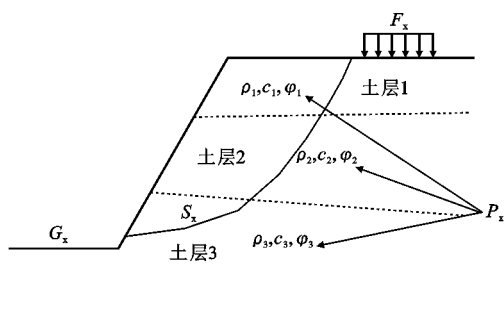


图 1 边坡最小安全系数确定模型
Fig. 1 Determining Model for Minimum Safety Factor of Slope

2 空间变异特性描述

土体材料的空间变异特性是土体材料不确定性来源中的一种,该特性的形成与土体材料在漫长的地质年代中所经受的沉积作用及地质环境有关,通常认为即使是在宏观均质的边坡土层内,任意不同两点之间的材料强度参数或多或少都存在一定的变异性。在常规的边坡稳定分析中,均质土层假定实际上是假定了任意不同两点之间的材料强度参数不

存在变异性或者说是完全相关的。研究表明^[18],土体材料的空间变异特性是土体材料的基本属性,在边坡可靠度分析中忽略该属性会得到失真的边坡失效概率,在某些情况下,失真程度会很大。由于 Phoon 等^[18]研究表明,边坡土层的水平变异特性较弱,因此本文仅考虑了土层的垂直变异特性。描述空间变异特性最常用的方法首推 Vanmarcke^[19]提出的随机场模拟方法,下面以图 2 所示的边坡为例,简单介绍一维随机场模拟的步骤。图 2 所示为一宏观均质的边坡,该均质边坡被离散为 12 个水平的小土层 $C_1 \sim C_{12}$,在每一个小土层内,材料参数是没有空间变异特性的,或者说是完全相关的,不同的小土层之间,材料参数存在变异特性或者说具有一定的相关性,随机场认为,这种相关性随着小土层相互之间距离的增加而衰减,譬如 C_1 与 C_2 之间的相关性要比 C_1 与 C_{12} 之间的相关性要强。具体的衰减公式为^[19]

$$\rho_{C_i C_j} = e^{-\frac{2|y_i - y_j|}{\lambda}} \quad (1)$$

式中: $\rho_{C_i C_j}$ 为 C_i 与 C_j 之间的相关系数; y_i 为土层 C_i 中心的 y 坐标; y_j 为土层 C_j 中心的 y 坐标; λ 为描述土层空间变异特性的参数,称之为波动范围, λ 值越大,则相应土层的空间变异特性越弱, $\lambda \rightarrow +\infty$ 时,则变为均质土层。

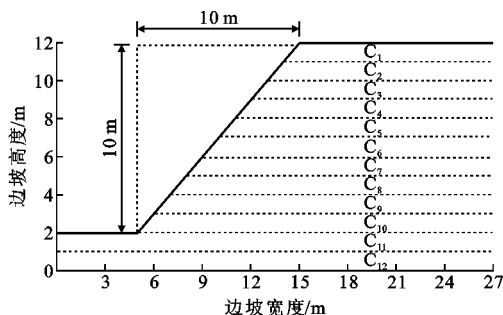


图 2 均质边坡空间变异特性描述

Fig. 2 Illustration of Spatial Variability for Homogeneous Slope

在得到相关系数矩阵之后,可以利用 Cholesky 分解结合概率密度函数得到随机场的实现,随机场的每一个实现就是确定了一组 $C_1 \sim C_{12}$ 小土层的强度参数值,譬如表 1 中每一行即为一个随机场的实现,记为 R_i 。

3 改进萤火虫算法

萤火虫算法^[20-23]是一种仿生算法,算法主要是模仿萤火虫群体在猎食等过程中根据生物萤光体发光亮度的强弱互相吸引来调整萤火虫个体之间的飞

行路线,从而达到群体之间的信息交流,实现种群的和谐与发展。将萤火虫个体比拟为优化问题中的一个解向量,个体之间位置的调整比拟为算法的寻优过程,个体发光的亮度比拟为优化问题的目标函数(譬如本文中的安全系数 F_s),该仿生算法遵循以下规则:

