

文章编号: 1673-2049(2009)04-0108-06

# 基于极限平衡理论的楔形桩承载力计算方法

王奎华<sup>1</sup>, 吴文兵<sup>1</sup>, 叶良<sup>1,2</sup>, 高妍<sup>3</sup>

(1. 浙江大学 软弱土与环境土工教育部重点实验室, 浙江 杭州 310027; 2. 浙江科技学院 建筑工程学院, 浙江 杭州 310023; 3. 中国矿业大学 建筑工程学院, 江苏 徐州 221008)

**摘要:** 首先根据楔形桩的受力特性, 提出了楔形桩单桩破坏模式, 然后从极限平衡理论出发, 利用库仑土压力的推导思路, 推导得到了该破坏模式下的楔形桩承载力计算方法; 将数值分析的结果与自编的单桩承载力计算程序计算得到的结果进行对比分析, 验证了该方法的合理性。结果表明: 其他参数不变时, 在一定范围内增大楔形桩的锥角, 可显著提高楔形桩的极限承载力; 当外摩擦角较大时, 粗糙的桩侧面也可以提高楔形桩的承载力; 楔形桩尺寸也是影响单桩承载力的重要参数; 该方法在工程实际中有着较强的适用性。

**关键词:** 楔形桩; 锥角; 极限平衡理论; 承载力; 破坏模式; 楔形圆锥面

中图分类号: TU432 文献标志码: A

## Calculation Method of Bearing Capacity of Tapered Pile Based on Limit Equilibrium Theory

WANG Kui-hua<sup>1</sup>, WU Wen-bing<sup>1</sup>, YE Liang<sup>1,2</sup>, GAO Yan<sup>3</sup>

(1. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, Zhejiang, China; 2. School of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University of Science & Technology, Hangzhou 310023, Zhejiang, China; 3. School of Architecture & Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, Jiangsu, China)

**Abstract:** Failure mode of single pile was derived based on the mechanical behavior of tapered pile. On the basis of the Coulomb's earth pressure theory, a new calculating method of bearing capacity of tapered pile under this failure mode was developed by utilizing limit equilibrium theory. Then, through the comparison of numerical analysis results with results obtained by using self-made program, the rationality of this method was proved. It shows that the ultimate bearing capacity of tapered pile increases significantly with the increase of cone angle within a certain extent. Rough pile side is also used to increase the bearing capacity of tapered pile when the external friction angle is larger correspondingly. The size of tapered pile has important influence on the bearing capacity. It seems that this new method has good feasibility in engineering practice.

**Key words:** tapered pile; cone angle; limit equilibrium theory; bearing capacity; failure mode; tapered cone surface

## 0 引言

楔形桩是20世纪70年代出现的一种新型桩,它是一种既节省材料、施工简单,又具有较高单位体积承载力的优良桩型。

楔形桩巧妙地利用了桩的楔形侧面,改变桩周土的天然结构状态,改善土的物理力学性质,充分发挥了桩与土体间的共同作用,所以楔形桩比同等长度的等截面桩单位体积承载力大<sup>[1]</sup>。成桩过程中形成的土体挤密区形似一倒放的桃子,其大小与土体物理力学性质、桩的尺寸、体积及锥角有关,且成正比关系,其中楔形桩的锥角是影响挤密区大小的主要因素<sup>[2-6]</sup>。

楔形桩承载力的研究主要有试验研究和理论计算。试验研究<sup>[7-8]</sup>主要针对当地的特殊条件研究楔形桩应用的可行性及承载力的影响因素。哈津提出了计算楔形桩承载力的经验计算公式,但未考虑楔形桩在沉桩过程中改善了土的物理力学性质,故导致计算值与实测值相比偏小,最大可差2倍。曾月进等<sup>[9-11]</sup>根据库仑土压力理论得到的被动土压力系数来计算桩周土压力。传统的库仑土压力理论是基于土坝、挡土墙等平面应变问题的理论<sup>[12-15]</sup>,而楔形桩周围土体是一种轴对称三维应力状态,与传统库仑土压力理论适用条件有很大差异。总体而言,目前在楔形桩的承载力设计计算方面还不成熟,因此必须针对楔形桩的特点,寻找新的计算方法,以便促进楔形桩的理论研究和工程应用。基于这种思想,笔者从极限平衡理论出发,利用库仑土压力的推导思路,提出了一种计算单层土中楔形桩承载力的新方法,通过数值分析和实例计算对该方法的合理性进行了讨论,并与前人的试验成果进行了分析比较。

