

文章编号:1673-2049(2006)01-0078-07

# 悬挂结构动力特性的时频分析

涂文戈, 邹银生

(湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

**摘要:**采用振型叠加法对悬挂结构系统的运动特性进行分析研究;通过对悬挂子结构和主支撑结构的相互作用进行频域分析,提出地震动激励下悬挂子结构对主支撑结构的作用是在主支撑结构上添加悬挂子结构的复惯性质量,即悬挂子结构静态和动态质量(悬挂子结构振动作用与引起振动的外界激励加速度的比值)之和;根据悬挂子结构的复惯性质量和主支撑结构的模态参数,对悬挂结构系统的耦合动态响应进行了频域研究,采用时程分析方法对结果进行验证;同时,对悬挂结构系统与 TMD/MTMD 的减震原理进行了比较分析。

**关键词:**悬挂结构系统;抗震;独立模态;频域传递函数;复惯性质量

中图分类号:TU311.3

文献标志码:A

## Time and Frequency Domain Analysis of Suspension Structure Dynamic Characteristics

TU Wen-ge, ZOU Yin-sheng

(School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, Hunan, China)

**Abstract:** Suspension primary-secondary structures dynamic characteristics in both time domain and frequency domain were investigated. Complex inertia mass was presented, which was equal to the sum of statistic and dynamic mass, and was equal to the specific value of the vibrating excitation and the vibrating action output of suspension secondary structure. Therefore, the action from suspension secondary structure to primary structure in earthquake excitation was equal to that complex inertia mass of secondary structure was added on primary structure. Based on complex inertia mass, the coupled dynamic characteristics of three suspension structure systems models in different modal frequency overlapping scale between suspension primary structure and secondary structure were studied. In addition, it was compared with the shock absorption principium of TMD/MTMD.

**Key words:** suspension structure system; anti-seism; independent modal; frequency domain transfer function; complex inertia mass

## 0 引言

1938 年 Williams 提出利用悬挂原理建造超高层建筑的想法,采用悬挂建筑框架结构能够提供大的建筑空间,满足多种建筑功能的要求。国外悬挂

建筑框架结构已经进入到使用阶段;中国在悬挂建筑框架结构的整体稳定性<sup>[1]</sup>、组合巨型框架等效模型<sup>[2]</sup>和悬挂子结构对主支撑结构的驱动作用<sup>[3]</sup>等方面分别进行了研究。

地震荷载作用下,悬挂结构的运动特征类似于

TMD/MTMD,但是因为悬挂子结构和主支撑结构均为多自由度结构体系,两者间的运动和作用互相耦合,并且悬挂子结构的质量大于主支撑结构的,这些特点使得在地震动激励下悬挂主支撑结构的位移和加速度的变化规律更为复杂。

笔者推导了悬挂结构系统的振动微分方程,并且进行了时频分析;通过对悬挂子结构和主支撑结构的相互作用推导了两者基于各自独立模态下的振动方程,并且进行了频域分析,提出了悬挂子结构对主支撑结构的作用是悬挂子结构复惯性质量的添加;针对悬挂子结构和主支撑结构的模态频率之间不同的重叠范围,对悬挂结构系统进行了时频分析研究。

## 1 悬挂结构系统

### 1.1 悬挂子结构的振动方程

第  $i$  个悬挂子结构的振动响应与振动激励、悬挂子结构自身参数相关,其振动激励为主支撑结构在该子结构与主支撑结构连接处的绝对加速度,因此第  $i$  个悬挂子结构的振动微分方程为

$$\mathbf{M}_{\text{sub},i}(\ddot{\mathbf{x}}_{\text{sub},i} - \mathbf{P}_i \ddot{\mathbf{x}}) + \mathbf{C}_{\text{sub},i}(\dot{\mathbf{x}}_{\text{sub},i} - \mathbf{P}_i \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}_{\text{sub},i}(\mathbf{x}_{\text{sub},i} - \mathbf{P}_i \mathbf{x}) = -\mathbf{M}_{\text{sub},i}(\bar{\mathbf{I}}_i \ddot{\mathbf{x}}_g + \mathbf{P}_i \ddot{\mathbf{x}}) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M}_{\text{sub},i}$ 、 $\mathbf{C}_{\text{sub},i}$ 、 $\mathbf{K}_{\text{sub},i}$  分别为第  $i$  个悬挂子结构的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵; $\ddot{\mathbf{x}}_{\text{sub},i}$  为第  $i$  个悬挂子结构相对于地面的位移向量; $\mathbf{P}_i$  为第  $i$  个悬挂子结构的设置矩阵,为  $l_i \times n$  阶矩阵, $l_i$  为该悬挂子结构自由度数, $n$  为主支撑结构自由度数; $\mathbf{x}$  为主支撑结构相对于地面的  $n$  维列位移向量; $\bar{\mathbf{I}}_i$  为与左乘的第  $i$  个悬挂子结构的结构参数矩阵同维数的单位列向量; $\ddot{\mathbf{x}}_g$  为地面加速度;若第  $i$  个悬挂子结构悬挂于主支撑结构第  $j$  自由度上, $\mathbf{P}_i$  的第  $j$  列的  $l_i$  个元素都为 1,其余列的元素均为 0。