(1)萤火虫个体没有性别之分。

(2)萤火虫的亮度与分析问题的目标函数有关,对于最小安全系数的搜索问题而言,安全系数越小,则该个体的亮度就越大。

(3)萤火虫个体之间的吸引度随着个体之间距离的增加而递减。

假设萤火虫群体中的个体数目为 N ,每一个萤火虫在数学上可以表示为一个关于 S_x 的向量,记为 $X_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n)$, $i = 1, 2, \dots, N$, n 为模拟 S_x 所需要的变量个数。将萤火虫个体对应的向量代入边坡稳定分析数学模型,可得到一个安全系数 F_{S_i} ,萤火虫个体的亮度 $B_i = 1/(F_{S_i})$, d_{ij} 为萤火虫个体 X_i 和 X_j 之间的距离,萤火虫个体 i 和萤火虫个体 j 之间的吸引度 $A_{ij} = e^{d_{ij}}$,移动步长 β 取值越大,则 A_{ij} 越小,反之亦然。萤火虫算法求解边坡最小安全系数的步骤如下:

(1)算法初始化,确定变量 N, β ,以及最大迭代次数 I_t ;随机生成 N 个萤火虫个体,计算各自的亮度 B_i 。

(2)对 N 个萤火虫群体中的每一个个体 X_i 进行如下操作。判断是否存在比该个体亮度更高的个体,若有,则记为 X_j ,利用公式(2)调整 X_i 的位置并更新其亮度;如果群体中不存在比该个体更亮的个体,则采用公式(3)随机调整 X_i 的位置并更新其亮度。

$$x_i^k = \begin{cases} x_i^k + A_{ij}(x_j^k - x_i^k) + r_1(u_k - x_j^k) & x_j^k \geq x_i^k \\ x_i^k - A_{ij}(x_i^k - x_j^k) - r_2(x_j^k - l_k) & x_j^k < x_i^k \end{cases} \quad (2)$$

$$x_i^k = \begin{cases} x_i^k + r_3(u_k - x_i^k) & r_5 \geq 0.5 \\ x_i^k - r_4(x_i^k - l_k) & r_5 < 0.5 \end{cases} \quad (3)$$

式中: $r_1 \sim r_5$ 均为 $[0, 1]$ 之间的随机数; u_k, l_k 分别为描述数学变量 S_x 所需第 k 个变量的取值上、下限, $k = 1, 2, \dots, n$ 。

