

文章编号:1673-2049(2006)01-0068-10

斜拉索分析统一理论及其应用

梁 鹏,徐 岳,刘永健

(长安大学 桥梁与隧道陕西省重点实验室,陕西 西安 710064)

摘要:通过对现有各种斜拉索分析理论进行分析,基于悬链线索单元理论,将斜拉桥单索问题分成两类,提出了斜拉索分析的统一理论。该理论可以精确、统一地求解斜拉桥计算中几乎所有的单索静力问题,可方便地将悬链线索单元引入斜拉桥施工阶段和使用阶段的分析中。根据悬链线索单元理论和等效弹模法,对比分析了不同长度、不同应力水平的斜拉索的各种特性。计算结果表明:水平长度超过 400 m 的斜拉索的非线性将急剧增大,采用等效模量法模拟斜拉索将引起较大的误差;有些误差即使增加计算的荷载步个数也无法减小。超大跨度斜拉桥施工阶段分析中建议采用高精度的悬链线索单元模拟斜拉索。

关键词:桥梁工程;斜拉索分析统一理论;悬链线索单元;等效弹性模量;斜拉桥

中图分类号:U448.41

文献标志码:A

Unified Analysis Theory of Cable Stay and Its Applications

LIANG Peng, XU Yue, LIU Yong-jian

(Key Laboratory for Bridge and Tunnel of Shaanxi Province, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China)

Abstract: By analyzing all kinds of analysis theory of cable stays, the problems about cable stays were divided into two kinds, and based on the theory of catenary cable element, a unified analysis theory of cable stays was put forward. It could solve almost all static problems about single cable stay accurately and consistently. Authors made it easy to apply the catenary element to analysis of cable-stayed bridges. Based on the theory of catenary cable element and equivalent modulus of elasticity, cable characteristics which had different length and different stress were studied comparatively. It was concluded that nonlinearity of cable stays became more significant dramatically when its length exceeded 400 m. The error of the method of equivalent modulus of elasticity may be very large. Some kinds of errors can not be decreased even increase the number of load steps. It is recommended to use catenary cable element in the analysis of super long span cable-stayed bridges.

Key words: bridge engineering; unified analysis theory of cable stay; catenary cable element; equivalent modulus of elasticity; cable-stayed bridge

0 引 言

随着计算理论的完善、建设经验的积累、新材料的开发,斜拉桥的发展进入一个崭新的时代。斜拉

桥跨度在 800 m 之内大有取代悬索桥的趋势,并且正向 1 000 m 的超大跨度发展,如正在施工中的中国香港 Stonecutters 桥和江苏苏通长江公路大桥主跨分别达到 1 018、1 088 m。

收稿日期:2005-11-25

作者简介:梁 鹏(1977-),男,江西高安人,讲师,工学博士,E-mail:lp2000lp@hotmail.com。

斜拉索由于其自重垂度的影响,呈现很强的几何非线性。随着跨径的增大,斜拉索的长度也随之增大,而使用应力却保持不变,这就使得斜拉索的非线性力学特性变得更加复杂。江苏苏通大桥中跨外索水平投影长度为 536 m,质量约为 60 t,已大大超出有斜拉索的长度和质量。对这种超大跨度斜拉桥的拉索,需要更加精确的理论来计算它的响应。笔者结合斜拉桥的设计、施工特点,回顾总结了各种悬索分析理论。基于悬链线索单元理论,提出了斜拉索分析的统一理论,并根据悬链线索单元理论和等效弹性模量法,对比分析了不同长度、不同应力水平的斜拉索的各种特性。

1 斜拉索分析的解析理论

对于斜拉索的解析理论,很多研究者做了大量工作。1988 年, Yiu 基于悬链线理论,提出了在指定索力水平分量或索力竖向分量或切向索力的情况下,求解斜拉索其他参数的迭代方法^[1]。1993 年, Levinson 给出了不可伸长悬链线在各种已知条件下的求解方法^[2]。1996 年,李强兴分别针对无弹性斜拉索和有弹性斜拉索,建立了一组斜拉索静力问题的超越方程和积分表达式^[3],但其在实际应用中有很大困难,文中也没有给出算例。1998 年,程纬不考虑索的伸长,以斜拉索的梁端竖向分力为已知量,建立了计算斜拉索梁端倾角的迭代公式,进而求出索力和索长的解,但未给出无应力索长的解^[4]。1999 年,魏建东从微元体出发,以斜拉索的梁端竖向分力为已知量,在不考虑和考虑弹性两种情况下,建立了计算梁端索力的迭代方程组^[5]。2000 年,刘明虎根据文献[3]~[5]中的公式,分别按修正弹性模量法、无弹性拉索法、有弹性拉索法 3 种方法,对比计算了斜拉索的梁、塔端斜率和索力、有应力索长、无应力索长、垂度等^[6],计算结果表明:有应力索长、无应力索长、垂度 3 种方法的计算结果非常接近;斜率和索力计算结果误差较大。2001 年,郝超采用抛物线理论和悬链线理论分别计算了南京长江二桥斜拉索的无应力长度^[7]。

2 斜拉索分析的有限元理论

随着计算机技术的发展,对斜拉索通常采用非线性有限元方法进行分析。现主要有 4 种方法模拟斜拉索:等效弹性模量法(以下简称等效弹模法)、多段杆单元法、多节点曲线索单元法、悬链线索单元法。

2.1 等效弹模法

先对后文中要用到的符号作统一说明: E 、 A 、 w 、 γ 分别为索的弹性模量、无应力横截面积、单位无应力索长的质量、单位体积索长的质量; L_u 、 L 、 L_c 分别为无应力索长、有应力索长、弦长; L_x 、 L_y 分别为索在 x 、 y 方向上的投影长度; α 为弦线与水平线的夹角; α_i 、 α_j 分别为 i 、 j 节点处的切线与水平线的夹角; T_i 、 T_j 分别为 i 、 j 节点处的索力; F_{ix} 、 F_{iy} 分别为 i 端索力在 x 、 y 方向上的分量; F_{jx} 、 F_{jy} 分别为 j 端索力在 x 、 y 方向上的分量; σ 、 E_{\tan} 分别为斜拉索的应力、等效模量。