作用于连接处的第  $i$  个悬挂子结构的反作用力向量为

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{P}_i^T \mathbf{M}_{\text{sub},i}(\ddot{\mathbf{x}}_{\text{sub},i} + \bar{\mathbf{I}}_i \ddot{\mathbf{x}}_g) \quad (2)$$

集成所有悬挂子结构的振动微分方程,构造悬挂子结构系统振动微分方程。令  $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_{\text{sub},i})^T$ ,  $\bar{\mathbf{M}} = \text{diag}(\mathbf{M}_{\text{sub},i})$ ,  $\bar{\mathbf{C}} = \text{diag}(\mathbf{C}_{\text{sub},i})$ ,  $\bar{\mathbf{K}} = \text{diag}(\mathbf{K}_{\text{sub},i})$ , 则悬挂子结构系统振动微分方程为

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \bar{\mathbf{M}}(\ddot{\bar{\mathbf{x}}} - \mathbf{P}\ddot{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{C}}(\dot{\bar{\mathbf{x}}} - \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{P}\mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}}_g \quad (3)$$

式中: $\mathbf{P}$  为  $(\sum_{i=1}^m l_i) \times n$  阶悬挂子结构设置矩阵, $m$  为悬挂子结构个数, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_i^T$ ;  $\bar{\mathbf{I}}$  为与悬挂子结构系统矩

阵同维数的单位列向量,  $\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{I}_i^T$ 。

相应地,作用于主支撑结构的悬挂子结构系统的反力向量  $\mathbf{f}$  为

$$\mathbf{f} = -\mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}}(\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \bar{\mathbf{I}}\ddot{\mathbf{x}}_g) \quad (4)$$

在悬挂子结构的作用下,主支撑结构的振动微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_g + \mathbf{f} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$  分别为主支撑结构质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵,均为  $n \times n$  阶矩阵; $\mathbf{I}$  为与主支撑结构同维数的单位列向量。

### 1.2 悬挂结构系统振动方程

联立式(3)~(5)得悬挂结构系统的振动微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{U} &= \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}}_g \\ \mathbf{U} &= (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})^T \\ \hat{\mathbf{M}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} & -\mathbf{P}^T \bar{\mathbf{C}} \\ -\bar{\mathbf{C}} \mathbf{P} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{K}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{P} & -\mathbf{P}^T \bar{\mathbf{K}} \\ -\bar{\mathbf{K}} \mathbf{P} & \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: $\hat{\mathbf{I}}$  为与悬挂结构系统同维数的单位列向量。

### 1.3 悬挂子结构与主支撑结构相互作用影响分析

悬挂子结构的振动与主支撑结构的振动相互影响,即作用是相互耦合的。如果主支撑结构满足比例阻尼的要求,对主支撑结构作变换,  $\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}$  为广义坐标向量,  $\Phi$  为振型矩阵。令  $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{E}$ ,  $\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \mathbf{\Xi}$ ,  $\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{E}$  为单位矩阵,  $\mathbf{\Xi} = \text{diag}(2\xi_j \omega_j)$ ,  $\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_j^2)$ ,  $\mathbf{\Gamma} = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{F} = \Phi^T \mathbf{P}^T \mathbf{f}$ , 则式(5)表示为

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Xi} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega} \mathbf{q} = -\mathbf{\Gamma} \ddot{\mathbf{x}}_g + \mathbf{F} \quad (7)$$

其各阶广义坐标分量  $q_j$  为

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\gamma_j \ddot{x}_g + F_j \quad (8)$$

式中: $\xi_j$ 、 $\omega_j$ 、 $q_j$  分别为主支撑结构第  $j$  阶阻尼比、固有频率、广义坐标,  $j=1, 2, \dots, n$ 。

令  $\mathbf{z}$  为悬挂子结构相对于主支撑结构的位移,  $\mathbf{z} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ , 则式(3)为

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{z} = -\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}}_g \quad (9)$$

如果各个悬挂子结构满足比例阻尼的要求,对悬挂子结构相对于主支撑结构的位移作变换,  $\mathbf{z} = \Psi \mathbf{v}$ ,  $\Psi = \text{diag}(\Psi_i)$  为悬挂子结构系统的振型矩阵,  $\Psi_i$  为第  $i$  个悬挂子结构的质量归一化的振型矩阵,  $\mathbf{v}$  为悬挂子结构相对于主支撑结构的广义位移。令  $\bar{\mathbf{\Xi}} =$

$\text{diag}(2\bar{\xi}_{j,i}, \bar{\omega}_{j,i}), \bar{\Omega} = \text{diag}(\bar{\omega}_{j,i}^2)$ , 其中,  $\bar{\xi}_{j,i}, \bar{\omega}_{j,i}$  分别为位于第  $i$  悬挂子结构的第  $j$  阶阻尼比、固有频率,  $i=1, 2, \dots, m$ 。式(9)可简化为

$$\ddot{\mathbf{v}} + \bar{\Xi}\dot{\mathbf{v}} + \bar{\Omega}\mathbf{v} = -\Psi\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{P}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{I}}\ddot{\mathbf{x}}_g) \quad (10)$$

由式(4)得主支撑结构的第  $j$  阶反作用向量为

$$\mathbf{F}_j = \Phi^T \mathbf{P}^T \mathbf{f} = -\Phi_j^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}}(\bar{\mathbf{I}}\ddot{\mathbf{x}}_g + \mathbf{P}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \Psi\ddot{\mathbf{v}}) \quad (11)$$