## 1 数学模型与基本假定

### 1.1 计算模型与假定条件

笔者假设桩土体系破坏时,桩周土体处于极限平衡状态并形成一滑动楔体,从楔体的静力平衡条件可得出桩周土压力的计算公式,并能进一步确定楔形桩的极限承载力,计算模型如图1所示。

基本假定如下:

(1) 桩周土是理想的散粒体(粘聚力  $c=0$ )。

(2) 桩土体系破坏时,桩周土体内出现一个滑动破裂面为通过桩端的楔形圆锥面,同时桩与桩周土接触面也产生滑动破坏。

(3) 单桩破坏模式:在轴向荷载作用下,桩体发

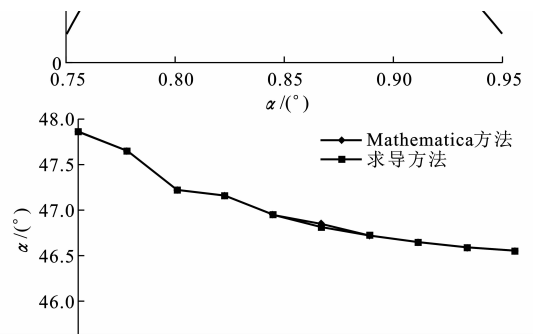


图1 计算模型

Fig. 1 Calculating Model

生沉降,并带动桩周楔形土体发生沉降。当桩体沉降达到一定值时,桩与桩周土接触面发生剪切破坏,同时在桩周土内部产生一个次生的滑动破裂面II。由于桩体的沉降大于桩周土楔体的沉降,桩周土楔体相对桩向上滑移;桩周土体内滑动破裂面为一楔形圆锥面,与水平面成 $\alpha$ 角,楔体相对于静止的滑床向下滑移,2个滑动破裂面在桩底相交(图1)。

(4) 将2个滑动面间的破坏土楔视为刚体,不考虑滑动楔体内部的应力和变形条件。

(5) 破坏土楔整体处于极限平衡状态。在2个滑动破裂面上,抗剪强度均已充分发挥,即滑动破裂面上的剪应力 $\tau$ 均已达抗剪强度 $\tau_f$ 。

### 1.2 楔体的静力平衡条件

假设滑动土楔自重为 $G$ ,滑动时受到桩身侧面给予的支撑反力 $N$ (其反方向是土压力)和土体支撑反力 $E$ 。以桩轴心为圆心取一个受力平衡微元体,圆心角为 $d\beta$ (图2),由对称性可知,微元体前后方向的土压力自动平衡,只需分析滑动土楔自重 $dG$ 、桩身侧面给予的支撑反力 $dN$ 和土体支撑反力 $dE$ 这3个力组成的平衡体系,微元体受力见图3。