每一根索用一个杆单元模拟,采用修正斜拉索弹性模量的方法来描述索的非线性行为,这就是所谓的等效弹模法或修正弹模法^[8]

$$E_{\tan} = \frac{E}{1 + [(\gamma L_x)^2 / (12\sigma^3)] E}$$

或

$$E_{\tan} = \frac{E}{1 + [(w L_x)^2 A / (12 T^3)] E} \quad (1)$$

式(1)是根据悬链线方程简化得到的,推导过程中采用了以下假设或近似:①位移远小于弦长;②弦向力代替切向力,并忽略索力沿索长的变化;③悬链线近似为抛物线;④ $\sinh x \approx x + x^3/6$, $\cosh x \approx 1$;⑤应力远小于弹性模量;⑥忽略弦向的自重分量。只有当索内应力较大、索长较小、应力幅值不大、弦线倾角不大时,等效弹模法才具有较高的精度。等效弹模法不能提供根据索端点坐标计算索端力的方法,只能应用简单增量法求解,因此不可避免地产生漂移误差和累积误差,这正是采用等效弹模法进行斜拉桥倒退分析中出现不闭合的主要原因。

2.2 多段杆单元法

多段杆单元法用多个杆单元来模拟索曲线,它通过多个杆单元节点来定义斜拉索中间点的运动,从而模拟索的非线性行为。从理论上讲,所取杆单元个数趋于无穷时,就趋于悬索的真实力学行为。

多段杆单元法引入了许多附加自由度,大大增加了计算机存储量和计算时间。各个杆单元的初始节点坐标确定和无应力长度计算是关键问题,它强烈影响着索的初始和最终平衡状态。如果这些附加节点的平衡条件不能很好地满足,就可能发生数值问题,得到虚假的结果,甚至无法收敛,此外,多段杆单元法无法较好地解决桥梁结构分析中的许多问题,如斜拉索张拉、无应力长度确定等。

2.3 多节点曲线索单元法

1977 年,前田幸雄推导出抛物线索单元的切线刚度矩阵^[9],同年後藤茂夫根据准悬链线的解析解通过变分法推导出索单元的切线刚度矩阵^[10],但在索接近直线时计算精度下降;1978 年,後藤茂夫又修正了弹性伸长的计算公式,重新推导出了索单元的切线刚度矩阵,同时还推导出了弦线方向的切线刚度系数,并与 Ernst 公式进行了比较^[11]。1977 年,Gambhir 提出了一种 2 节点曲线单元法,采用三次多项式插值函数,用于三维预应力索网结构的静力和动力分析^[12]。2000 年,李国平提出的斜拉索非线性分析的状态修正法^[13],本质上也是属于 2 节点曲线单元法。1998 年,唐建民提出了一种 3 节点等参数索单元法^[14],采用 Lagrangian 坐标描述法,并由虚功原理建立了非线性有限元增量方程及切线刚度矩阵,分析了双曲抛物面索网结构。1995 年,Ali 采用 4 节点等参数索单元模拟斜拉桥中的斜拉索^[15]。1997 年,唐建民提出了一种 5 节点等参数单元法^[16],采用四次多项式作为位移插值函数及单元初始形状函数,建立了非线性有限元基本方程和切线刚度矩阵,分析了一双曲抛物面索网。

多节点曲线索单元法的共同点是引入高次函数作为单元的插值函数。与等效弹模法相比,多节点曲线索单元法考虑了索曲线,索力不再假设沿弦线方向,因此精度有很大提高,但这种单元的列式和计算随着节点数的增加而越趋复杂,且不易得出刚度的显示表达式,难以得出统一的求解方法,也不能精确模拟索的悬链线特性。

2.4 悬链线索单元法

对悬索问题的研究最初集中在解析表达式方面,它是超越方程,原则上不能得到显式解。在很长一段时间内,悬索的解析解和有限元法没有很好结合,然而在推导索单元的有限元求解方法时引入索的解析解可以大大提高计算精度和计算效率。

1964 年,O'Brien 提出二维悬索的数值解^[17],随后又将其推广到局部承受空间均布荷载和集中力的空间悬索问题^[18]。文献[17]、[18]中提出的后来被广泛使用的柔性迭代过程,是根据索端点位置和无应力索长,求索形、索端力。O'Brien 的方法随后被广泛地用于索结构的分析中^[19-31]。

1979 年,Peyrot 根据文献[17]中的悬链线算法,通过 3 次调用柔性迭代过程得到索单元的切线刚度矩阵,其平面外刚度系数为零,该法其实是用差分近似代替微分。1981 年,Jayaraman 通过对文献

[17]中的悬链线公式进行微分,推导出了显式表示的索单元切线刚度矩阵,并加上了非零的平面外刚度系数,分析了索结构的静力和动力问题。1981 年,Irvine 利用 Lagrangian 坐标,推导了自重沿无应力长度均布的索单元的精确计算公式,并由此推导出了索单元的显式切线刚度矩阵,但未包括平面外刚度系数,Irvine 的公式有点不完善,即得到的切线刚度矩阵不对称。2004 年,罗喜恒也用 Irvine 的方法推导了空间悬链线索单元的切线刚度矩阵和索端力的表达式,并揭示了平面索单元和空间索单元的关系。

3 斜拉索分析统一理论

3.1 斜拉桥单索问题的描述及分类

考虑悬挂在合力作用平面 $x-y$ 内的弹性索单元,如图 1 所示。在自重作用下,根据悬链线解析理论有

$$L_x = \frac{F_{ix} L_u}{EA} + \frac{F_{ix}}{\omega} \left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{F_{iy}}{F_{ix}}\right) - \operatorname{arsinh}\left(\frac{F_{iy} - \omega L_u}{F_{ix}}\right) \right] \quad (2)$$

$$L_y = \frac{\omega L_u^2}{EA} \left(\frac{F_{iy}}{\omega L_u} - \frac{1}{2} \right) + \frac{F_{ix}}{\omega} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{F_{iy}}{F_{ix}}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{F_{iy} - \omega L_u}{F_{ix}}\right)^2} \right] \quad (3)$$

式(2)、(3)为悬链线的 2 个几何关系式,是构成悬链线的理论基础。

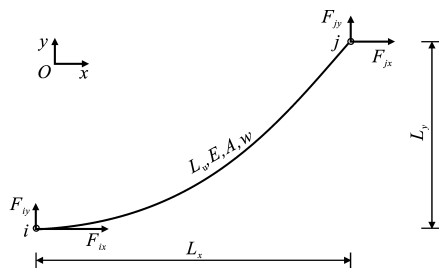


图 1 悬链线索单元

Fig. 1 Catenary Cable Element

对给定的悬索,已知 E 、 A 、 ω ,式(2)、(3)中共有 5 个未知量: L_x 、 L_y 、 L_u 、 F_{ix} 、 F_{iy} 。对于斜拉桥分析中的悬索问题,一般是已知或可以通过迭代得到 L_x 、 L_y ,还有 3 个未知量: L_u 、 F_{ix} 、 F_{iy} ,所以,只需再指定一个量,就可以确定斜拉索的所有几何、力学信息。

