

文章编号:1673-2049(2006)02-0057-05

# 脉动风速互随机 Fourier 谱函数

张琳琳, 李 杰

(同济大学 建筑工程系, 上海 200092)

**摘要:**为了在随机 Fourier 谱中考虑风场的空间相关性, 首先在经验物理关系的意义上定义了互随机 Fourier 谱, 其表达式由两个随机过程的随机 Fourier 谱和一个可以反映风场空间相关性的随机相干函数组成; 然后, 利用现场实测风速资料, 研究并建立了实际风场的随机相干函数的经验物理模型; 最后, 基于假设检验理论, 确定了互随机 Fourier 谱函数中基本随机参数及其概率密度信息。实例表明, 建立的互随机 Fourier 谱函数可以在概率的意义上很好地表征实际风场的空间相关性。

**关键词:**互随机 Fourier 谱; 相干函数; 地面粗糙度; 基本风速

**中图分类号:**TU973.32

**文献标志码:**A

## Cross Stochastic Fourier Spectrum Function of Turbulence Wind Velocity

ZHANG Lin-lin, LI Jie

(Department of Architectural Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** In order to consider the spatial correlation of wind field within the stochastic Fourier spectrum, cross stochastic Fourier spectrum was defined on the basis of the meaning of empirical physical relationship. The formula of the cross stochastic Fourier spectrum consisted of two stochastic Fourier spectrum functions of two stochastic processes and their stochastic coherence function, which could be used to reflect the spatial correlation of wind field. Then, the empirical physical model of the stochastic coherence function of real wind field was researched and established by means of the real wind field data. Finally, the basic parameters and their probability density functions within the stochastic coherence function were determined based on the hypothesis testing theory. It is demonstrated that the proposed cross stochastic Fourier spectrum function can represent the spatial correlation very well in terms of probability.

**Key words:** cross stochastic Fourier spectrum; coherence function; ground roughness degree; basic wind velocity

## 0 引 言

在结构设计中, 风荷载是必须考虑的动力荷载<sup>[1-2]</sup>。对于高层建筑结构、高耸结构和大跨度桥梁结构, 有时风荷载对结构安全甚至起决定性作用。作用在这些结构上的随机风场通常被考虑成多维的随机过程。空间中任意两点的脉动风速之间存在不同程度的相关性, 这种相关性与两点间连线相对于

风向的方位有关, 也与湍流的特性范围有关<sup>[3]</sup>。

在传统的随机过程理论中, 功率谱密度函数被用来反映随机过程的概率特征。由于功率谱密度函数是由平稳随机过程的相关函数通过 Fourier 变换得到, 因此它本质上是随机过程在频域内的数值特征反映, 无法揭示随机过程具有随机性的物理原因。在风工程中, 已经提出了众多的脉动风速谱, 如 Davenport 谱、Von Karman 谱、Simiu 谱等。在原

收稿日期: 2006-01-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(50321803)

作者简介: 张琳琳(1979-), 男, 山东临清人, 工学博士研究生, E-mail: fatlinwang@163.com。

理上,这些模型都是在 Kolmogrove 湍流理论公式的基础上,通过选取不同的实测脉动风速样本拟合得到的,在本质上是一种经验物理关系。若脉动风速样本发生改变,所获得的功率谱密度函数将会发生变化,这也正是上述模型往往无法与某一特定地理环境的风谱相吻合的根本原因。为了实现对风场随机性的物理解释,笔者近年来从随机样本和随机函数的角度出发进行了新的探索,将时域内的随机样本经 Fourier 变换得到的 Fourier 谱集合视为随机函数,提出了随机 Fourier 谱的概念。由于在这样一种反映方式中引入了具有物理意义的基本随机变量,从更本源的意义解释了随机过程之所以产生的物理原因。在这一研究的基础上,为了在随机 Fourier 谱中考虑风场的空间相关性,本文中进一步在经验物理关系的层面上提出了互随机 Fourier 谱的概念,它由两个随机过程的随机 Fourier 谱和随机相干函数获得,其中的随机相干函数用来反映风场的空间相关性。利用实测风速资料结合上述模型进行建模,证实了本文中提出的互随机 Fourier 谱能够很好地反映实际风场的随机特性。研究表明,建议模型中的基本随机变量:地面粗糙度、10 m 高平均风速、指数衰减系数和常数分别服从对数正态分布、极值 I 型分布和正态分布。