(3)重复执行步骤(2)共计 I_t 次,然后算法停止,从萤火虫群体中找出最亮的个体作为优化问题的解。

需要说明的是,基本的萤火虫算法在采用公式(2),(3)更新完萤火虫个体的位置之后,没有判断新位置的亮度是否优于当前位置的亮度,就从当前位

表 1 2 种波动范围下的随机场实现

Tab.1 Realization of Random Field at Two Fluctuation Ranges

λ/m	R_i	不同土层 C_i 下的不排水强度/kPa											
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
1	R_1	35.34	41.27	48.14	46.51	36.62	43.68	37.44	32.90	50.11	45.51	42.35	39.50
	R_2	39.70	41.43	40.83	48.10	43.06	32.80	37.60	35.40	35.79	40.79	27.92	27.15
	R_3	37.91	36.69	38.11	29.82	39.02	39.90	37.47	40.57	37.87	34.49	49.13	37.46
	R_4	40.31	42.14	27.35	28.56	31.39	41.25	37.20	54.87	27.96	28.47	49.78	48.67
	R_5	46.54	34.98	45.44	31.03	41.75	49.56	40.08	45.83	41.56	31.65	27.75	41.05
	R_6	41.87	47.64	36.21	44.43	42.86	37.63	46.52	40.58	37.70	36.67	41.59	55.30
	R_7	55.25	30.51	37.08	38.84	38.96	51.38	33.27	49.14	47.82	35.91	41.08	54.96
	R_8	31.33	35.33	47.30	48.99	34.94	34.16	39.82	36.56	34.19	41.36	44.26	38.81
	R_9	41.11	43.96	35.46	31.87	33.09	42.34	44.53	47.61	29.90	33.91	34.47	24.46
	R_{10}	39.29	48.32	33.16	28.89	37.82	35.96	31.67	33.69	31.06	31.81	22.88	25.78
1 000	R_1	27.98	27.81	27.79	27.42	26.78	27.06	27.24	27.70	27.96	28.20	28.07	27.51
	R_2	40.42	40.19	39.85	39.71	38.99	39.15	39.16	39.76	39.57	40.06	40.17	40.65
	R_3	70.42	70.54	70.31	68.87	68.73	67.37	67.10	67.17	69.53	72.06	72.80	72.31
	R_4	41.26	41.52	41.40	41.71	42.95	42.32	42.70	43.20	43.88	43.64	42.12	41.56
	R_5	38.98	39.54	40.10	40.20	40.50	41.04	40.33	39.84	39.99	40.48	39.33	38.97
	R_6	41.08	41.56	42.99	43.39	43.22	42.26	41.64	41.93	42.80	43.66	43.88	43.05
	R_7	21.08	21.16	21.14	21.33	21.57	21.26	21.58	21.80	21.73	22.19	22.13	22.06
	R_8	39.80	41.61	41.98	41.86	43.04	43.44	43.31	42.69	42.43	43.09	43.81	44.01
	R_9	38.01	37.74	38.15	38.09	38.08	38.19	38.19	38.26	38.34	38.68	38.07	38.58
	R_{10}	30.74	30.34	30.16	29.82	28.81	28.29	28.34	27.69	26.78	26.72	26.98	27.03

置移动到新位置。实际上,在优化过程中,为了使萤火虫个体的亮度快速增加,可以采取一种“短视”策略,即只有新位置的亮度比原来位置亮度增加时,萤火虫个体才会移动至该新位置,否则保持原位置不动。在基本的萤火虫算法中是没有采取“短视”策略的。这种策略通常会引起算法陷入局部最优,但是在算法的初期会提高算法的搜索效率。

4 算法影响参数分析

本算例考虑图 2 所示的边坡,坡高 10 m,考虑不排水工况下边坡的短期稳定性,强度参数取为不排水强度 c_u ,即考虑了黏聚力与内摩擦角的综合强度。假设 c_u 符合对数正态分布,其均值为 40 kPa,变异系数为 0.3,即标准差为 12 kPa, c_u 的空间变异特性用一维(垂直)随机场模拟,采用厚度为 1 m 的水平土层离散整个边坡,同时考虑离散尺寸为 1 m 时的方差折减系数以及对应的相关系数,具体公式请参考文献[19]。

4.1 “短视”策略及 β 对算法的影响

首先假定波动范围 $\lambda=1\text{ m}$,随机抽取 10 个随机场的实现样本 R_i ,其对应的 12 个小土层的 c_u 值如表 1 所示,将每个随机场实现确定的 12 个 c_u 值

视为边坡确定性分析中的输入参数,利用萤火虫算法搜索其相应的最小安全系数。由于萤火虫算法为随机搜索算法,因此随机生成 10 组不同的萤火虫群体,利用 10 组不同的萤火虫群体计算得到的结果统计算法的均值和标准差,利用均值与标准差的来衡量算法的优越性,一般来看,均值越小,算法的寻优能力越强;在平均值相等的前提下,标准差越小,则算法的寻优能力越强。

萤火虫算法参数设置:个体数目 $N=30$, $I_1=50$, $\beta=0.0,0.2,0.5,1.0,2.0,5.0,10.0,20.0,50.0,100.0,200.0,500.0,1\ 000.0$,分别结合是否采取“短视”策略,探讨了本文提出的“短视”策略对计算结果的影响,并给出了13个不同的 β 值对每一个随机场实现下边坡最小安全系数的影响(图 3)。由图 3 可见,在不同的 β 取值下,算法得到的安全系数平均值均会有不同程度的起伏,在 $\beta>50$ 以后,算法结果趋于稳定。从安全系数平均值来看,对于第 1,2,6,9 个随机场实现而言, $\beta=0.2$ 时算法得到了最小的安全系数平均值;对于第 3,4,5 个随机场实现而言, $\beta=0.5$ 时算法得到了最小的安全系数平均值;对于第 7,10 个随机场实现而言, $\beta=0.0$ 时算法得到了最小的安全系数平均值;对于第8个随机场