如果已知斜拉索的 E 、 A 、 ω 、 L_x 、 L_y ,笔者将斜拉桥中的单索静力问题分为两类:第一类单索问题是已知 L_u ,求索形和索力,如缆索承重桥梁的结构分析、索长控制的斜拉索张拉等;第二类单索问题是

指定 F_{ix} 、 F_{iy} 、 F_{jx} 、 F_{jy} 、 T_i 、 T_j 、 α_i 、 α_j 中的一个,求索形和其他索端力分量,如缆索承重桥梁初始状态的确定、力控制的斜拉索张拉等。

第一类单索问题主要解决结构分析问题,求在荷载作用下的结构变形和内力。第二类单索问题主要解决初始状态问题,找出能满足平衡条件的形状,它是第一类问题的逆问题。索的构形与内力互相影响,不能像常规框架结构那样单独确定内力或构形。

第一类单索问题可通过柔性迭代方法求解,它可根据索端点坐标和无应力长度,求索形、索端力和切线刚度矩阵。由于工程中常考虑到应力、索长的取值范围,Ernst 公式求索单元等效弹模的方法具有较高的精度,而刚度矩阵并不影响几何非线性的最终计算精度,所以柔性迭代最重要的意义不在于求出切线刚度矩阵,而在于根据 L_x 、 L_y 、 L_u 求索端力,它可直接用于非线性分析中的校正过程,求出预测得到的构形下的索端力,从而求出不平衡力,将结构带回真实的平衡位置。尤其需要注意的是:目前绝大多数软件都是根据切线刚度矩阵和位移增量得到单元内力增量,从而得到全部内力,而这种求单元内力的方法对索单元并不适用,因为索单元的刚度矩阵与索力相关,索单元的内力必须由柔性迭代得到,所以这类软件即使提供了悬链线索单元,也不能显著提高计算精度^[32-34]。

第二类单索问题可以通过多次调用第一类单索问题来求解,实质就是求解一非线性方程。求解非线性方程的方法都可以用来求解第二类单索问题,如弦割法、改进弦割法、连分式法等。在采用弦割法求解时,第二类单索问题的求解步骤如下。

步骤 1:假设无应力索长的迭代初值为 L_{u1} 、 L_{u2} ,笔者取 $L_{u1}=L_c$ 、 $L_{u2}=1.001L_c$ 。该初值对斜拉桥常用的索长和应力提供了良好的取值范围。

步骤 2:调用柔性迭代过程,求 L_{u1} 、 L_{u2} 对应的指定值 $F(L_{u1})$ 、 $F(L_{u2})$ 。

步骤 3:采用弦割法预测新的 L_u 、 $F(L_u)$, $L_u = L_{u2} + [F - F(L_{u2})](L_{u2} - L_{u1})/[F(L_{u2}) - F(L_{u1})]$ 。

步骤 4:淘汰旧数据 $L_{u1} \leftarrow L_{u2}$, $F(L_{u1}) \leftarrow F(L_{u2})$; $L_{u2} \leftarrow L_u$, $F(L_{u2}) \leftarrow F(L_u)$ 。

步骤 5:如果 $|(L_{u2} - L_{u1})/L_{u2}| > L_u^{\text{ESP}}$ 并且 $|[F(L_{u2}) - F(L_{u1})]/F(L_{u2})| > F^{\text{ESP}}(L_u)$,则重复步骤 2~5。 L_u^{ESP} 是 2 次迭代 L_u 的允许相对误差, $F^{\text{ESP}}(L_u)$ 是 2 次迭代指定值的允许相对误差。如果 $|(L_{u2} - L_{u1})/L_{u2}| < L_u^{\text{ESP}}$ 且 $|[F(L_{u2}) - F(L_{u1})]/F(L_{u2})| < F^{\text{ESP}}(L_u)$,则收敛, L_u 就是所求的无应力

索长,再按第一类问题求解索形和索力。

以上过程收敛很快,一般迭代 3~6 次便可以收敛。按本文中的方法将单索问题分为两类,概念清晰,求解方便统一。它可以解决斜拉桥计算中几乎所有的单索静力问题,包括了文献[1]~[7]中的所有情况,通用性强,且基于精确的解析理论。

3.2 算例

已知索在基准温度下的 $L_u=100$, $w=1$, $EA=3 \times 10^7$,温度膨胀系数 $\rho=6.5 \times 10^{-6}$,计算时升温 100°C 。索的上端点 i 固定不动,下端点 j 向右水平移动,计算时采用一个悬链线索单元模拟整根索。这是一个索单元的经典算例,很多研究者都引用了该算例,且计算结果大都与文献[19]中的相同。图 2 给出了笔者计算得到的右端索力和索形的变化。为了准确绘制索形,本文中沿无应力索长计算了 100 个点的坐标,然后用样条函数拟合得到如图 1 所示的索形。

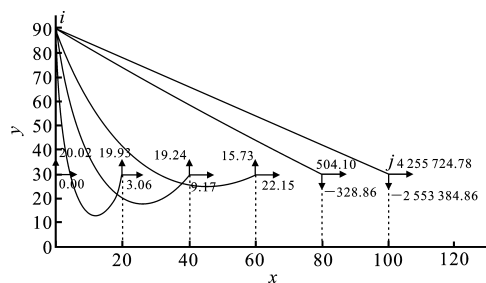


图 2 右端索力和索形的变化

Fig. 2 Variation of Configurations and Right End Forces of Cable

除 $x=100$ 处外,不同研究者的计算结果大多相同或相近。文献[19]中 $x=100$ 处的水平力为 4 170 000,竖向力为 -2 511 000,由此可以推算出右端点切线的斜率为 0.602 2,大于此时斜拉索弦线的斜率,即 $60/100=0.6$,明显有误。因为在自重作用下,悬索右端点切线的斜率必然小于弦线的斜率。笔者的计算结果中相应的右端点切线斜率为 0.599 988 25,小于弦线的斜率,因此本文中的计算结果是可靠的,且与文献[29]中的一致。