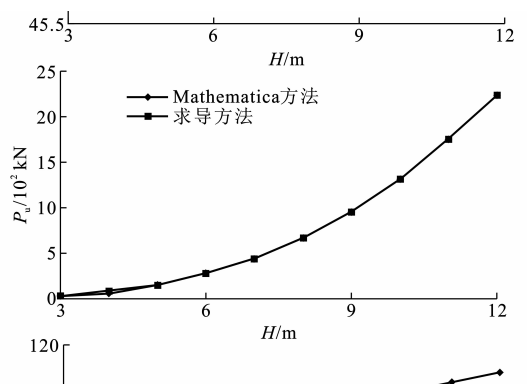


图2 楔形微元体

Fig. 2 Tapered Cone Unit Element

(1) 根据楔形体整体处于极限平衡状态的条件,可以得知 $dN$ 、 $dE$ 的方向。

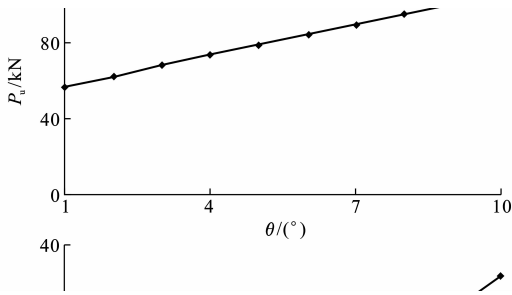


图3 微元体受力

Fig. 3 Stress of Unit Element

(2) 根据楔形体应满足静力平衡三角形闭合的条件,由正弦定理可以得到  $dN$  和  $dG$  的关系为

$$\frac{dG}{\sin(\pi/2 - \alpha + \varphi - \delta - \theta)} = \frac{dN}{\sin(\alpha - \varphi)} \quad (1)$$

式中:  $\alpha$  为桩周土体内的滑动破裂面坡角;  $\theta$  为楔形桩锥角;  $\varphi$  为桩周土体内的摩擦角;  $\delta$  为土与桩周材料间的外摩擦角。

(3) 对所有可能的滑动破裂面 II, 其真实的滑动面应使得桩侧面的总土体压力  $N$  为最小, 因此, 可以通过  $N$  对  $\alpha$  取极值的方法, 确定真正滑动面对应的  $\alpha$  值。

## 2 单层土楔形桩承载力的求解

### 2.1 微元体的重力

把桩看做圆台 1, 以桩周土体内滑动破裂面 II 侧面的圆台为圆台 2, 则楔形体体积为圆台 2 与圆台 1 的体积之差, 结合圆台体积计算公式, 可得微元体的体积  $dV$  为

$$dV = \frac{1}{6} H (3r_1 H \cot \alpha + H^2 \cot^2 \alpha - 3r_1 H \tan \theta - H^2 \tan^2 \theta) d\beta \quad (2)$$

式中:  $H$  为楔形桩桩长;  $r_1$  为桩底截面半径。

取土的重度为  $\gamma$ , 则

$$dG = \gamma dV = \frac{1}{6} \gamma H (3r_1 H \cot \alpha + H^2 \cot^2 \alpha - 3r_1 H \tan \theta - H^2 \tan^2 \theta) d\beta \quad (3)$$

此时

$$dN = \frac{B}{\cot(\alpha - \varphi) + A} (C \cot \alpha + \cot^2 \alpha - D) \quad (4)$$

$$A = -\tan(\delta + \theta) \quad (5)$$

$$B = \frac{H^3 \gamma}{6 \cos(\delta + \theta)} d\beta \quad (6)$$

$$C = \frac{3r_1}{H} \quad (7)$$

$$D = \frac{3r_1}{H} \tan \theta + \tan^2 \theta \quad (8)$$

### 2.2 桩周土体内的滑动破裂面坡角

由于在桩顶荷载作用下, 在  $\alpha$  所有可能取值中, 必有一个  $\alpha$  值使土体压力  $dN$  最小, 此时  $dN$  即为真正的桩周土压力, 通过求极小值的方法, 即  $\frac{d(dN)}{d\alpha} = 0$ , 可得到  $dN$  取得极值时的  $\alpha$  值, 对  $\alpha$  求导后可得一个一元三次方程, 即