## 1 经验物理关系

按照获得的方法不同,客观物理关系可以分为经验物理关系与理论物理关系。经验物理关系是指通过观察与归纳,利用定性的物理关系和数学方法导出的经验表达式。一般而言,在传统研究范畴内,经验物理关系在不同程度上反映了物理现象之间的均值联系。

风工程中普遍采用的风谱函数(Davenport 谱、Simiu 谱、Von Karman 谱等),本质上属于经验物理关系。它们的研究基础多源于由 Kolmogrove 假说推论给出的纵向脉动风功率谱的一般表达式,即

$$\frac{nS(z, n)}{u_*^2} = \frac{Af^\gamma}{(1 + Bf^\alpha)^\beta} \quad (1)$$

式中: $n$  为频率; $u_*$  为剪切波速; $f$  为莫宁坐标或相似律坐标; $A$ 、 $B$  为常数; $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  为谱的幂指数,且满足  $\gamma - \alpha\beta = 2/3$ 。

各国学者对脉动风功率谱密度的一般表达式(1)进行了大量研究,基于不同的实测数据,对其中的参数  $A$ 、 $B$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  进行了标定,提出了多个不同形式的脉动风谱。例如 Davenport 谱就是通过

拟合在世界不同地区、不同高度测得的 90 多次强风记录得到的<sup>[4]</sup>,因此,Davenport 谱在本质上是一种经验物理关系,在某种程度上反映了随机风场功率谱的均值特性。如何在经验物理关系的总结过程中,充分地反映随机性的影响,即是笔者致力研究的内容。

## 2 脉动风速的交叉谱和相干函数

在风工程中,用空间中任意两点  $M_1$  和  $M_2$  处的脉动风速记录的交叉谱度量两者的相关程度,即<sup>[5]</sup>

$$S_{u_1 u_2}^{\text{cr}}(r, \omega) = S_{u_1 u_2}^{\text{C}}(r, \omega) + iS_{u_1 u_2}^{\text{Q}}(r, \omega) \quad (2)$$

式中: $i = \sqrt{-1}$ ;  $\omega$  为圆频率; $S_{u_1 u_2}^{\text{C}}(r, \omega)$ 、 $S_{u_1 u_2}^{\text{Q}}(r, \omega)$  分别为互谱、正交谱,下标  $u_1$  和  $u_2$  表示这两个记录分别在  $M_1$  和  $M_2$  两点处取得, $r$  为两点之间距离。

相干函数定义为<sup>[6]</sup>

$$[\text{coh}(r, \omega)]^2 = c_{u_1 u_2}^2(r, \omega) + q_{u_1 u_2}^2(r, \omega) \quad (3)$$

$$c_{u_1 u_2}^2(r, \omega) = \frac{[S_{u_1 u_2}^{\text{C}}(r, \omega)]^2}{S(z_1, \omega)S(z_2, \omega)} \quad (4)$$

$$q_{u_1 u_2}^2(r, \omega) = \frac{[S_{u_1 u_2}^{\text{Q}}(r, \omega)]^2}{S(z_1, \omega)S(z_2, \omega)} \quad (5)$$

式中: $c_{u_1 u_2}$  为折算互谱; $S(z_1, \omega)$ 、 $S(z_2, \omega)$  分别为  $M_1$  和  $M_2$  两点处的纵向脉动速度谱。

研究表明:正交谱与互谱的比值非常小,因此工程应用时可以假设相干函数的平方根近似等于折算互谱  $c_{u_1 u_2}$ 。根据风洞试验结果,在工程计算中可以假设<sup>[7]</sup>

$$S_{u_1 u_2}(r, \omega) = S_{u_1 u_2}^{\text{C}}(r, \omega) = \sqrt{S(z_1, \omega)S(z_2, \omega)} \exp\{-\hat{f}\} \quad (6)$$

Davenport 提出了著名的相干函数(又称窄带交叉相关函数)的平方根表达式<sup>[8]</sup>

$$\text{coh}(r, \omega) = \exp\{-\hat{f}\} \quad (7)$$

$$\hat{f} = \frac{|\omega| [C_{1z}^2(z_1 - z_2)^2 + C_{1y}^2(y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}}{2\pi U_{10}} \quad (8)$$

或

$$\hat{f} = \frac{|\omega| [C_z^2(z_1 - z_2)^2 + C_y^2(y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}}{\pi [U(z_1) + U(z_2)]} \quad (9)$$