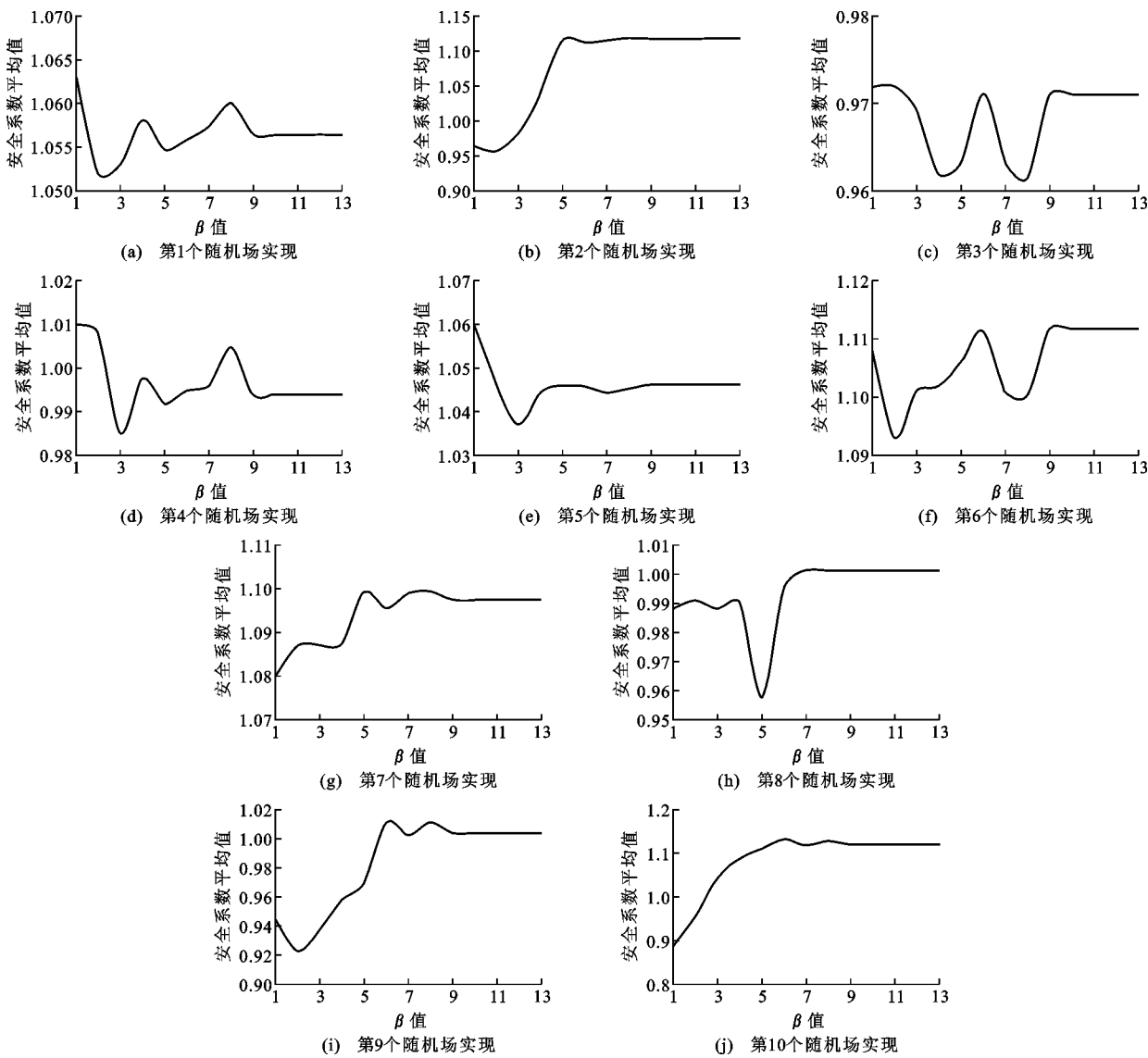


图 3 β 对算法的影响

Fig. 3 Influence of β on Algorithm

实现而言, $\beta=2.0$ 时算法得到了最小的安全系数平均值。由此可见, 对于考虑空间变异特性下不同的随机场实现而言, 必须要变化算法的参数设置以便能够找到最小的安全系数, 一般不存在对所有随机场都能找到最小安全系数的参数组合。 β 的合理取值范围建议为 $[0, 2]$ 。图 4 为“短视”策略对算法的影响。从图 4(a)~(c) 可知, 基本的萤火虫算法没有采取“短视”策略, 安全系数的平均值较大, 说明采取“短视”策略能够增强萤火虫算法的寻优能力。从图 4(d)~(e) 可知, 采取“短视”策略后, 萤火虫算法结果的标准差较未采取“短视”策略的结果标准差要小 ($\beta=0.2$ 时, 第 6 个随机场实现及 $\beta=0.5$ 时第 4 个随机场实现除外), 再次证明了采取“短视”策略能够提高算法的寻优能力。本文还比较了采取“短视”

策略下不同 β 取值对计算结果的影响。

4.2 N 对算法的影响

设置参数如下: $I_t=50, N=10, 30, 50, \beta=0.5$, 采取“短视”策略, 计算结果的比较如图 5 所示。由图 5(a) 可知, 随着群体中萤火虫个体数目的增加, 安全系数的平均值减小, 这说明随着 N 的增加, 萤火虫算法的寻优能力提高。从图 5(b) 中的标准差比较可知, 有 8 个随机场实现的最小标准差出现在 $N=50$, 另各有 1 个出现在 $N=10$ 和 $N=30$, 综合比较来看, 随着 N 的增加, 算法的寻优能力增强。图 5(c) 还给出了算法在不同 N 时的计算时间。图 5(c) 中计算时间指的是算法对 10 种随机场实现全部的耗时, 由图 5(c) 可见, 计算时间 T 与 N 之间符合乘幂函数关系, T 与 $N^{2.1}$ 呈正比关系, 所以 N 的