式中:  $\Phi_j$  为主支撑结构的第  $j$  阶振型向量。

多阶模态组合或完备模态下的反作用力向量为

$$\mathbf{F} = -\Phi^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}}(\bar{\mathbf{I}}\ddot{\mathbf{x}}_g + \mathbf{P}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \Psi\ddot{\mathbf{v}}) \quad (12)$$

将式(12)代入式(7)整理可得

$$(\mathbf{E} + \Phi^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{P} \Phi) \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\Xi} \dot{\mathbf{q}} + \bar{\Omega} \mathbf{q} + \Phi^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} \Psi \ddot{\mathbf{v}} = -(\Gamma + \Phi^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{I}}) \ddot{\mathbf{x}}_g \quad (13)$$

联立式(10)、(13)得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} + \Phi^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{P} \Phi & \Phi^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} \Psi \\ \Psi^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{P} \Phi & \bar{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\Xi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Gamma + \Phi^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{I}} \\ \Psi^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_g \quad (14)$$

式(14)可分析悬挂子结构与主支撑结构相互作用的影响。由于作用力向量是主支撑结构和悬挂子结构多个振型的耦合, 根据两者的完备模态空间或者选取影响占优的前几阶模态来分析悬挂子结构与主支撑结构地震动激励下的相互作用<sup>[4-5]</sup>。

## 2 频域分析

傅立叶变换的基本思想是用周期函数的组合来表示非周期性的复杂函数。对于复杂的地震动过程, 根据傅立叶级数展开为不同频率的周期函数的组合形式

$$\ddot{\mathbf{x}}_g(t) = \sum A(\omega) \exp(i\omega t) \quad (15)$$

式中:  $A(\omega)$  为地震动的傅氏谱,  $A(\omega) = \sqrt{S(\omega)}$ ,  $S(\omega)$  为地震动功率谱。

### 2.1 悬挂结构系统的频域分析

将任意频率  $\omega$  的地震动激励  $A(\omega) \exp(i\omega t)$  代入式(4), 在稳态响应下消去式(4)两边的共有项  $\exp(i\omega t)$ , 则悬挂结构系统中主支撑结构的各质点以及各个悬挂子结构相对于地面的位移傅氏谱为

$$\mathbf{U}(\omega) = (-\omega^2 \hat{\mathbf{M}} + i\omega \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{K}})^{-1} \hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{I}} A(\omega) \quad (16)$$

### 2.2 独立模态的频域分析

由上述同理可得, 主支撑结构的广义位移和悬挂子结构相对于主支撑结构的广义位移傅氏谱为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}(\omega) \\ \mathbf{v}(\omega) \end{bmatrix} = - \left\{ -\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{E} + \Phi^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{P} \Phi & \Phi^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} \Psi \\ \Psi^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{P} \Phi & \bar{\mathbf{E}} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} \bar{\Xi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Omega} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma + \Phi^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{I}} \\ \Psi^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{I}} \end{bmatrix} A(\omega) \quad (17)$$

求解式(17), 主支撑结构的广义位移傅氏谱为

$$\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{H}_q \mathbf{I} A(\omega) \quad (18)$$

式中:  $\mathbf{H}_q = \mathbf{B} \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{B} = \{-\omega^2 [\mathbf{E} + \Phi^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} + \Phi^T \mathbf{P}^T \omega^2 \bar{\mathbf{M}} \Psi (-\omega^2 \bar{\mathbf{E}} + i\omega \bar{\Xi} + \bar{\Omega})^{-1} \Psi^T \bar{\mathbf{M}}] \mathbf{P} \Phi + i\omega \bar{\Xi} + \bar{\Omega}\}^{-1}$ ,  $\mathbf{C} = -\Phi^T \{\mathbf{M} + \mathbf{P}^T [\bar{\mathbf{M}} + \omega^2 \bar{\mathbf{M}} \Psi (-\omega^2 \bar{\mathbf{E}} + i\omega \bar{\Xi} + \bar{\Omega})^{-1} \Psi^T \bar{\mathbf{M}}]\}$ 。式(18)的分析与简化见第3节。各个悬挂子结构相对于主支撑结构的广义位移傅氏谱为

$$\mathbf{v}(\omega) = -(-\omega^2 \bar{\mathbf{E}} + i\omega \bar{\Xi} + \bar{\Omega})^{-1} \cdot \Psi^T \bar{\mathbf{M}} [\mathbf{I} A(\omega) - \omega^2 \mathbf{P} \Phi \mathbf{q}(\omega)] \quad (19)$$

由式(19)可知: 悬挂子结构的振动激励包括地震动激励和主支撑结构地震加速度响应两部分, 即悬挂子结构的振动激励为经主支撑结构滤波后的地震动激励。

悬挂子结构相对主支撑结构的位移傅氏谱为

$$\mathbf{z}(\omega) = \Psi \mathbf{v}(\omega) \quad (20)$$

悬挂子结构相对地面的位移傅氏谱为

$$\bar{\mathbf{x}}(\omega) = \mathbf{P} \Phi \mathbf{q}(\omega) + \Psi \mathbf{v}(\omega) \quad (21)$$