式中: $(y_1, z_1)$  与  $(y_2, z_2)$  分别为  $M_1$  和  $M_2$  两点的坐标,假定  $M_1$ 、 $M_2$  连线与平均风速的方向垂直; $U_{10}$  为  $z = 10$  m 处的风速;指数衰减系数  $C_y$ 、 $C_z$  ( $C_{1y}$ 、 $C_{1z}$ ) 由试验确定; $U(z_1)$  和  $U(z_2)$  分别为  $M_1$  和  $M_2$  两点处的平均风速,可由  $U_{10}$  按照对数律换算得到

$$U(z_1) = U_{10} \frac{\ln(z_1/z_0)}{\ln(10/z_0)} \quad (10)$$

$$U(z_2) = U_{10} \frac{\ln(z_2/z_0)}{\ln(10/z_0)} \quad (11)$$

式中:  $z_0$  为地面粗糙度。

值得指出的是,由于  $U(z_1)$  和  $U(z_2)$  是 10 m 高平均风速和地面粗糙度  $z_0$  的函数,而  $U_{10}$  和  $z_0$  在本质上均是随机变量,因此式(7)表达的相干函数本质上也具有随机性,但是在以往的风工程研究应用时,将 10 m 高平均风速和地面粗糙度  $z_0$  均取为确定性的数值,相应的数值取为它们在给定地理环境下的均值,再加上确定性的风谱(Davenport 谱),式(6)给出的互功率谱密度函数实际上是对风场在某种程度上的均值反映。

### 3 脉动风速的互随机 Fourier 谱

参照互功率谱密度函数的定义,定义互随机 Fourier 谱为

$$F_{u_1 u_2}(z_0, U_{10}, \omega) = \frac{1}{T} |F_{u_1}(z_0, U_{10}, \omega)| \cdot |F_{u_2}(z_0, U_{10}, \omega)| \gamma_{u_1 u_2}(\omega) \quad (12)$$

式中:  $T$  为脉动风速持时;  $|F_{u_1}(z_0, U_{10}, \omega)|$  和  $|F_{u_2}(z_0, U_{10}, \omega)|$  分别为  $M_1$  和  $M_2$  两点处的随机 Fourier 谱,可由风速资料统计确定;  $\gamma_{u_1 u_2}(\omega)$  为相干函数,其表达式在经典相干函数研究基础上加以修正得到

$$\gamma_{u_1 u_2}(\omega) = C_1 \exp\{-f\} \quad (13)$$

式中:  $C_1$  为常系数。

由于式(12)中的基本物理量  $z_0$  和  $U_{10}$  为随机变量,且常系数项和指数衰减系数也视为随机变量,因此式(13)中给出的相干函数是随机相干函数。

## 4 互随机 Fourier 谱建模

### 4.1 风速资料

本文中选用的风速资料为中国某大桥桥址处的实测风速资料,包括空间中同一竖直方向上的两个高度(30、50 m)处的风速资料,测量时间为 616 h,采样频率为 4 Hz。实际计算中,将风速资料按照 10 min 分割为 3 696 个样本,每个样本有 2 400 个数据点;然后剔除无效样本,其原则有:

(1) 判断主风向平均风速是否大于  $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 如果是,则保留;否则剔除。

(2) 判断同一时段内 50 m 高主风向平均风速是否大于 30 m 高主风向平均风速,如果是,则保留;否则剔除。

经过处理,30 m 高测点和 50 m 高测点各有

310 个样本满足以上要求。

### 4.2 基本随机参数的概率分布

在上述 310 个子样本基础上,首先进行随机 Fourier 谱的建模,得到表达式如下

$$|F_u(n)| = \frac{172 U_{10}^{\frac{4}{5}} n^{-\frac{1}{5}}}{\ln(10/z_0) [1 + 34\,876(n/U_{10})^{\frac{9}{5}}]^{\frac{1}{3}}} \quad (14)$$

式中:  $n$  为频率,其与圆频率  $\omega$  的转换关系为  $n = \frac{\omega}{2\pi}$ 。地面粗糙度  $z_0$  和 10 m 高平均风速服从的概率密度函数为

$$f(z_0) = \frac{1}{4.618 z_0} \exp\left\{-\frac{(\ln z_0 + 3.541)^2}{6.790}\right\} \quad (15)$$

$$f(U_{10}) = 1.19 \exp\{-1.19(U_{10} - 5.13)\} \cdot \exp\{-\exp[-1.19(U_{10} - 5.13)]\} \quad (16)$$