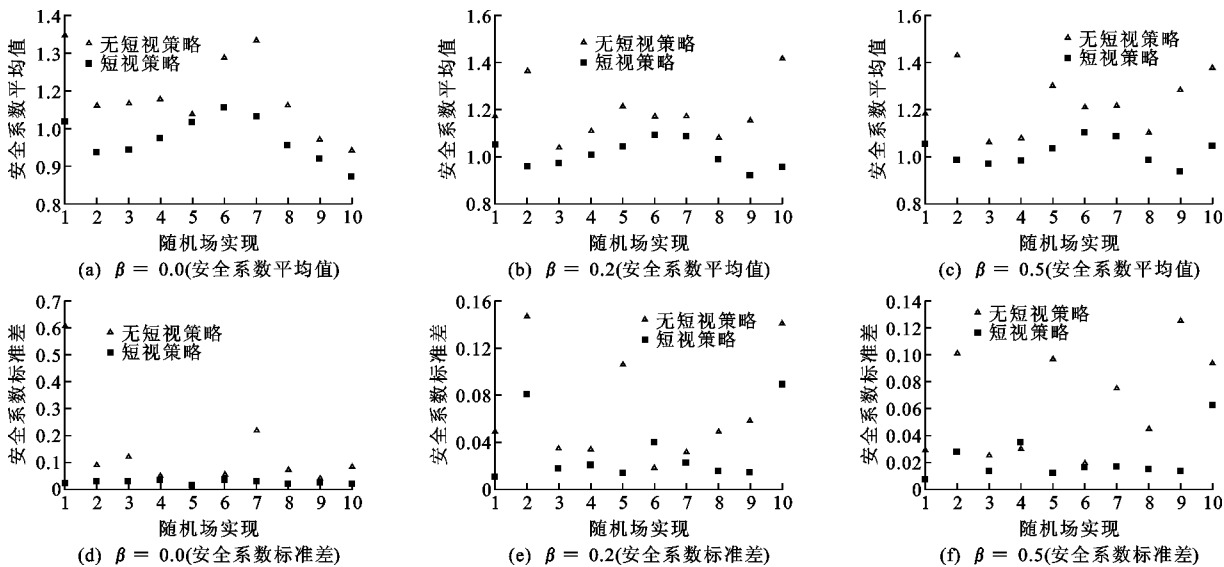


图 4 “短视”策略对算法的影响

Fig. 4 Influence of “Short Sight” Strategy on Algorithm

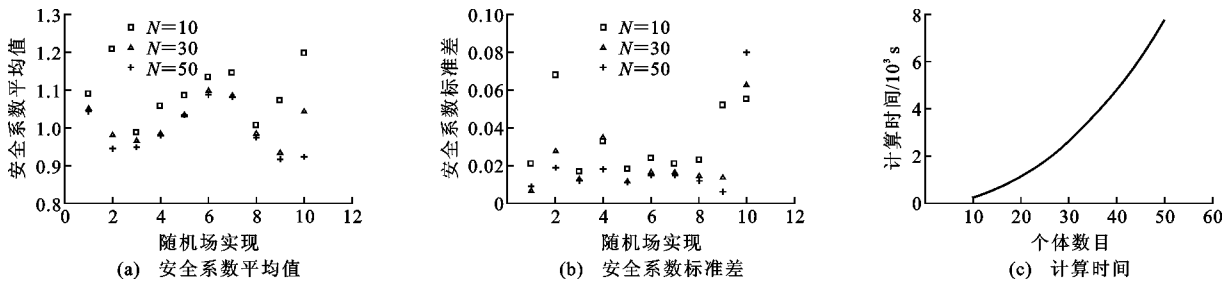


图 5 N 对算法的影响

Fig. 5 Influence of N on Algorithm

取值不宜过大。必须要说明的是,算法的计算时间与计算机的配置有关,本文算法均在 Intel(R) Core™ i7-2600 CPU@3.40GHz,内存 16.0G 的台式机上运行。

4.3 λ 对算法的影响

假定波动范围 $\lambda=1\ 000\text{ m}$,重新计算了萤火虫算法($N=30, I_t=50, \beta=0.0, 0.2, 0.5$)在表 1 中所示 10 个随机场实现中的表现,统计了安全系数的均值和标准差。由表 1 可知, $\lambda=1\ 000\text{ m}$ 时 10 个随机

