

文章编号:1673-2049(2006)03-0032-05

# 基于拟力法的框架结构静力弹塑性分析

刘哲锋, 沈蒲生, 龚胡广

(湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

**摘要:**针对拟力法仅在刚性连接钢框架中应用的现状,根据钢筋混凝土框架以及半刚性连接钢框架的受力特点,并基于拟力法的基本假定与思路,得出了钢筋混凝土结构中塑性铰和半刚性连接钢框架中连接的弯矩-相对转角关系,从而推导并获得了拟力法在框架结构静力弹塑性分析中的通用公式。通过与有限元理论计算结果的比较,表明基于拟力法的框架结构静力弹塑性分析方法在应用于各类框架结构时都有着较高的精度,从而为将基于拟力法的动力弹塑性分析包括地震能量分析拓展到钢筋混凝土框架结构以及半刚性连接钢框架结构中奠定了基础。

**关键词:**拟力法;框架结构;弹塑性分析;半刚性连接;静力

中图分类号:TU317

文献标志码:A

## Static Elastic-Plastic Analysis of Frame Structure Based on Force Analogy Method

LIU Zhe-feng, SHEN Pu-sheng, GONG Hu-guang

(School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, Hunan, China)

**Abstract:** According to the present situation that the force analogy method can only be applied in analysis of steel frame with rigid connections, a universal formula of the algorithm for the static elastic-plastic analysis of frame structure was derived and proposed based on the mechanic characteristics of reinforced concrete frames and steel frames with semi-rigid connections and the basic assumptions and theory of the force analogy method. The plastic hinge in reinforced concrete structure and the relation of moments and relative rotation angle in steel frames with semi-rigid connections were gained. By comparing with the results based on the finite elements calculation result, the algorithm was proved to be efficient in analyzing not only reinforced concrete frames, but also steel frames with semi-rigid connections. Authors provided a foundation for applying the dynamic elastic-plastic analysis based on the force analogy method including earthquake energy analysis extended to reinforced concrete frames as well as steel frames with semi-rigid connections.

**Key words:** force analogy method; frame structure; elastic-plastic analysis; semi-rigid connection; static

## 0 引言

Wong 等于 1999 年提出了拟力法(Force Anal-

ogy Method)的基本概念并将其应用于钢框架结构的弹塑性分析当中,其基本假定是:结构在进入弹塑性状态后,塑性变形只发生在构件的某些集中区域

收稿日期:2006-06-18

基金项目:国家自然科学基金项目(50378035)

作者简介:刘哲锋(1976-),男,湖南益阳人,工学博士研究生,E-mail:lzf0072006@163.com。

(结构的其他部分保持弹性),这些弹塑性区域的性能可以用塑性铰来描述,而结构的塑性位移正是由于这些塑性铰的转动所引起的。拟力法的核心步骤是将塑性铰等效为作用有弯矩的理想铰。本文中对拟力法的求解领域进行了扩展,将其应用于钢筋混凝土框架和半刚性连接钢框架的弹塑性分析当中。

## 1 公式推导

拟力法中对各变量正方向规定如下:力与位移以向右(水平方向)和向下(垂直方向)为正;转角以顺时针方向旋转为正;弯矩以逆时针方向旋转为正。在以下讨论中,刚性连接钢框架和钢筋混凝土框架统称刚接框架,半刚性连接钢框架简称半刚接框架。

以一跨梁为例说明基本方程的推导过程。图 1 为一单跨超静定梁,跨中在集中力  $F(t)$  的作用下发生  $x(t)$  大小的位移,梁左端发生屈服形成塑性铰(根据拟力法的基本假定,梁的其他部分保持弹性),对于刚接梁来说,梁左端的相对转动量  $\theta(t)$  为塑性铰的转动量,对半刚接梁而言, $\theta(t)$  等于连接处弹性转角与塑性转角之和,梁端相应的弯矩为  $M(t)$ ,此时梁的状态可以按如图 1 所示的方式进行等效。