### 4.3 指数衰减系数

#### 4.3.1 计算原理

由于本文中采用的实测风速资料是由布置在同一竖直方向上的两个不同高度点处的风速仪测量得到的,因此相干函数仅保留了高度方向的指数衰减系数  $C_z$ ,考虑到  $\omega$  的非负性,式(13)可简化为

$$\gamma_{u_1 u_2}(\omega) = C_1 \exp\left\{-\frac{\omega C_z |z_1 - z_2|}{\pi [U(z_1) + U(z_2)]}\right\} \quad (17)$$

为了便于求解,可以在方程两端取对数,将式(17)转换为线性形式

$$\ln C_1 - \frac{|z_1 - z_2| \omega}{\pi [U(z_1) + U(z_2)]} C_z = \ln[\gamma_{u_1 u_2}(\omega)] \quad (18)$$

事实上,对于给定的一组实测数据,式(18)中  $-\frac{|z_1 - z_2| \omega}{\pi [U(z_1) + U(z_2)]} C_z$  为一常数,若  $\omega$  为一向量,则式(18)是一个非线性方程组。通过求解这一非线性方程组,即可求出相应的指数衰减系数  $C_z$  和常系数  $C_1$ 。

#### 4.3.2 数理统计

对于选定的风速资料,式(18)中  $z_1$  和  $z_2$  分别为 30 m 和 50 m,  $U(z_1)$  和  $U(z_2)$  变为  $U_{30}$  和  $U_{50}$ ,则式(18)可以写成

$$\ln C_1 - \frac{20\omega}{\pi(U_{30} + U_{50})} C_z = \ln[\gamma_{u_1 u_2}(\omega)] \quad (19)$$

式中:  $\gamma_{u_1 u_2}$ 、 $U_{30}$ 、 $U_{50}$  均可以根据实测资料计算得到;指数衰减系数  $C_z$  为未知量。

对整理获得的 310 组样本(每组样本包括 30 m 和 50 m 处的风速时程)进行计算,可以获得实测资料的  $\gamma_{u_1 u_2}$ 、 $U_{30}$ 、 $U_{50}$  的具体数据。事实上,求解非线性方程式(19)等价于多项式拟合问题,利用实测资料可以求得每个样本的指数衰减系数  $C_z$  和常系数

$C_1$ , 由此组成指数衰减系数  $C_z$  和常系数  $C_1$  的样本集合; 然后, 利用数理统计方法, 可以得到实测风速资料指数衰减系数  $C_z$  和常系数  $C_1$  的数值特征信息, 其中指数衰减系数  $C_z$  的均值为 0.030 2、标准差为 0.041 9; 常系数  $C_1$  的均值为 0.492、标准差为 0.033 5。图 1、2 分别为实测风速资料指数衰减系数  $C_z$  和常系数  $C_1$  的概率密度柱状图。

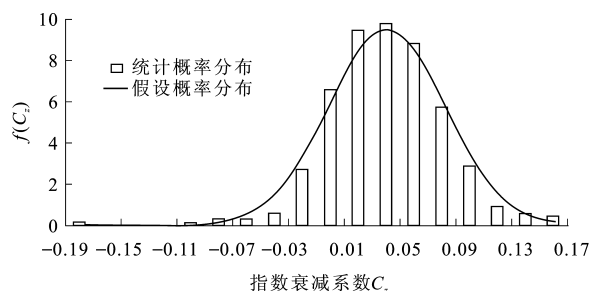


图 1 实测风速资料指数衰减系数的概率密度

Fig. 1 Probability Density of Exponential Damping Coefficient of Observational Wind Velocity Data

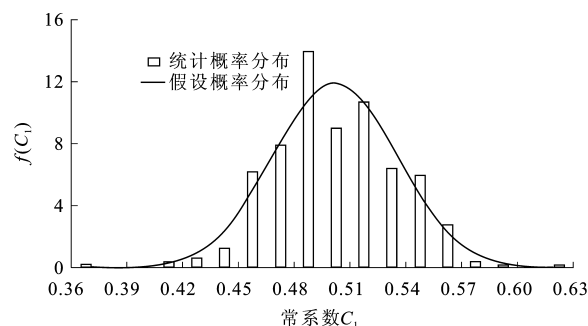


图 2 实测风速资料常系数的概率密度

Fig. 2 Probability Density of Constant Coefficient of Observational Wind Velocity Data

根据图 1、2, 可以假设指数衰减系数  $C_z$  和常系数  $C_1$  均服从正态分布, 其概率密度函数分别为

$$f(C_z) = \frac{1}{0.105} \exp\left\{-\frac{(C_z - 0.030\ 2)^2}{0.003\ 51}\right\} \quad (20)$$

$$f(C_1) = \frac{1}{0.084} \exp\left\{-\frac{(C_1 - 0.492)^2}{0.002\ 24}\right\} \quad (21)$$