从该算例可以看出:仅用一个悬链线索单元就可以精确模拟任何形状、任何应力水平的斜拉索。

4 斜拉索分析统一理论的应用

基于悬链线索单元理论和等效弹模法,以江苏苏通大桥中跨斜拉索为研究对象,对比分析了不同长度、不同应力水平的斜拉索的各种特性。施工中的江苏苏通大桥是双塔钢箱梁斜拉桥,主跨为 1 088

m, 中跨斜拉索从近塔到远塔编号为 $1^\# \sim 34^\#$, 水平投影长度 L_x 为 $8 \sim 536$ m, 索距为 16 m; 重点对比了 L_x 分别为 104、200、296、392、504、536 m 的斜拉索, 大致相当于主跨跨径分别为 200、400、600、800、1 000、1 088 m 的双塔斜拉桥的中跨外索; 重点对比了应力分别为 200、300、450、550、650、750 MPa 的情况, 分别大致相当于斜拉索第一次张拉、吊机前移、第二次张拉、吊梁、成桥恒载、组合最大索力时的索力。

4.1 等效弹模法模拟斜拉索的误差

4.1.1 计算模型及计算方法

计算模型中, 斜拉索塔端点 j 固定; 梁端点 i 水平方向受约束, 而竖直方向可以自由移动, 如图 3 所示。已知斜拉索的初始端点坐标 (x_{i0}, y_{i0}) 、 (x_{j0}, y_{j0}) 和斜拉索梁端初始应力 σ_{i0} , 求斜拉索梁端产生应力幅值 $\Delta\sigma_i$ 时, 梁端的竖向位移 δ_i 。

该模型主要用来研究采用 Ernst 公式的等效弹模模拟斜拉索时, 在不同初始应力 σ_{i0} 、不同应力幅值 $\Delta\sigma_i$ 情况下, 采用不同荷载步个数 N 的计算精度。该模型属于结构分析范畴, 采用第一类单索问题求解。由于在斜拉桥平衡悬臂施工过程中, 斜拉索的塔端水平位移较小, 以梁端竖向位移为主, 该模型能较好地模拟这种情况。现采用 2 种方法分别建模。

(1) 悬链线索单元模拟斜拉索。计算过程为: ①用一个悬链线索单元模拟斜拉索; ②根据第二类单索问题, 由斜拉索的初始端点坐标和梁端初始应力 σ_{i0} , 求出其无应力索长 L_u 和梁端竖向力 F_{iy0} ; ③根据 L_u 、 x_{j0} 、 y_{j0} 、 x_{i0} , 迭代求出当梁端应力为 $\sigma_{i0} + \Delta\sigma_i$ 时的梁端纵坐标 y_i 、梁端竖向力 F_{iy} 、梁端竖向位移 $\delta_i = y_i - y_{i0}$ 。这种方法可以认为是精确的, 且计算精度与所采用的荷载步个数无关。该方法简称为悬链线索单元法。

(2) 杆单元模拟斜拉索, 采用 Ernst 公式修正弹性模量。计算过程为: ①用一个杆单元模拟斜拉索; ②将方法 1 计算得到的梁端竖向力之差 $F_{iy} - F_{iy0}$ 作为外荷载增量, 分级施加在斜拉索的梁端; ③根据斜拉索的应力 σ , 采用 Ernst 公式修正切线模量; ④求出

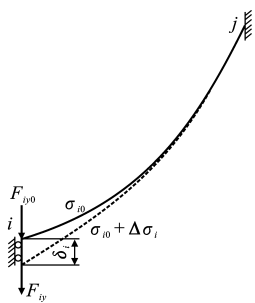


图 3 研究等效弹模法计算精度的模型

Fig. 3 Model for Precision of Equivalent Modulus of Elasticity

斜拉索梁端竖向位移增量 $\Delta\delta$ 和应力增量 $\Delta\sigma$; ⑤更新坐标 $y_i = y_i + \Delta\delta$ 和应力 $\sigma = \sigma + \Delta\sigma$; ⑥对每个荷载步, 重复步骤 ②~⑤, 最后得到梁端竖向位移 $\delta_i = y_i - y_{i0}$ 。在该方法中, 对每个荷载步, 根据上一荷载步的构形, 更新坐标转换矩阵; 根据上一荷载步的索力, 更新斜拉索的切线模量, 它相当于几何非线性分析中的简单增量法, 考虑了斜拉索弹性模量修正、初始轴力和大位移因素, 是大部分桥梁结构分析程序所采用的方法。该方法就是第 2.1 节所说的等效弹模法。

4.1.2 计算结果

笔者根据 4.1.1 节中的 2 种计算方法, 按 5 种应力变化情况, 对江苏苏通大桥中跨 $1^\# \sim 34^\#$ 斜拉索梁端竖向位移 δ 进行了计算: ①梁端应力 200→400 MPa, 如图 4(a) 所示; ②梁端应力 450→250 MPa, 如图 4(b) 所示; ③梁端应力 450→650 MPa, 如图 4(c) 所示; ④梁端应力 550→350 MPa, 如图 4(d) 所示; ⑤梁端应力 550→750 MPa, 如图 4(e) 所示。 σ_0 分别为 200、450、550 MPa, 大致相当于斜拉索第一次张拉、第二次张拉和成桥时的索应力, 其中, 梁端竖向位移 δ 的相对误差定义为

δ 的相对误差 = (等效弹模法计算得到的 δ / 悬链线索单元法计算得到的 δ) - 1。

根据计算结果可以看出:

(1) 对于低应力的长索, 等效弹模法的误差很大。例如, 对于 $L_x = 536$ m 的斜拉索, 当应力 200→400 MPa 时, 即使采用 10 个荷载步计算, 相对误差也达到 13.15%。等效弹模法的计算精度完全依赖于计算所采用的荷载步个数。

(2) 由于漂移误差, 对于应力增大的情况, 斜拉索的刚度变大, 等效弹模法总是使位移偏大; 对于应力减小的情况, 斜拉索的刚度变小, 等效弹模法总是使位移偏小。

(3) 现有的桥梁结构分析软件, 大多采用等效弹模法, 有的还不能做到分级施加荷载和坐标迁移。如果采用这种方法来计算大跨度斜拉桥, 将产生很大的误差。

(4) 在斜拉桥施工或使用当中, 索力可能出现反复变化, 如索力随施工、地震荷载和风荷载等发生变化, 如采用等效弹模法计算, 误差会产生积累; 采用悬链线索单元法, 计算精度与荷载步个数和应力变化等无关。