场的实现与 $\lambda=1\text{ m}$ 时的 10 个随机场实现不同,所以其安全系数平均值不具有可比性。可以设想,算法参数设置相同时,算法应该具有相同的寻优能力,如果算法所得安全系数的标准差较小,则间接反映了搜索空间的复杂度较小。图 6 为 $\lambda=1\text{ m}$ 和 $1\ 000\text{ m}$ 时安全系数标准差比较。由图 6 可见,当移动步长 $\beta=0.0, \lambda=1\ 000\text{ m}$ 时,萤火虫算法得到的标准差有 8 次小于 $\lambda=1\text{ m}$ 时的标准差, $\beta=0.2$ 时,有 6 次小于 $\lambda=1\text{ m}$ 时的标准差, $\beta=0.5$ 时,有

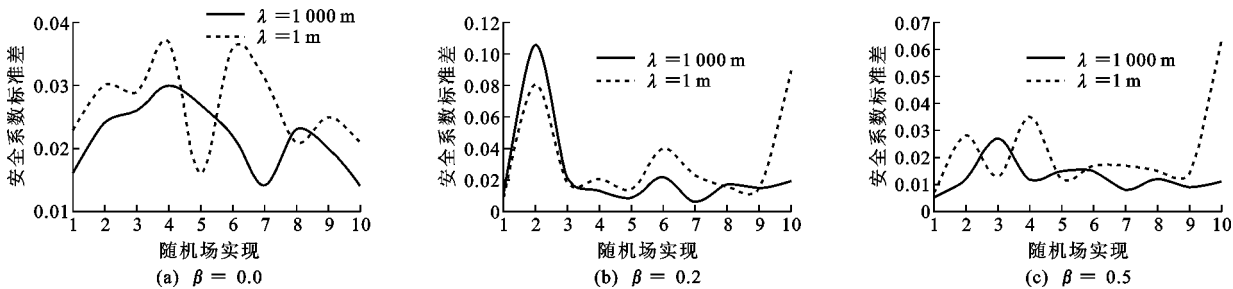


图 6 $\lambda=1\text{ m}$ 和 $\lambda=1\ 000\text{ m}$ 时安全系数标准差比较

Fig. 6 Comparison of Standard Deviations of Safety Factor at $\lambda=1\text{ m}$ and $\lambda=1\ 000\text{ m}$