$$IS_q^3 + JS_q^2 + KS_q + M = 0 \quad (9)$$

$$I = 2(A - \cot \varphi) \quad (10)$$

$$J = (AC - C \cot \varphi - 4A \cot \varphi + \cot^2 \varphi - 3) \quad (11)$$

$$K = (2 \cot \varphi - 2C)(A \cot \varphi + 1) \quad (12)$$

$$M = AC \cot^2 \varphi + D + C \cot \varphi + D \cot^2 \varphi \quad (13)$$

$$S_q = \cot \alpha \quad (14)$$

求解式(14)可得到  $\alpha$  的值, 令  $S_q = y - \frac{J}{3I}$ , 将其代入式(9)可得

$$y^3 + Py + Q = 0 \quad (15)$$

$$P = \frac{K}{I} - \frac{J^2}{3I^2} \quad (16)$$

$$Q = \frac{2J^3}{27I^3} - \frac{JG}{3I^2} + \frac{M}{I} \quad (17)$$

经推导得到式(15)的解为:

(1) 当  $P \geq 0$  时

$$y = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} \quad (18)$$

则

$$S_q = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} - \frac{J}{3I} \quad (19)$$

(2) 当  $P < 0$  时

$$y = 2\sqrt[3]{r} \cos \varphi \quad (20)$$

$$r = \sqrt[3]{-\left(\frac{P}{3}\right)^3} \quad (21)$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{Q}{2r}\right) \quad (22)$$

则

$$S_q = 2\sqrt[3]{r} (\cos \varphi) - \frac{J}{3I} \quad (23)$$

解出  $S_q$  后, 把  $S_q = \cot \alpha$  代入式(1), 可得

$$dN = \frac{1}{6} \gamma H^3 \left[ \frac{\cot \varphi \cdot S_q + 1}{S_q - \cot \varphi} - \tan(\delta + \theta) \right]^{-1} \frac{1}{\cos(\delta + \theta)} \cdot$$

$$\left[ \frac{3r_1}{H} S_q + S_q^2 - \left( \frac{3r_1}{H} \tan \theta + \tan^2 \theta \right) \right] d\beta \quad (24)$$

### 2.3 楔形桩承载力

对圆心角  $\beta$  积分,可得支撑反力  $N$  为

$$N = \int_0^{2\pi} dN = \frac{1}{2} \gamma H^2 r_1 (S_q - \tan \theta) + \frac{H}{3} (S_q^2 - \tan^2 \theta) \left[ \frac{\cot \varphi \cdot S_q + 1}{S_q - \cot \varphi} - \tan(\delta + \theta) \right]^{-1} \frac{2\pi}{\cos(\delta + \theta)} \quad (25)$$

楔形桩承载力  $P_u$  的大小等于桩侧法向力和摩擦阻力合力的竖向分力,其计算公式为

$$P_u = N \sin(\theta + \delta) \quad (26)$$

## 3 对比分析

### 3.1 公式合理性

根据式(4)并采用数学分析软件 Mathematica,结合图形取峰谷值方法(图4)可得到  $N$  取极值时的  $\alpha$  值,将该值与求导方法得到的  $\alpha$  值进行对比分析。楔形桩计算参数为  $H=3\sim 12$  m,  $r_1=0.2$  m,  $\theta=3^\circ$ ; 土层参数为  $\gamma=18$  kN·m<sup>-3</sup>,  $\delta=10^\circ$ ,  $\varphi=30^\circ$ 。

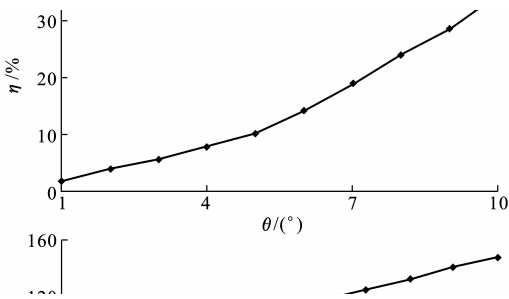


图4  $\alpha$ - $P_u$  曲线

Fig. 4 Relation of  $\alpha$  and  $P_u$

图5、6分别为土体内滑动破裂面坡角  $\alpha$  和承载力  $P_u$  的对比分析。由图5、6可以看出:2种方法得到的  $\alpha$ 、 $P_u$  值基本一致,验证了求导得到的公式的正确性。在其他参数相同的情况下,随着桩长的增加,承载力  $P_u$  逐渐增加,土体内滑动破裂面坡角  $\alpha$  逐渐减小,说明此时滑动面逐渐变缓,滑动楔体体积增大。