主支撑结构位移傅氏谱为

$$\mathbf{x}(\omega) = \Phi \mathbf{q}(\omega) \quad (22)$$

## 3 独立模态之间的相互关系

悬挂子结构系统的传递函数矩阵为

$$\bar{\mathbf{H}}(\omega) = (-\omega^2 \bar{\mathbf{M}} + j\omega \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}})^{-1} \bar{\mathbf{M}} = \Psi (-\omega^2 \bar{\mathbf{E}} + j\omega \bar{\Xi} + \bar{\Omega})^{-1} \Psi^T \bar{\mathbf{M}} \quad (23)$$

将式(23)代入式(18), 并且  $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{E}$ ,  $\Gamma = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{I}$ , 式(18)中的  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  分别变换为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \{-\omega^2 \Phi^T [\mathbf{M} + \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} (\bar{\mathbf{E}} + \omega^2 \bar{\mathbf{H}}(\omega) \mathbf{P})] \cdot \\ &\quad \Phi + i\omega \bar{\Xi} + \bar{\Omega}\}^{-1} \\ \mathbf{C} &= -\Phi^T [\mathbf{M} + \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} (\bar{\mathbf{E}} + \omega^2 \bar{\mathbf{H}}(\omega))] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

主支撑结构无悬挂子结构的各阶广义位移的傅氏谱为

$$\mathbf{q}(\omega) = -\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{I} A(\omega) / (-\omega^2 \Phi^T \mathbf{M} \Phi + i\omega \Phi^T \mathbf{C} \Phi + \Phi^T \mathbf{K} \Phi) = -\Gamma A(\omega) / (-\omega^2 \mathbf{E} + i\omega \bar{\Xi} + \bar{\Omega}) \quad (25)$$

与主支撑结构悬挂子结构的各阶广义位移的傅氏谱比较可知: 质量矩阵  $\mathbf{M}$  被  $\mathbf{M} + \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} [\mathbf{E} + \omega^2 \bar{\mathbf{H}}(\omega)] \mathbf{P}$  替换, 其中的第二项  $\mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}} [\mathbf{E} + \omega^2 \bar{\mathbf{H}}(\omega)] \mathbf{P}$  为悬挂子结构自身特征参数的函数, 即悬挂子结构的质量、固有频率、阻尼比的函数, 而与主支撑结构的特征参数无关。令复惯性质量为

$$\mathbf{M}' = \bar{\mathbf{M}} [\bar{\mathbf{E}} + \omega^2 \bar{\mathbf{H}}(\omega)] \quad (26)$$

式(26)表征悬挂子结构的惯性质量向主支撑结构的传递, 可以分解为两项:  $\bar{\mathbf{M}} \mathbf{E}$  表征悬挂子结构将所受到的地面加速度直接向主支撑结构的传递,  $\bar{\mathbf{M}} \omega^2 \bar{\mathbf{H}}$

( $\omega$ )则是悬挂子结构共振作用向主支撑结构的传递。由于  $\bar{M}\omega^2\bar{H}(\omega)$  的存在,悬挂子结构复惯性质量为复数形式。悬挂子结构系统的复惯性质量矩阵通过设置矩阵  $\mathbf{P}$  凝聚到主支撑结构的各个悬挂节点上,主支撑结构各个节点的质量也发生变化,所以式(18)可以表达为

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\omega) = & -\Phi^T(\mathbf{M} + \mathbf{P}^T\mathbf{M}'\mathbf{P})\mathbf{I}\mathbf{A}(\omega)/ \\ & [-\omega^2\Phi^T(\mathbf{M} + \mathbf{P}^T\mathbf{M}'\mathbf{P})\Phi + i\omega\Phi^T\mathbf{C}\Phi + \\ & \Phi^T\mathbf{K}\Phi] = -(\mathbf{I} + \Phi^T\mathbf{P}^T\mathbf{M}'\mathbf{P}\mathbf{I})\mathbf{A}(\omega)/ \\ & [-\omega^2(\mathbf{E} + \Phi^T\mathbf{P}^T\mathbf{M}'\mathbf{P}\Phi) + i\omega\mathbf{\Xi} + \mathbf{\Omega}] \quad (27) \end{aligned}$$

式(27)显示其振型参与系数、分母中与质量有关的项均被修改,而阻尼项和刚度项则保持不变。明显地,在地震荷载作用下,作用于主支撑结构的地震动激励作用为主支撑结构本身质量和悬挂于其上的悬挂子结构复惯性质量两者的地震动激励作用之和。复惯性质量的静态质量、频率特征和相位角的大小均影响着主支撑结构的地震响应。

通过设置矩阵  $\mathbf{P}$  凝聚后的悬挂子结构的复惯性质量在不同阻尼系数(采用比例阻尼,前 2 阶阻尼比相同)时的绝对值和相位角,如图 1、2 所示。悬挂子结构的参数见表 1。随着悬挂子结构的各阶阻尼比的增大,悬挂子结构复惯性质量绝对值减小,这是因为悬挂子结构共振作用减小的缘故;同时相位角也随之减小。值得注意的是,悬挂子结构复惯性质量的相位角为负数,即在同一地震动激励下,悬挂子结构的运动滞后于主支撑结构。