采用 Kolmogrove 假设检验方法<sup>[9]</sup>, 计算指数衰减系数  $C_z$  和常系数  $C_1$  的经验分布函数  $F_n$  与假定的理论分布函数  $F$  的 Kolmogrove 距离, 其值分别为 0.033 7 和 0.045 1。在 Kolmogrove 假设检验方法中, 对应于不同显著性水平的阈值仅与样本个数有关, 而与具体的检验项目无关, 这里选择 3 个不同的显著性水平: 0.01、0.05 和 0.20, 相应的阈值  $D_n$  分别为 0.092 5、0.077 2、0.060 8。显然, 指数衰减系数  $C_z$  和常系数  $C_1$  的 Kolmogrove 距离均小于此阈值, 因此可以证明此假设是成立的, 即可以认为

指数衰减系数  $C_z$  和常系数  $C_1$  均服从正态分布。图 3 为经验分布与理论分布的拟合优度比较。

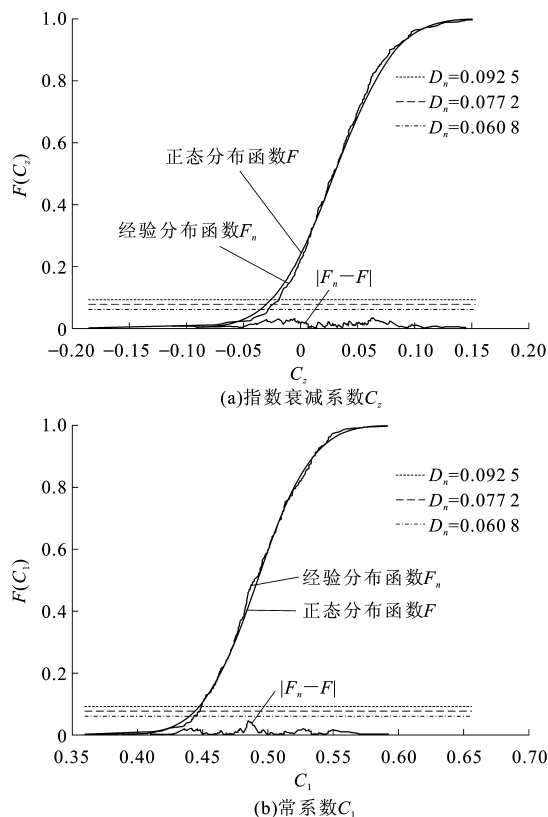


图 3 拟合优度检验结果

Fig. 3 Test Result of Fitting Goodness

#### 4.4 概率比较

考虑基本随机变量的随机性, 互随机 Fourier 谱的均值谱和标准差谱的计算公式为

$$E(F_{u_1 u_2}) = \iiint_{\Omega} F_{u_1 u_2}(z_0, U_{10}, C_z, C_1, n) p_{z_0} \cdot p_{U_{10}} p_{C_z} p_{C_1} dz_0 dU_{10} dC_z dC_1 \quad (22)$$

$$\sigma(F_{u_1 u_2}) = \left\{ \iiint_{\Omega} [F_{u_1 u_2}(z_0, U_{10}, C_z, C_1, n) - E(F_{u_1 u_2})]^2 p_{z_0} p_{U_{10}} p_{C_z} p_{C_1} dz_0 dU_{10} dC_z dC_1 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

将互随机 Fourier 谱的均值谱、标准差谱分别与实测资料互随机 Fourier 谱的均值谱、标准差谱进行对比, 如图 4 所示。从图 4 中可以看出, 本文中提出的互随机 Fourier 谱可以很好地反映实际风场空间相关性所固有的随机特性, 且其均值也比较好地反映了实测资料互随机 Fourier 谱的均值。