4.2 斜拉索参数随应力变化的特性

4.2.1 计算模型及计算方法

计算模型中, 斜拉索的梁、塔端点 i 、 j 固定在设

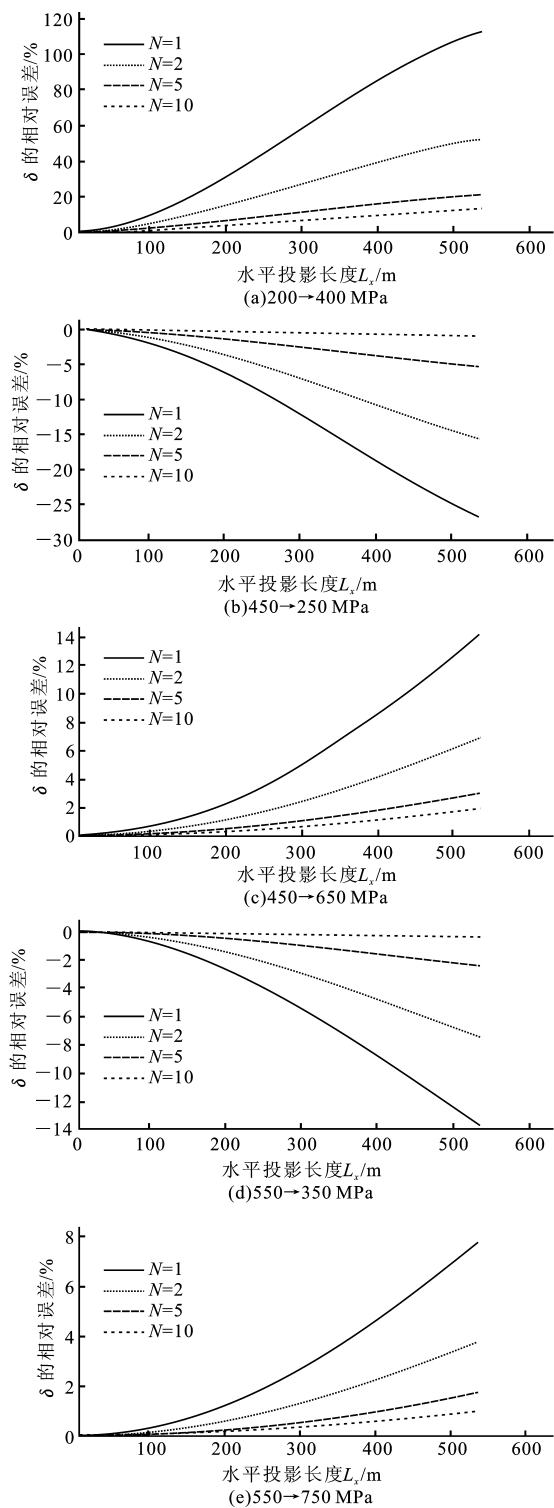


图 4 等效弹模法计算 δ 的相对误差随 L_x 的变化
Fig. 4 Variation of δ Relative Errors Calculated with Equivalent Elasticity Modulus Method vs L_x

计成桥位置,求在不同的斜拉索梁端应力 σ_i 时,各斜拉索的刚度、索力、垂度、无应力索长等特性。该模型是斜拉索初始状态的确定问题,采用第二类单索问题求解。

4.2.2 计算结果

(1)刚度等效系数

笔者定义:斜拉索刚度的等效系数=悬链线索单元的刚度/直杆单元的刚度,其中直杆单元的刚度为弹性刚度与几何刚度之和。

笔者定义的斜拉索刚度的等效系数也就是所谓的弹性模量折减系数,它反映了由于斜拉索垂度引起的刚度损失。刚度等效系数越大,垂度引起的刚度损失就越小,索的刚度就越接近于直杆单元。

图 5 为斜拉索梁端竖向刚度 K_{iy} 的等效系数随水平投影长度 L_x 的变化曲线。从图 5 中可以看出:对于较低应力水平的斜拉索,刚度等效系数随 L_x 的增大急剧减小,即由垂度引起的刚度损失急剧增大。对于 L_x 分别为 104、200、296、392、504、536 m 的斜拉索,当梁端应力为 200 MPa 时, K_{iy} 的等效系数分别为 0.878、0.662、0.474、0.342、0.242、0.221;当梁端应力为 450 MPa 时, K_{iy} 的等效系数分别为 0.987、0.955、0.907、0.848、0.773、0.751;当梁端应力为 550 MPa 时, K_{iy} 的等效系数分别为 0.993、0.975、0.946、0.910、0.860、0.845。

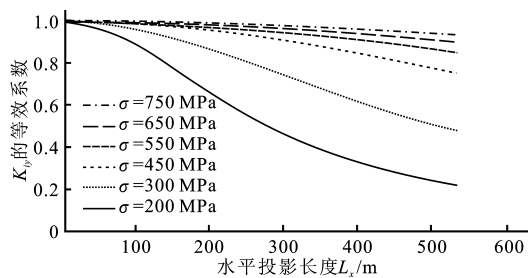


图 5 K_{iy} 的等效系数随 L_x 的变化
Fig. 5 Variation of Equivalent Coefficient of K_{iy} vs L_x

图 6 为斜拉索梁端竖向刚度 K_{iy} 的等效系数随梁端应力 σ_i 的变化曲线。从图 6 中可以看出:对于较长的斜拉索,刚度的等效系数随应力水平的提高而快速增大,即由垂度引起的刚度损失快速减小,斜拉索的刚度完全依赖于应力水平的高低。斜拉索 L_x 越长,图 6 中曲线范围越大,斜拉索刚度变化越大,如采用等效弹模法模拟斜拉索,则漂移误差越大。对 $L_x=536$ m 的斜拉索,当应力分别为 200、300、450、550、650、750 MPa 时, K_{iy} 的等效系数分别为 0.221、0.478、0.751、0.845、0.900、0.932,也即由垂度引起的刚度损失分别为 77.95%、52.19%、24.91%、15.48%、10.03%、6.78%。

(2)Ernst 公式计算切线刚度的相对误差

图 7 为 Ernst 公式计算梁端竖向刚度 K_{iy} 的相对误差随水平投影长度 L_x 的变化曲线。从图 7 中

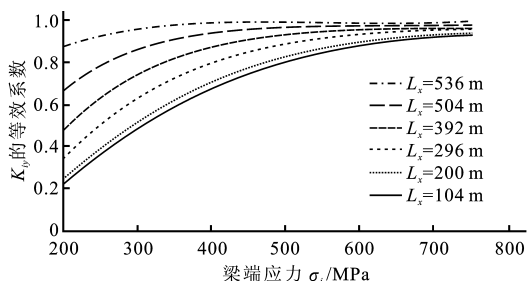


图 6 K_{iy} 的等效系数随 σ_i 的变化

Fig. 6 Variation of Equivalent Coefficient of K_{iy} vs σ_i

可以看出:斜拉索越短,应力水平越高,精度也越高。对于 L_x 分别为 104、200、296、392、504、536 m 的斜拉索,当梁端应力为 200 MPa 时,Ernst 公式计算 K_{iy} 的相对误差分别为 -1.26%、-3.59%、-5.67%、-7.15%、-8.23%、-8.44%;当梁端应力为 550 MPa 时,Ernst 公式计算 K_{iy} 的相对误差分别为 -0.03%、-0.11%、-0.23%、-0.41%、-0.67%、-0.75%。可以看出:Ernst 公式计算斜拉索刚度的精度是非常高的。需要指出的是,这并不表明用等效弹模法模拟斜拉索进行结构分析也能达到同等精度,因为对非线性计算精度起决定性作用的并不是结构刚度矩阵。等效弹模法没有提供根据索端点坐标求计算斜拉索端力的方法,只能应用简单增量法求解,因此不可避免地产生漂移误差和累积误差。