### 3.2 楔形桩锥角的影响

基于本文模型,将  $\theta$  取为  $0^\circ$ ,可得到等截面桩承载力的计算公式。取体积相等的等截面桩和楔形桩,对比两者的承载力,得到楔形桩单位体积承载力增加值与等截面桩单位体积承载力的比值  $\eta$ 。其他参数不变,通过改变楔形桩锥角来反映楔形桩承载力的变化。楔形桩计算参数为  $H=3.6$  m,  $\theta=1^\circ\sim$

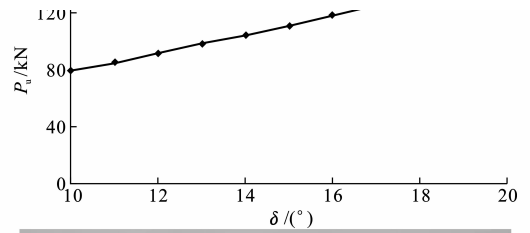


图5 土体内滑动破裂面坡角  $\alpha$  的对比

Fig. 5 Comparison of Slope Angle  $\alpha$  of Sliding Surface in Soil

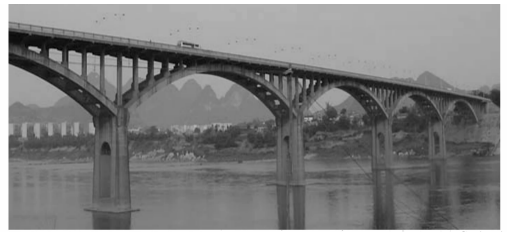


图6 承载力  $P_u$  的对比

Fig. 6 Comparison of Bearing Capacity  $P_u$

$10^\circ$ ; 土层参数为  $\gamma=18$  kN·m<sup>-3</sup>,  $\delta=10^\circ$ ,  $\varphi=30^\circ$ 。

图7为楔形桩锥角  $\theta$  的影响,图8为楔形桩与等截面桩承载力的对比。由图7、8可以看出:在其他参数相同的情况下,随着楔形桩锥角  $\theta$  的增大,楔形桩的极限承载力逐渐增大,并且楔形桩承载力增加值与等截面桩承载力的比值  $\eta$  逐渐增大,当  $\theta=10^\circ$  时,  $\eta=34.52\%$ 。由此可见,在一定范围内增大楔形桩的锥角,可显著提高楔形桩的极限承载力。



图7 楔形桩锥角  $\theta$  的影响

Fig. 7 Influence of Cone Angle  $\theta$  of Tapered Pile

### 3.3 桩与桩周土间外摩擦角的影响

其他参数不变,通过改变桩与桩周土间的外摩擦角  $\delta$  来反映楔形桩承载力的变化。楔形桩计算参数为  $H=3.6$  m,  $r_1=0.2$  m,  $\theta=5^\circ$ ; 土层参数为  $\gamma=18$  kN·m<sup>-3</sup>,  $\delta=10^\circ\sim 20^\circ$ ,  $\varphi=30^\circ$ 。

图9为桩与桩周土间的外摩擦角  $\delta$  的影响。由图9可以看出:在其他参数相同的情况下,随着  $\delta$  的增大,

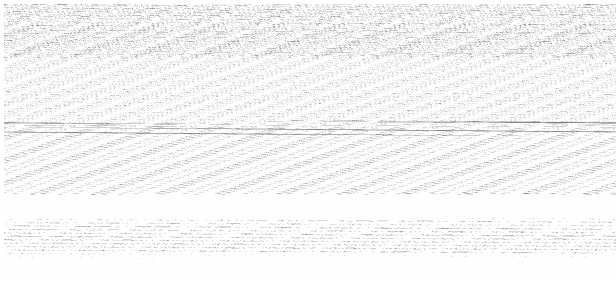
图8  $\eta$ - $\theta$  曲线Fig. 8 Relation of  $\eta$  and  $\theta$ 