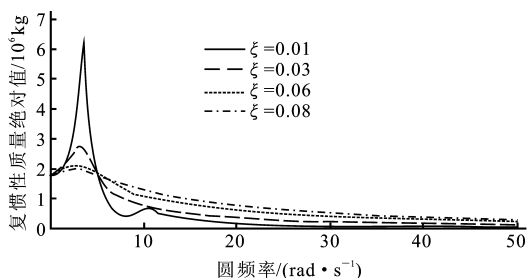


图 1 悬挂子结构复惯性质量绝对值随圆频率的变化

Fig. 1 Variation of Absolute Value of Suspension Secondary Structure Complex Inertia Mass vs Circular Frequency

## 4 悬挂结构系统与 TMD/MTMD 被动控制系统的比较

一般情况下,阻尼比越大悬挂子结构复惯性质量绝对值越小,对主支撑结构的反作用力越小,这是因为阻尼越大共振作用越小,导致复惯性质量第二项变小的缘故;阻尼比越大复惯性质量的相位角越小。由复数加法的性质可知:随着相位角的减小,悬

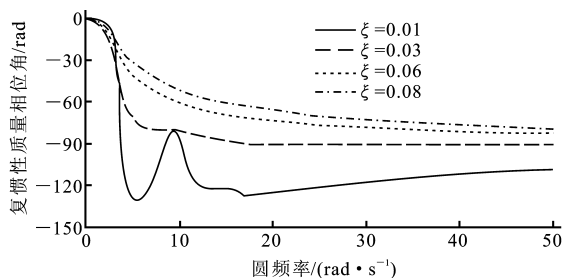


图 2 悬挂子结构复惯性质量相位角随圆频率的变化

Fig. 2 Variation of Phase Angle of Suspension Secondary Structure Complex Inertia Mass vs Circular Frequency

挂子结构提供的反作用和主支撑结构自身所受地震动激励作用合力的模值将增大。在自振频率处复惯性质量绝对值最大,即各个悬挂子结构在其自振频率处对主支撑结构的反作用力最大。

对于 TMD/MTMD 被动控制系统而言,悬挂子结构为 TMD/MTMD,由于它的质量远远小于主支撑结构的质量(为其 1% 左右),并且 TMD/MTMD 的调频范围有限,因此,TMD/MTMD 对主支撑结构运动特性的影响仅仅局限于某些需要控制的频段上。为得到较大的控制作用,TMD/MTMD 的自振频率控制在主支撑结构的自振频率段上;同时,阻尼系数取值越小,即保证复惯性质量幅值越大,与主支撑结构的相位角越大,主支撑结构本身质量和悬挂于其上的 TMD/MTMD 复惯性质量两者的地震动激励作用之和则越小<sup>[6-8]</sup>。

对于悬挂结构系统而言,悬挂子结构的质量大于主支撑结构的质量,调频范围相对较宽,因此悬挂子结构对原主支撑结构运动特性的影响较大。这些影响主要来自复惯性质量的静态质量、频率特征和相位角。为避免系统发生类共振现象,以及避免悬挂子结构对主支撑结构产生较大的反作用力,悬挂子结构和主支撑结构的自振频率应该分离。

## 5 数值仿真

相同的悬挂子结构被悬挂于主支撑结构的各层。主支撑结构和悬挂子结构的参数见表 1,其中模型 1 的模态频率远离悬挂子结构的模态频率,模型 2 的第一阶模态频率在悬挂子结构第二、三阶模态频率之间,模型 3 的第一阶模态频率在悬挂子结构第一、二阶模态频率之间,第二阶模态频率在悬挂子结构第二、三阶模态频率之间。主支撑结构和悬挂子结构均采用比例阻尼,主支撑结构的第一、二阶阻尼比均取 0.02。

### 5.1 频域模拟

根据式(18)、(19),令  $A(\omega)=1$ ,可以获得主支

撑结构和悬挂子结构的频域传递函数幅值随圆频率变化,如图 3 所示。

对于主支撑结构:

(1)其频域传递函数的突起峰都移到悬挂子结构的模态频率附近(主支撑结构的动态特性受悬挂子结构的动态特性的调制);

(2)随着悬挂子结构阻尼比的增大,低频处突起峰的峰值降低,高频处的突起峰消失,其他圆频率处

的幅值则增加,频域传递函数曲线所围的面积增大;

(3)随着悬挂子结构阻尼比的增大,各阶频域传递函数低频处的突起峰向高频方向移动。

对于悬挂子结构:

(1)主支撑结构作用对模型 3 的影响最大,对模型 1 的影响最小,模态频率重叠越少悬挂子结构受主支撑结构的影响越小;