对于长索,随应力水平的提高,Ernst 公式的计算精度提高很快。对 $L_x=536$ m 的斜拉索,当应力分别为 200、300、450、550、650、750 MPa 时,Ernst 公式计算 K_{iy} 的相对误差分别为 -8.44%、-4.20%、-1.43%、-0.75%、-0.42%、-0.25%。

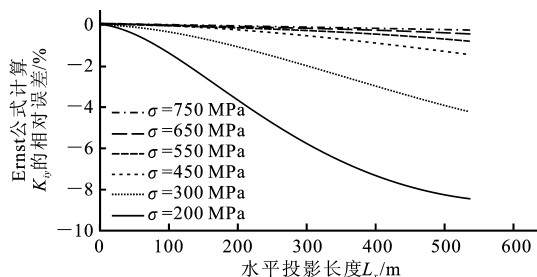


图 7 Ernst 公式计算 K_{iy} 的相对误差随 L_x 的变化

Fig. 7 Variation of K_{iy} Relative Errors Calculated with Formula of Ernst vs L_x

(3) 索力分量等效系数

笔者定义:斜拉索索力分量的等效系数=悬链线索单元的索力分量/直杆单元的索力分量,计算悬链线索单元的索力分量和直杆单元的索力分量时,使两者梁端的应力相等。笔者定义的斜拉索索力分

量等效系数反映了由于斜拉索垂度引起的索力分量的变化,索力分量的等效系数越接近 1,表示用直杆单元模拟斜拉索力分量的误差越小。在张拉阶段,它直接反映索力张拉对结构的效应;在使用阶段,它反映斜拉索对结构的支承效果,是由于斜拉索垂度效应引起的支承效果折减。

图 8 为斜拉索梁端竖向索力 F_{iy} 的等效系数随水平投影长度 L_x 的变化曲线。从图 8 中可以看出:尤其对于较低应力水平的斜拉索,随 L_x 的增大, F_{iy} 的等效系数快速远离 1,即用杆单元模拟斜拉索的精度快速降低。对于 L_x 分别为 104、200、296、392、504、536 m 的斜拉索,当梁端应力为 200 MPa 时, F_{iy} 的等效系数分别为 0.986、0.952、0.902、0.838、0.752、0.725;当梁端应力为 450 MPa 时, F_{iy} 的等效系数分别为 0.994、0.979、0.957、0.929、0.890、0.879。由于是将索力作为外力施加在结构上计算斜拉索张拉效应,故 F_{iy} 的等效系数将直接决定斜拉索张拉工况的计算精度,而等效弹模法认为索力总是沿着弦线的方向,故增加荷载步个数也无法减小误差。

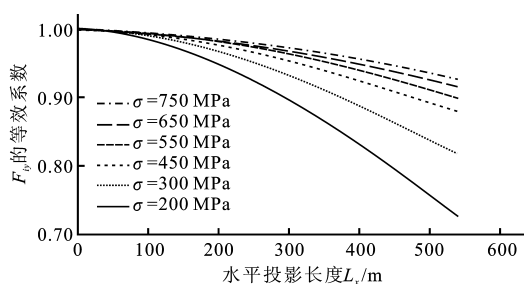


图 8 F_{iy} 的等效系数随 L_x 的变化

Fig. 8 Variation of Equivalent Coefficient of F_{iy} vs L_x

对于较长的斜拉索,随梁端应力的增大,索力分量的等效系数快速接近 1,即用杆单元模拟斜拉索的计算精度提高很快。对 $L_x=536$ m 的斜拉索,当应力分别为 200、300、450、550、650、750 MPa 时, F_{iy} 的等效系数分别为 0.725、0.817、0.879、0.901、0.916、0.927。

(4) 垂度

图 9 为斜拉索最大竖向垂度 f_v 随水平投影长度 L_x 的变化曲线。从图 9 中可以看出:对于较低应力水平的斜拉索,随 L_x 的增大, f_v 迅速增大。

假设索曲线为抛物线时,斜拉索的最大竖向垂度为^[35]

$$f_v = \frac{\gamma L_c^2}{8\sigma} \quad (4)$$

采用式(4)计算垂度的精度很高。对 $L_x=536$

m 的斜拉索,当应力分别为 200、300、450、550、650、750 MPa 时,按式(4)计算 f_v 的相对误差分别为 4.02%、2.95%、2.17%、1.89%、1.71%、1.59%。

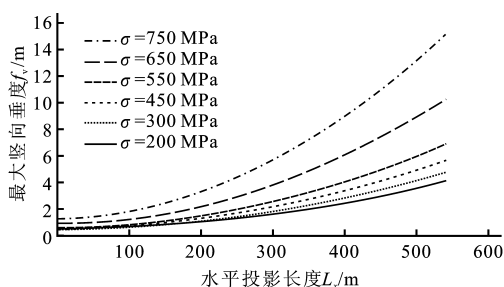


图9 f_v 随 L_x 的变化

Fig. 9 Variation of f_v vs L_x

(5) 抛物线公式计算无应力索长的误差

假设索曲线为抛物线时,斜拉索长度计算的垂直度修正为^[36]

$$\Delta L_f = \frac{w^2 L_x^2 L_c}{24 T^2} \quad (5)$$

图 10 为采用式(5)计算斜拉索无应力索长 L_u 的误差随水平投影长度 L_x 的变化曲线。从图 10 中可以看出:对于较低应力水平的斜拉索,随 L_x 的增大,式(5)计算 L_u 的误差迅速增大。对 $L_x = 536$ m 的斜拉索,当应力为恒载状态的 550 MPa 时,式(5)计算 L_u 的误差仅为 0.033 746 m;但当应力为初张拉的 200 MPa 时, L_u 的误差却为 0.121 746 m,对采用无应力控制思想的斜拉桥,该问题应该引起足够的重视。