图9 桩与桩周土间外摩擦角的影响

Fig. 9 Influence of External Friction Angle Between Pile and Soil Around Pile

楔形桩的极限承载力逐渐增大。由此可见,粗糙的桩侧面( $\delta$  相应较大)也可以提高楔形桩的承载力。

## 4 工程应用

四川省建筑科学研究院在德阳天然气公司工地进行了3组不同锥角与桩长的楔形桩静荷载试验,地基土物理力学性能指标为  $\varphi=18^\circ$ ,  $c=50$  kPa,  $\gamma=19.6$  kN·m<sup>-3</sup>,  $\delta=20^\circ$ 。采用近似等代方法,约相当于无粘性土( $c=0$ )的等代内摩擦角  $\varphi_D$  由式(27)计算可得  $\varphi_D=40^\circ$ 。承载力试验值与计算值的对比如表1所示。

表1 承载力试验值与计算值的对比

Tab. 1 Comparisons Between Test Values and Calculating Values of Bearing Capacities

桩编号	$\theta/(^\circ)$	$H/m$	$D_u/m$	$D_d/m$	$P_u/kN$	$F_u/kN$
2#	2.0	3.6	0.50	0.20	503.4	448
3#	1.0	5.1	0.35	0.25	636.2	484
4#	1.3	5.1	0.50	0.25	795.8	650

注: $D_u$ 、 $D_d$  分别为楔形桩桩顶和桩底断面直径; $F_u$  为静载试验极限承载力。

$$\varphi_D = \arctan\left[\tan\left(\varphi + \frac{c}{\sigma_1}\right)\right] \quad (27)$$

式中: $\sigma_1$  为楔形桩底面标高处的土体垂直压应力。

从表1可见:二者变化趋势是一致的,但承载力试验值比计算值普遍要小一些( $P_u > F_u$ ),其原因是

$F_u$  按沉降值为45 mm的静荷载试验加载取值,此时楔形桩周围的地基土并没有真正达到极限状态,要使土体达到极限破坏状态,必须让桩体充分挤压土层,使土层发生较大的侧向位移,才能在土体中产生破坏滑动面,因此,实测的极限承载力也应该会大一些。总体而言,本文计算得到的结果还是符合实际情况的,所采用的楔形桩破坏模式具有一定的合理性。

## 5 结语

(1)笔者从极限平衡理论出发,提出了一个新的楔形桩单桩破坏模式,推导得到了该破坏模式下的楔形桩承载力计算方法,并通过数值分析和实例计算对该方法的合理性进行了讨论。

(2)在其他参数相同的情况下,随着桩长的增加,土体滑动面坡角逐渐变小,说明此时滑动面逐渐变缓,滑动楔体体积变大。

(3)在其他参数相同的情况下,随着桩长的增加,桩周土压力逐渐增加。

(4)在其他参数相同的情况下,随着楔形桩锥角的增加,楔形桩单位体积承载力增加值与等截面桩单位体积承载力的比值逐渐增加。

(5)基于笔者给出的楔形桩破坏模式得到的楔形桩承载力与工程试验结果趋势相同,极限承载力较为接近,这说明本文公式在一定条件下能反映工程实际情况。

### 参考文献:

### References:

- [1] 哈津 B N. 锥形短桩[M]. 徐祖元,译. 北京:中国农业机械出版社,1981.  
XAENH B N. Tapered Short Pile[M]. Translated by XU Zu-yuan. Beijing: China Agriculture & Machine Press, 1981.
- [2] WEI J, EL NAGGAR M H. Experimental Study of Axial Behaviour of Tapered Piles [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1998, 35(4): 641-654.
- [3] RYBNIKOV A M. Experimental Investigations of Bearing Capacity of Bored-cast-in-place Tapered Piles [J]. Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1990, 27(2): 48-52.
- [4] 蒋建平,高广运,顾宝和. 扩底桩、楔形桩、等直径桩对比试验研究[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(6): 764-766.  
JIANG Jian-ping, GAO Guang-yun, GU Bao-he. Comparison of Belled Pile, Tapered Pile and Equal-diam-