8 次小于 $\lambda=1$ m 时的标准差。由此可见,在波动范围增加后,边坡最小安全系数这一优化问题对应的搜索空间变得简单。

5 结 语

在基本萤火虫算法基础上,引入了“短视”策略,通过不排水边坡的短期稳定问题,探讨了不同算法参数下萤火虫算法在考虑土体材料空间变异特性时的寻优能力。计算结果表明,引入“短视”策略可以大大提高算法的寻优能力,增加萤火虫个体数目 N 也可以提高算法的寻优能力,但是其计算时间与 $N^{2.1}$ 成正比,为节省计算时间, N 取值不宜过大。移动步长 β 对结果的影响较大,对于不同的随机场实现而言,不同的 β 取值可以得到最小的安全系数平均值,因此,在考虑空间变异特性时的边坡稳定分析中,必须要变换算法的参数以便能够保证搜索到最小的安全系数。当土体材料空间变异特性变弱(或波动范围增加)时,边坡最小安全系数这一优化问题的搜索空间复杂度变弱。

参考文献:

References:

- [1] 陈祖煜,邵长明.最优化方法在确定边坡最小安全系数方面的应用[J].岩土工程学报,1988,10(4):1-13.
CHEN Zu-yu, SHAO Chang-ming. The Use of the Method of Optimization for Minimizing Safety Factors in Slope Stability Analysis [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1988, 10(4): 1-13.
- [2] 邹广电.边坡稳定分析条分法的一个全局优化算法[J].岩土工程学报,2002,24(3):309-312.
ZOU Guang-dian. A Global Optimization Method of the Slice Method for Slope Stability Analysis [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(3): 309-312.
- [3] CHENG Y M. Location of Critical Failure Surface and Some Further Studies on Slope Stability Analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30(3): 255-267.
- [4] CHENG Y M, LI L, LANSIVAARA T, et al. An Improved Harmony Search Minimization Algorithm Using Different Slip Surface Generation Methods for Slope Stability Analysis [J]. Engineering Optimization, 2008, 40(2): 95-115.
- [5] LI L, CHENG Y M, CHU X S. A New Approach to the Determination of the Critical Slip Surfaces of Slopes[J]. China Ocean Engineering, 2013, 27(1): 51-64.

- [6] LI L, CHU X S. An Improved Particle Swarm Optimization Algorithm with Harmony Strategy for the Location of Critical Slip Surface of Slopes[J]. China Ocean Engineering, 2011, 25(2): 357-364.
- [7] LI L, YU G M, CHEN Z Y, et al. Discontinuous Flying Particle Swarm Optimization Algorithm and Its Application to Slope Stability Analysis[J]. Journal of Central South University of Technology, 2010, 17(4): 852-856.
- [8] 李亮,迟世春,林皋.基于蚁群算法的复合形法及其在边坡稳定分析中应用[J].岩土工程学报,2004,26(5):691-696.
LI Liang, CHI Shi-chun, LIN Gao. The Complex Method Based on Ant Colony Algorithm and Its Application to the Slope Stability Analysis [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(5): 691-696.
- [9] 李亮,迟世春,林皋.禁忌鱼群算法及其在边坡稳定分析中的应用[J].工程力学,2006,23(3):6-10.
LI Liang, CHI Shi-chun, LIN Gao. Tabu Fish Swarm Algorithm and Its Application to Slope Stability Analysis [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(3): 6-10.
- [10] LI Y C, CHEN Y M, ZHAN L T, et al. An Efficient Approach for Locating the Critical Slip Surface in Slope Stability Analyses Using a Real-coded Genetic Algorithm[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2010, 47(7): 806-820.
- [11] 高伟.搜索土坡潜在滑动面的蚁群算法[J].水利学报,2005,36(9):1100-1104.
GAO Wei. Method for Searching Critical Slip Surface of Soil Slope Base on Ant Colony Algorithm [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2005, 36(9): 1100-1104.
- [12] 王成华,夏绪勇,李广信.基于应力场的土坡临界滑动面的蚂蚁算法搜索技术[J].岩石力学与工程学报,2003,22(5):813-819.
WANG Cheng-hua, XIA Xu-yong, LI Guang-xin. Ant Algorithm in Search of the Critical Slip Surface in Soil Slopes Based on Stress Fields [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(5): 813-819.
- [13] 李亮,褚雪松,路世豹,等.基于混沌的网鱼算法在边坡稳定分析中的应用[J].公路交通科技,2010,27(2):16-19.
LI Liang, CHU Xue-song, LU Shi-bao, et al. Application of Chaos-variables Based Fish-net Algorithm in Slope Stability Analysis [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2010, 27