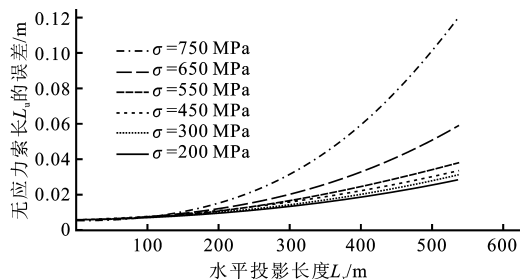


图 10 抛物线公式计算 L_u 的误差随 L_x 的变化

Fig. 10 Variation of L_u Errors Calculated with Parabola Formula vs L_x

5 结 语

悬链线索单元根据索的精确解析式推导出索单元的切线刚度矩阵,能得到索形和索端力,且能适应各种极端情形,是一种精度高、通用性强的方法。事实上,悬链线索单元法出现已有相当长的一段时间了,文献[20]标志着该方法的基本成熟。该方法已广泛应用于悬索桥等索结构的结构分析中,但笔者

至今只见到文献[22]中应用悬链线索单元分析斜拉桥,且只是针对成桥阶段,没有考虑施工过程。对大跨度斜拉桥来讲,施工过程中斜拉索应力小、位移大,用常规有效弹模法分析将带来很大误差,迫切需要引入高精度的悬链线索单元进行斜拉桥施工过程分析。在斜拉桥分析中之所以未广泛采用悬链线索单元法,最大的原因可能是采用这种方法计算斜拉索时,必须事先确定 L_u ,且在斜拉桥施工过程中 L_u 可能发生改变,工程师不易接受,算法难于与现有软件结合。采用笔者提出的斜拉索分析的统一理论,可以精确、统一地求解几乎所有的斜拉桥单索静力问题,可以方便地将悬链线索单元法引入到斜拉桥施工过程分析中,是对以往方法的一大改进。

对比分析表明:水平长度超过 400 m 的斜拉索的非线性将急剧增大,采用等效弹模法模拟斜拉索会引起较大的误差。增加荷载步个数可以减小某些误差,如切线模量引起的漂移误差和大位移因素引起的误差;有些误差即使增加荷载步个数也无法减小,如索力分量引起的误差。在较低应力水平的施工阶段,索力方向可能偏离弦线方向较大,这直接影响到张拉工况的计算。

参考文献:

References:

- [1] YIU P, BROTTON D M. Computation of Fabrication Dimensions for Cable-Stayed Bridges[J]. The Structure Engineer, 1988, 66(15): 237-243.
- [2] LEVINSON D A, KANE T R. A Usable Solution of the Hanging Cable Problem[J]. Computers and Structures, 1993, 46(5): 821-844.
- [3] 李强兴. 斜拉索静力解[J]. 桥梁建设, 1996, 26(3): 21-24.
LI Qiang-xing. Static Solution for Cable Stays[J]. Bridge Construction, 1996, 26(3): 21-24.
- [4] 程 伟, 易伟建, 刘光栋. 斜拉桥柔性索线形分析及快速迭代计算方法[J]. 公路, 1998, 43(6): 8-11.
CHENG Wei, YI Wei-jian, LIU Guang-dong. Analysis of Flexible Cables of Cable-Stayed Bridges and Fast Iteration Solution[J]. Highway, 1998, 43(6): 8-11.
- [5] 魏建东, 赵人达, 车惠民. 斜拉桥中拉索的静力设计[J]. 桥梁建设, 1999, 29(2): 21-23.
WEI Jian-dong, ZHAO Ren-da, CHE Hui-min. Static Design of Cable in Cable-Stayed Bridge[J]. Bridge Construction, 1999, 29(2): 21-23.
- [6] 刘明虎. 几种方法进行斜拉索静力计算比较[C]//中国土木工程学会. 中国土木工程学会桥梁及结构工程

- 学会第十四届年会. 上海: 同济大学出版社, 2000: 661-666.
- LIU Ming-hu. Comparison of Several Algorithm of Static Analysis of Cable Stays[C]//CSCE. 14th Conference of Society of Bridge and Structural Engineers of CSCE. Shanghai: Tongji University Press, 2000: 661-666.
- [7] 郝超, 裴岷山, 强士中. 大跨度斜拉桥拉索无应力长度的计算方法比较[J]. 重庆交通学院学报, 2001, 20(3): 1-3.
- HAO Chao, PEI Min-shan, QIANG Shi-zhong. Comparison of Algorithm for Calculation Non-stress Length of Cable in Long-Span Cable-Stayed Bridge[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University, 2001, 20(3): 1-3.
- [8] ERNST H J. The E-Module of Rope with Consideration of the Dip[J]. The Civil Engineering, 1965, 40(1): 52-55.
- [9] 前田幸雄, 林正, 前田研一. サグを考慮したケーブル部材の計算式[C]//日本土木学会. 土木学会論文集. 东京: 日本土木学会, 1977: 123-126.
- MAEDA Y, LIN Z, MAEDA K. Caculation of Cable Member Considering Static Force[C]//Japanese Civil Academy. Civil Academy Symposium. Tokyo: Japanese Civil Academy, 1977: 123-126.
- [10] 後藤茂夫. 柔ケーブル部材を有する構造物の解析[J]. 橋梁, 1977, 13(2): 9-15.
- GOTO S. Analysis of a Makeup Hoving a Soft Cable Member[J]. Bridge, 1977, 13(2): 9-15.
- [11] 後藤茂夫. 柔ケーブル材の接線剛性方程式について[C]//日本土木学会. 土木学会論文集. 东京: 日本土木学会, 1978: 41-49.
- GOTO S. A Tangent Line Hardness Equation of Soft Cable Materials[C]//Japanese Civil Academy. Tokyo: Japanese Civil Academy, 1978: 41-49.
- [12] GAMBHIR M L, BATCHELOR B A. Finite Element for 3-D Pre-stressed Cable Nets[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1977, 11(5): 1 699-1 718.
- [13] 李国平. 斜拉索非线性分析的状态修正法[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2000, 28(1): 1-4.
- LI Guo-ping. State Revision Method in Nonlinear Analysis of Stay Cable[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2000, 28(1): 1-4.
- [14] 唐建民, 何署廷. 悬索结构非线性有限元分析[J]. 河海大学学报, 1998, 26(6): 45-49.
- TANG Jian-min, HE Shu-ting. A Nonlinear Finite Element Method for Analyzing Cable Strctures[J]. Journal of Hohai University, 1998, 26(6): 45-49.
- [15] ALI H M, ABDEL-GHAFFAR A M. Modeling the Nonlinear Seismic Behavior of Cable-Stayed Bridges with Passive Control Bearings[J]. Computers and Structures, 1995, 54(3): 461-492.
- [16] 唐建民, 董明, 钱若军. 张拉结构非线性分析的五节点等参单元[J]. 计算力学学报, 1997, 14(1): 108-113.
- TANG Jian-min, DONG ming, QIAN Ruo-jun. A Finite Element Method with Five-Node Isoparametric Element for Nonlinear Analysis of Tension Structures[J]. Journal of Computation Mechanics, 1997, 14(1): 108-113.
- [17] O'BRIEN M T, FRANCIS A J. Cable Movements Under Two-Dimensional Loading[J]. Journal of Structural Engineering, 1964, 90(3): 89-123.
- [18] O'BRIEN M T. General Solution of Suspended Cable Problems[J]. Journal of Structural Engineering, 1967, 93(1): 1-26.
- [19] PEYROT A H, GOULOIS A M. Analysis of Cable Structures[J]. Computers and Structures, 1979, 10(5): 805-813.
- [20] JAYARAMAN H B, KNUDSON W C. A Curved Element for the Analysis of Cable Structures[J]. Computers and Structures, 1981, 14(3): 325-333.
- [21] IRVINE H M. Cable Structures[M]. Combridge: The MIT Press, 1981.
- [22] ABBAS S. Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Segmentally Erected, Three Dimensional Cable Stayed Bridges[D]. Berkeley: University of California, 1993.
- [23] 肖汝诚. 确定大跨径桥梁合理设计状态理论与方法研究[D]. 上海: 同济大学, 1996.
- XIAO Ru-cheng. Study on the Theory and Method of the Reasonable Design State of the Long-Span Bridge[D]. Shanghai: Tongji University, 1996.
- [24] 潘永仁. 悬索桥的几何非线性静力分析及工程控制[D]. 上海: 同济大学, 1996.
- PAN Yong-ren. Geometric Nonlinear Static Analysis and Construction Control of Suspension Bridges[D]. Shanghai: Tongji University, 1996.
- [25] KAROUMI R. Some Modeling Aspects in the Nonlinear Finite Element Analysis of Cable Supported Bridges[J]. Computers and Structures, 1999, 71(4): 397-412.
- [26] 程进. 缆索承重桥梁非线性空气静力稳定性研究[D]. 上海: 同济大学, 2000.
- CHENG Jin. Study on Nonlinear Aerostatic Stability