## 5 结 语

随机 Fourier 谱为人们更好地理解风场的随机性本质提供了一个新的视角和途径, 在其研究的初级阶段, 笔者开展了一系列的经验物理关系层次上

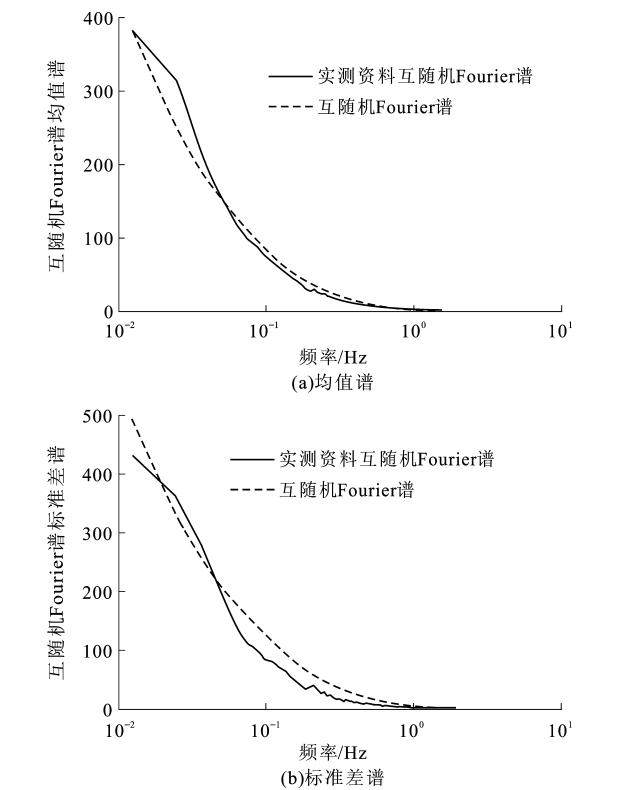


图 4 互随机 Fourier 谱与实测资料互随机 Fourier 谱的二阶矩信息比较

Fig. 4 Comparison of Second-Order Moments Between Cross Stochastic Fourier Spectrum and That of Observational one

的研究工作,文献[10]中的随机 Fourier 谱即为一个初步结论。在此基础上,笔者进一步提出了互随机 Fourier 谱的概念,它可以被用来反映随机风场空间相关性。通过实测资料验证,互随机 Fourier 谱可以很好地反映实际风场空间相关性所固有的随机特性。这一研究成果为进一步分析风荷载作用下结构的随机振动响应和动力可靠度提供了基础。

参考文献:

References:

[ 1 ] 武 岳,陈 波,沈世钊. 大跨度屋盖结构等效静风荷载研究[J]. 建筑科学与工程学报,2005,22(4):27-31.  
WU Yue, CHEN Bo, SHEN Shi-zhao. Research on Equivalent Static Wind Loadings of Large-Span Roof

Structures[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(4): 27-31.

[ 2 ] 刘健新,李加武. 中国西部地区桥梁风工程研究[J]. 建筑科学与工程学报,2005,22(4):32-39.  
LIU Jian-xin, LI Jia-wu. Study of Wind Project of Bridge in Western Area of China[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(4): 32-39.

[ 3 ] JORGEN H. Spectral Coherence in Wind Turbine Wakes [J]. J Wind Eng Ind Aerodyn, 1999, 80(1): 137-146.

[ 4 ] DAVENPORT A G. The Spectrum of Horizontal Gustiness near the Ground in High Winds[J]. J Royal Meteorol Soc, 1961, 87(1): 194-211.

[ 5 ] SIMIU E, SCANLAN R H. Wind Effects on Structures: an Introduction to Wind Engineering[M]. New York: Wiley, 1978.

[ 6 ] PANOFSKY H A, SINGER I A. Vertical Structure of Turbulence[J]. J Royal Meteorol Soc, 1965, 91(1): 339-344.

[ 7 ] VICKERY B J. On the Reliability of Gust Loading Factors[C] // National Bureau of Standards. Proceedings of the Technical Meeting Concerning Wind Loads on Buildings and Structures. Washington D C: National Bureau of Standards, 1970: 93-104.

[ 8 ] DAVENPORT A G. The Dependence of Wind Load upon Meteorological Parameters[C] // University of Toronto. Proceeding of the International Research Seminar on Wind Effects on Buildings and Structures. Toronto: University of Toronto Press, 1968: 19-82.

[ 9 ] 陈希孺,倪国熙. 数理统计学教程[M]. 上海:上海科学技术出版社,1988.  
CHEN Xi-ru, NI Guo-xi. Tutorial of Mathematical Statistics[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1988.

[10] 李 杰,张琳琳. 脉动风速功率谱与随机 Fourier 幅值谱的关系研究[J]. 防灾减灾工程学报,2004,24(4): 363-369.  
LI Jie, ZHANG Lin-lin. A Study on the Relationship Between Turbulence Power Spectrum and Stochastic Fourier Amplitude Spectrum[J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2004, 24(4): 363-369.