(2)随着悬挂子结构阻尼比增大,低频处突起峰

表 1 悬挂结构参数  
Tab. 1 Parameters of Suspension Structure

地 层 号	模态 阶数	主支撑结构									悬挂子结构		
		模型 1			模型 2			模型 3					
		等效侧移刚度/ (10 <sup>9</sup> kN·m <sup>-1</sup> )	等效质量/ 10 <sup>5</sup> kg	模态频率/ (rad·s <sup>-1</sup> )	等效侧移刚度/ (10 <sup>8</sup> kN·m <sup>-1</sup> )	等效质量/ 10 <sup>5</sup> kg	模态频率/ (rad·s <sup>-1</sup> )	等效侧移刚度/ (10 <sup>8</sup> kN·m <sup>-1</sup> )	等效质量/ 10 <sup>5</sup> kg	模态频率/ (rad·s <sup>-1</sup> )	等效侧移刚度/ (10 <sup>7</sup> kN·m <sup>-1</sup> )	等效质量/ 10 <sup>5</sup> kg	模态频率/ (rad·s <sup>-1</sup> )
1	一	4.5	5.72	29.564 6	7.605	5.72	12.153 9	4.5	5.72	9.349 1	4.0	6	3.673 8
2	二	3.8	5.72	94.668 7	6.422	5.72	38.917 9	3.8	5.72	29.937 0	4.2	6	10.345 3
3	三	3.8	1.20	145.353 5	6.422	1.20	59.754 3	3.8	1.20	45.965 0	4.2	6	15.038 1

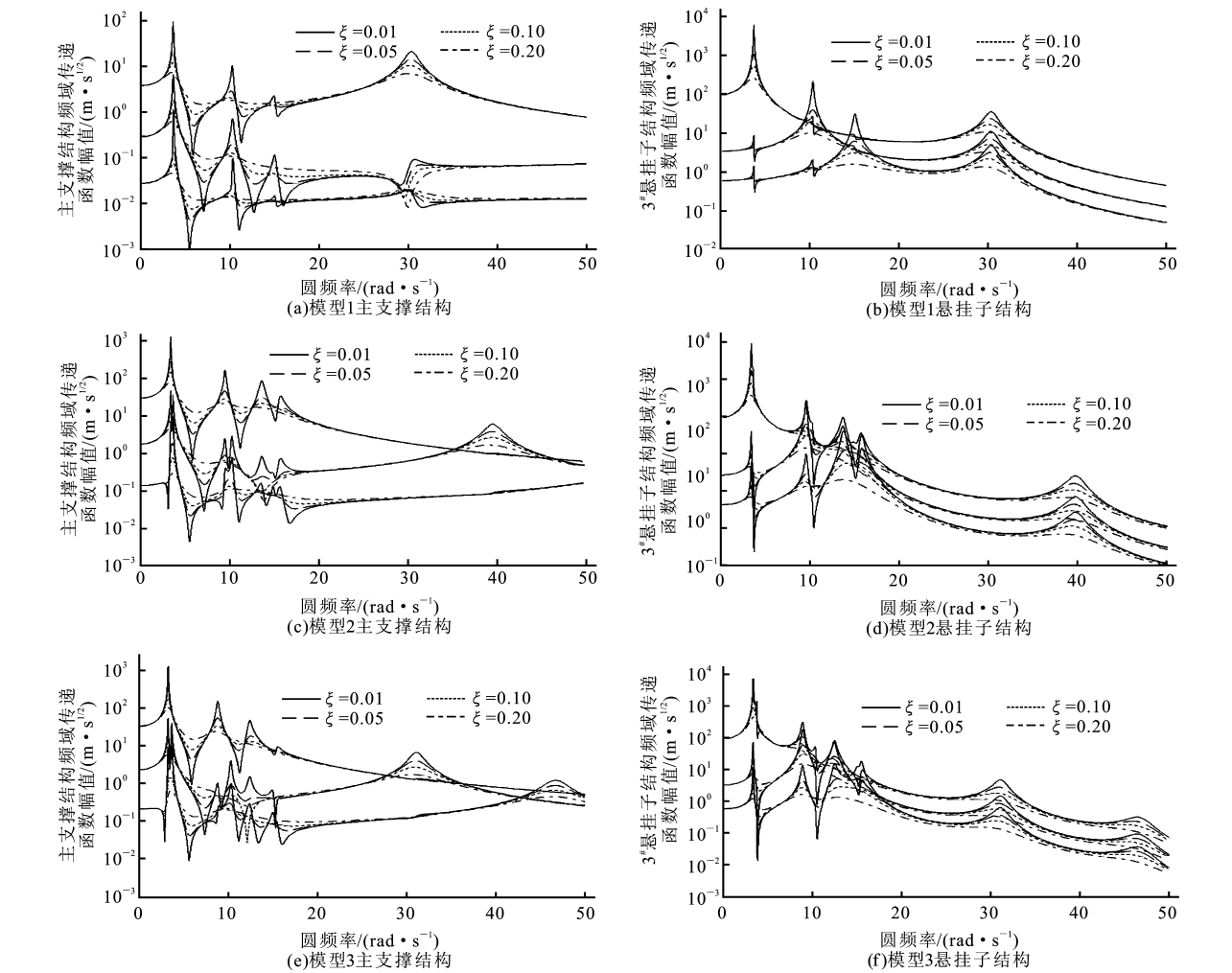


图 3 频域传递函数幅值随圆频率的变化

Fig. 3 Variation of Amplitude of Frequency Domain Transfer Function vs Circular Frequency

的峰值降低,高频处的突起峰消失,其他圆频率处的幅值也降低,频域传递函数曲线所围的面积减小;

(3)随着悬挂子结构阻尼比的增大,各阶频域传递函数低频处的突起峰向低频方向移动。

因为随着悬挂子结构阻尼比的增大,悬挂子结构各阶频域传递函数低频处的突起峰向低频方向移动,而主支撑结构各阶频域传递函数低频处的突起峰向高频方向移动,所以调整悬挂子结构阻尼比时必须避免类共振现象的出现。