- of Cable-Supported Bridges[D]. Shanghai: Tongji University, 2000.
- [27] KIM H K, LEE M J, CHANG S P. Non-linear Shape-Finding Analysis of a Self-anchored Suspension Bridge[J]. Engineering Structures, 2002, 24(12): 1547-1559.
- [28] 唐茂林. 大跨度悬索桥空间几何非线性分析与软件开发[D]. 成都: 西南交通大学, 2003.
- TANG Mao-lin. 3D Geometric Nonlinear Analysis of Long-Span Suspension Bridge and Its Software Development[J]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2003.
- [29] 罗喜恒. 复杂悬索桥施工过程精细化分析研究[D]. 上海: 同济大学, 2004.
- LUO Xi-heng. Fine Analysis of Complicated Suspension Bridge During Construction Process[D]. Shanghai: Tongji University, 2004.
- [30] CHEN W F, LUI E M. Stability Design of Steel Frames[M]. London: CRC Press, Inc, 1991.
- [31] 俞茂宏, ODA Y, 盛 谦, 等. 统一强度理论的发展及其在土木水利等工程中的应用和经济意义[J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(1): 24-41.
- YU Mao-hong, ODA Y, SHENG Qian, et al. Development of Unified Strength Theory and Its Applications in Civil Engineering and Its Economic Significance[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(1): 24-41.
- [32] 王元清, 张 勇, 石永久, 等. 吊索与钢管混凝土拱桥新型节点承载性能分析[J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(3): 55-58.
- WANG Yuan-qing, ZHANG Yong, SHI Yong-jiu, et al. Analysis of Load Capacity of New-Style Joints Between Cable and Concrete-Filled Steel Tube Arch Bridge[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(3): 55-58.
- [33] 陈政清. 斜拉索风雨振现场观测与振动控制[J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(4): 5-10.
- CHEN Zheng-qing. On-Site Observation of Wind-Rain Induced Vibration of Stay Cables and Its Control[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(4): 5-10.
- [34] 李忠献, 武魏娜. 大型结构非线性物理参数识别的线性化算法[J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(2): 15-20.
- LI Zhong-xian, WU Wei-na. Linearization Method to Identify Nonlinear Physical Parameters of Large Structures[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(2): 15-20.
- [35] GIMSING N J. Cable Supported Bridges[M]. 2nd ed. Chichester: John Wiley, 1997.
- [36] JTJ 027-96, 公路斜拉桥设计规范[S].
- JTJ 027-96, Code for Design of Highway Cable-Stayed Bridges[S].

《暖通空调》2006 年征订通知

《暖通空调》由国家建设部主管, 亚太建设科技信息研究院、中国建筑设计研究院、中国建筑学会暖通空调专业委员会联合主办; 为国家期刊奖获奖期刊、中国建筑科学类核心期刊、世界最著名的建筑专业数据库——国际建筑文献数据库(ICONDA)收录期刊、中国科技论文与引文数据库统计分析数据源期刊、中国科学引文数据库来源期刊、中国学术期刊综合评价数据库统计源期刊、中国核心期刊(遴选)数据库收录期刊、中国期刊全文数据库收录期刊。

《暖通空调》创刊于 1971 年, 始终以“新颖、实用、准确、精练”为办刊方针, 以提高全行业素质, 推动全行业技术交流与发展为宗旨, 及时报道国家有关建筑节能和环境保护的重大技术政策, 建筑环境与设备工程中供暖、通风、空调、制冷及洁净技术方面的研究成果、学术论文、先进技术、工程总结、设计经验、设备开发与运行管理以及行业学术活动与设备市场信息。发行对象主要为从事建筑环境与设备工程中供暖、通风、空调、制冷、洁净等相关领域的工程设计、科研教学、施工安装、设备制造、运行管理的专业技术人员、管理人员、院校师生、房地产开发商和业主以及对暖通空调制冷技术感兴趣的各界朋友。

《暖通空调》全年 12 期, 每期发行 25 000 册, 每月 15 日出版, 每期定价 10.00 元, 全年 120.00 元。在全国各地邮局均可订阅, 邮发代号 2-758。本刊尚有少量过刊、合订本及光盘, 可联系本刊发行部邮购。

地 址: 北京市西外车公庄大街 19 号

邮 编: 100044

联系人: 金庆平

E-mail: jinqp@cadg.cn

电 话: 010-68362755

传 真: 010-88373572