- (2);16-19.
- [14] 李 亮,褚雪松,路世豹,等. 基于网鱼算法的边坡最小安全系数搜索[J]. 华中科技大学学报:自然科学版,2010,38(2):87-90.
- LI Liang, CHU Xue-song, LU Shi-bao, et al. Searching for Minimum Safety Factor of Slopes Using Netting Algorithm[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Nature Science Edition, 2010,38(2):87-90.
- [15] 李 亮,王玉杰,王秋生,等. 土坡稳定分析中模拟任意滑动面的新策略及其效率分析[J]. 水利学报,2008,39(5):535-541.
- LI Liang, WANG Yu-jie, WANG Qiu-sheng, et al. New Procedure for Simulating Arbitrary Slip Surface of Soil Slope in Stability Analysis[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2008,39(5):535-541.
- [16] 李 亮,王秋生. 样条函数模拟土坡滑动面的效率分析[J]. 岩土工程技术,2008,22(3):113-118.
- LI Liang, WANG Qiu-sheng. Performance Study on Slope Slip Surface Generation by Spline Function[J]. Geotechnical Engineering Technique, 2008, 22(3): 113-118.
- [17] SPENCER E. A Method of Analysis of the Stability of Embankments Assuming Parallel Inter-slice Forces [J]. Geotechnique, 1967,17(1):11-26.
- [18] PHOON K K, KULHAWY F H. Characterization of Geotechnical Variability [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999,36(4):612-624.
- [19] VANMARCKE E H. Probabilistic Modeling of Soil Profiles[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1977,103(11):1227-1246.
- [20] LI L, WANG Y, CAO Z J, et al. Risk De-aggregation and System Reliability Analysis of Slope Stability Using Representative Slip Surfaces [J]. Computers and Geotechnics, 2013,53:95-105.
- [21] LI L, CHU X S. Multiple Response Surfaces for Slope Reliability Analysis[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2015,39(2):175-192.
- [22] LI L, WANG Y, CAO Z J. Probabilistic Slope Stability Analysis by Risk Aggregation[J]. Engineering Geology, 2014,176:57-65.
- [23] LI L, CHU X S. Risk Assessment of Slope Failure by Representative Slip Surfaces and Response Surface Function [J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2016,20(5):1783-1792.
- [24] CHU X S, LI L, WANG Y J. Slope Reliability Analysis Using Length-based Representative Slip Surfaces [J]. Arabian Journal of Geosciences, 2015, 8(11): 9065-9078.
- [25] CHU X S, LI L, KONG L. Sensitivity Study of Local Average Size on the Failure Probability of Spatially Variable Slope Stability[J]. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering, 2017,41(2):167-173.
- [26] KHAJEHZADEH M, TAHA M R, ESLAMI M. Opposition-based Firefly Algorithm for Earth Slope Stability Evaluation[J]. China Ocean Engineering, 2014, 28(5):713-724.
- [27] GANDOMI A H, YANG X S, ALAVI A H. Mixed Variable Structural Optimization Using Firefly Algorithm[J]. Computers & Structures, 2011,89(23/24): 2325-2336.
- [28] 刘长平,叶春明. 一种新颖的仿生群智能优化算法:萤火虫算法[J]. 计算机应用研究, 2011,28(9):3295-3297.
- LIU Chang-ping, YE Chun-ming. Novel Bioinspired Swarm Intelligence Optimization Algorithm: Firefly Algorithm[J]. Application Research of Computers, 2011,28(9):3295-3297.
- [29] 袁 锋,陈守强,刘 弘,等. 一种改进的文化萤火虫算法[J]. 计算机仿真, 2014,31(6):261-265,286.
- YUAN Feng, CHEN Shou-qiang, LIU Hong, et al. An Improved Cultural Firefly Algorithm [J]. Computer Simulation, 2014,31(6):261-265,286.