### 5.2 时域模拟

根据式(6),应用 Wilson- $\theta$  法( $\theta=1.37$ ),输入的地震波为 24 s 的组合地震波:0~12 s 为 El Centro 40 NS 地震波,12~24 s 的加速度幅值为 0,时间步长为 0.02。在线弹性范围对模型 1(悬挂子结构的阻尼比取为  $\zeta=0.45$ )、模型 2( $\zeta=0.36$ )、模型 3( $\zeta=0.38$ )进行了时程分析,各个质点相对于地面的加速度和位移时程分析结果如图 4~9 所示。从图 4~9 可知:悬挂子结构的加速度、位移与主支撑结构的加速度、位移方向相反;主支撑结构的位移和加速度时程中的高频成分较悬挂子结构丰富;0~12 s 的 El Centro 40 NS 地震波结束后,主支撑结构和悬挂子结构作较长时间的衰减运动。

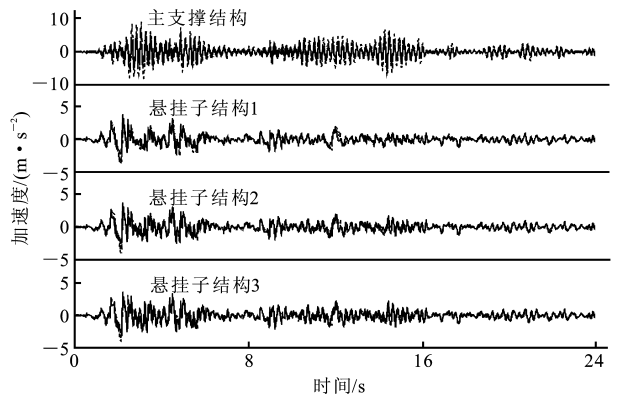


图 4 模型 1 加速度时程

Fig. 4 Time-History of Acceleration of Model 1

## 6 结 语

通过对悬挂结构系统的时频分析,以及对悬挂子结构和主支撑结构基于各自独立模态的频域分析获得以下结论:

(1)悬挂结构系统的运动特征原理与 TMD/MTMD 相同,而减震原理与 TMD/MTMD 不同。

(2)因为悬挂子结构的质量大于或者近似等于主支撑结构的质量,地震动激励下,主支撑结构的动

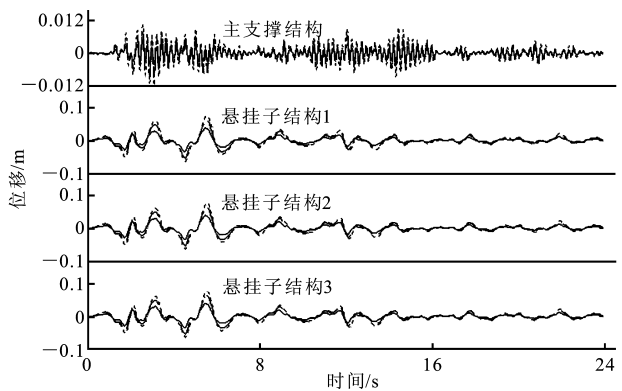


图 5 模型 1 位移时程

Fig. 5 Time-History of Displacement of Model 1

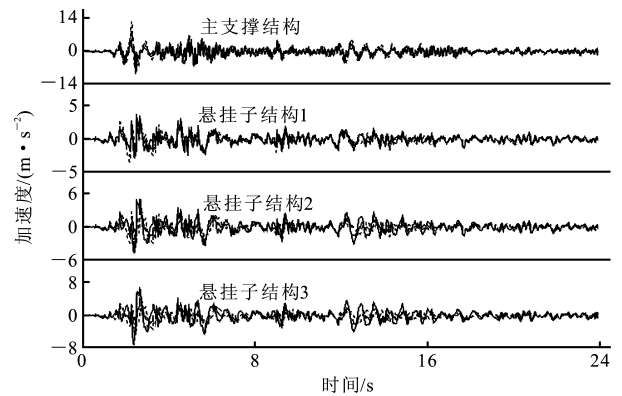


图 6 模型 2 加速度时程

Fig. 6 Time-History of Acceleration of Model 2

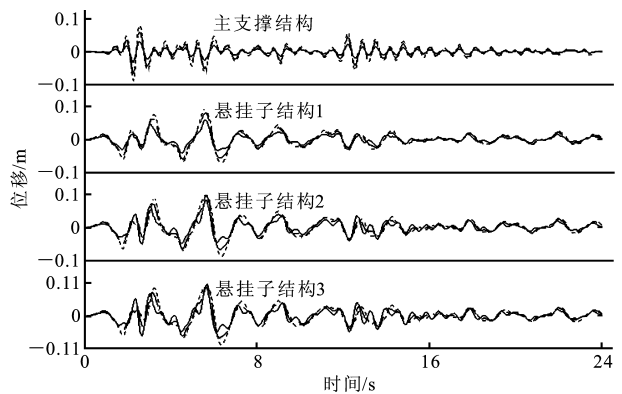


图 7 模型 2 位移时程

Fig. 7 Time-History of Displacement of Model 2

态特性受悬挂子结构动态特性的调制,其影响较大;主支撑结构的各阶频域传递函数的峰值移到悬挂子结构的模态频率附近,其幅值与原主支撑结构的函数的峰值在同一数量级。

(3)悬挂子结构和主支撑结构的模态频率重叠得越少,悬挂结构系统越稳定。

(4)控制悬挂子结构的阻尼比可以减小悬挂子结构地震响应,但是对主支撑结构的地震响应则是

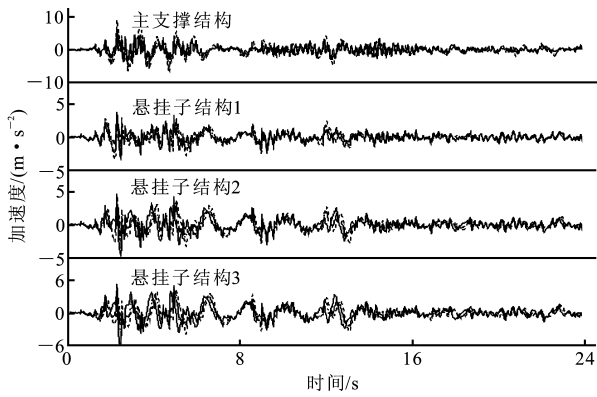


图8 模型3加速度时程

Fig. 8 Time-History of Acceleration of Model 3

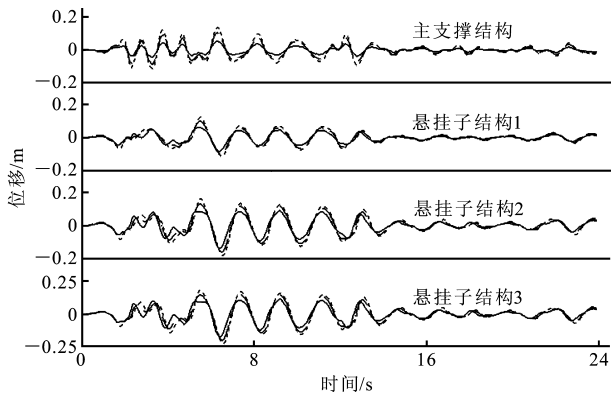


图9 模型3位移时程

Fig. 9 Time-History of Displacement of Model 3

先降后升;达一定阻尼比时,两者运动相互调制发生类共振,地震响应急剧增加。

(5)悬挂子结构对主支撑结构的动态作用可以归结为在主支撑结构上添加悬挂子结构的复惯性质量;主支撑结构对悬挂子结构的动态作用可以归结为对悬挂子结构施加经主支撑结构滤波后的地震动激励。

#### 参考文献:

#### References:

[1] 刘郁馨,吕志涛. 悬挂建筑框架结构弹性稳定性估算方法[J]. 工程力学,1997,14(4):29-37.  
LIU Yu-xin, LU Zhi-tao. Elastic Stability Analysis for Frames in Suspended Buildings[J]. Engineering Mechanics,1997,14(4):29-37.

[2] 王肇民,邓洪洲,董军. 高层巨型框架悬挂结构体系抗震性能研究[J]. 建筑结构学报,1999,20(1):23-30.  
WANG Zhao-min, DENG Hong-zhou, DONG Jun. A Study of Aseismic Properties of Huge Frame Suspended Structure in Tall Buildings[J]. Journal of Building Structures,1999,20(1):23-30.

[3] 张耀华,梁启智. 巨型框架悬挂体系抗震原理及初步设计方法[J]. 工程力学,2000,17(3):10-17.  
ZHANG Yao-hua, LIANG Qi-zhi. The Earthquake Resistant Philosophy and Initial Design of Megaframe with Suspension Systems[J]. Engineering Mechanics, 2000,17(3):10-17.

[4] 史庆轩,杨文星,门进杰. 单自由度体系非线性地震能量反应的计算[J]. 建筑科学与工程学报,2005,22(2):25-29.  
SHI Qing-xuan, YANG Wen-xing, MEN Jin-jie. Calculation of Seismic Energy Response for Nonlinear Single Degree of Freedom System[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering,2005,22(2):25-29.

[5] 沈蒲生,刘杨. 水平地震作用下框支剪力墙结构的变形研究[J]. 建筑科学与工程学报,2005,22(1):58-63.  
SHEN Pu-sheng, LIU Yang. Distortion Research of Shear Wall Structure Supported on Frame Under Earthquake Actions[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering,2005,22(1):58-63.

[6] GIUSEPPE M. Dynamic Response of Multiply Connected Primary-Secondary Systems[J]. Earthquake Engineering and Structure Dynamics, 1990, 19(2):205-216.

[7] 涂文戈,邹银生. MTMD 减震结构体系的频域分析[J]. 工程力学,2003,20(3):78-89.  
TU Wen-ge, ZOU Yin-sheng. Analysis of Multistory Structures with MTMD in Frequency Domain[J]. Engineering Mechanics,2003,20(3):78-89.

[8] 涂文戈,邹银生. MTMD 对建筑结构多模态控制的减震分析[J]. 地震工程与工程振动,2003,23(5):174-179.  
TU Wen-ge, ZOU Yin-sheng. Study on Multistory Structures with Multi-mode Control of MTMD[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2003,23(5):174-179.