- eter Pile[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25(6): 764-766.
- [5] 鹿文东, 玉利荣. 锥形钻孔灌注桩作用机理与承载力试验研究[J]. 地基基础工程, 2002, 12(3): 36-41.  
LU Wen-dong, YU Li-rong. Experiment Study of Mechanism of Action and Bearing Capacity of Tapered Bored Concrete Pile[J]. Foundation Engineering, 2002, 12(3): 36-41.
- [6] 刘杰, 王忠海. 楔形桩承载力试验研究[J]. 天津大学学报, 2002, 35(2): 257-260.  
LIU Jie, WANG Zhong-hai. Experimental Study on the Bearing Capacity of Wedge Pile[J]. Journal of Tianjin University, 2002, 35(2): 257-260.
- [7] 蒋建平. 楔形桩的研究与应用综述[J]. 施工技术, 2006, 35(1): 37-40.  
JIANG Jian-ping. Introduction of Study and Application of Tapered Piles[J]. Construction Technology, 2006, 35(1): 37-40.
- [8] 戴加东, 李俊才. 楔形桩的工作性能及应用研究[J]. 地基处理, 2004, 15(2): 9-12.  
DAI Jia-dong, LI Jun-cai. Application and Capability of the Cone Pile[J]. Ground Improvement, 2004, 15(2): 9-12.
- [9] 曾月进, 邵力群, 冯礼恭. 楔形桩的承载力[J]. 西部探矿工程, 2004(11): 6-7.  
ZENG Yue-jin, SHAO Li-qun, FENG Li-gong. Bearing Capacity of Tapered Pile[J]. West-China Exploration Engineering, 2004(11): 6-7.
- [10] 龚晓南. 土力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.  
GONG Xiao-nan. Soil Mechanics[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2002.
- [11] 陈仲颐, 周景星, 王洪瑾. 土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994.  
CHEN Zhong-yi, ZHOU Jing-xing, WANG Hong-jin. Soil Mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1994.
- [12] 李建峰, 曾永祥, 王秀红. 桩、锚、喷三结合支护深基坑[J]. 西安科技大学学报, 2005, 25(1): 21-23.  
LI Jian-feng, ZENG Yong-xiang, WANG Xiu-hong. Combination of Pile Anchor and Jetting to Support Deep Foundation[J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2005, 25(1): 21-23.
- [13] 谢星, 王东红, 赵法锁, 等. 黄土地区两种成孔工艺钻孔灌注长桩承载力性状对比研究[J]. 西安科技大学学报, 2005, 25(1): 42-46.  
XIE Xing, WANG Dong-hong, ZHAO Fa-suo, et al. Comparison for Bearing Behavior of Longhole Bored Pile by Two Types of Holing Technology in Loess Foundation[J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2005, 25(1): 42-46.
- [14] 孙宪春. 水泥深层搅拌桩的设计及施工方法技术要点[J]. 筑路机械与施工机械化, 2008, 25(10): 63-65.  
SUN Xian-chun. Technical Points for Design and Construction of Cement Deep Mixing Pile[J]. Road Machinery & Construction Mechanization, 2008, 25(10): 63-65.
- [15] 李伟, 苟建军, 刘红玲. 抗滑桩滑坡推力和内力计算理论初探[J]. 筑路机械与施工机械化, 2007, 24(4): 8-10.  
LI Wei, GOU Jian-jun, LIU Hong-ling. Slide Force of Anti-slide Pile and Calculation Theory for Internal Force[J]. Road Machinery & Construction Mechanization, 2007, 24(4): 8-10.