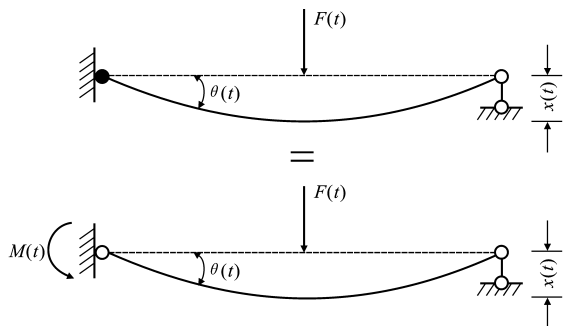


图 1 单跨梁的等效

Fig. 1 Equivalent of Single-Span Beam

根据叠加原理,图 1 中的等效状态又可以分解为图 2 中的转角状态与位移状态的叠加,转角状态下链杆的约束反力为  $F_\theta(t)$ ,位移状态下梁的固端弯矩为  $M_x(t)$ ,则有

$$F(t) = F_\theta(t) + F_x(t) \quad (1)$$

$$M(t) = M_\theta(t) + M_x(t) \quad (2)$$

定义  $K_1$ 、 $K_2$ 、 $K_3$ 、 $K$  四个刚度。

转角刚度  $K_1$ :转角状态下,左端铰发生单位转动所需弯矩

$$M_\theta(t) = K_1 \theta(t) \quad (3)$$

转角反力刚度  $K_2$ :转角状态下,左端铰发生单位转动时链杆的约束反力

$$F_\theta(t) = K_2 \theta(t) \quad (4)$$

位移反力刚度  $K_3$ :位移状态下,跨中发生单位位移时梁左端的弯矩

$$M_x(t) = K_3 x(t) \quad (5)$$

位移刚度  $K$ :位移状态下,跨中发生单位位移所需集中力

$$F_x(t) = K x(t) \quad (6)$$

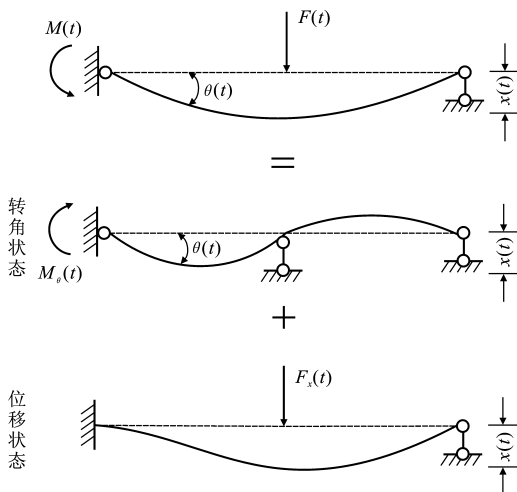


图 2 拟力法在单跨梁中的应用

Fig. 2 Application of Force Analogy Method in Single-Span Beam

将式(3)~(6)分别代入式(1)、(2),得

$$F(t) = K x(t) + K_2 \theta(t) \quad (7)$$

$$M(t) = K_3 x(t) + K_1 \theta(t) \quad (8)$$

式(7)、(8)可写为

$$\begin{bmatrix} F(t) \\ M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & K_2 \\ K_3 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

显然,当梁的材料一定时,式(9)中的 4 个刚度值是定值(与梁端是否屈服无关)。

当  $F$  已知时,式(9)无法求得  $x$ 、 $M$  和  $\theta$  三个未知数,因此须补充一个方程

$$M(t) \sim \theta(t) \quad (10)$$

式(10)为梁左端塑性铰的弯矩与相对转角之间的滞回关系,若取两折线关系,其形式如图 3 所示。

联立式(9)、(10),可以已知外力  $F$  求出相应的位移  $x$ 、弯矩  $M$  和相对转角  $\theta$ ;或已知位移  $x$  求出相应外力  $F$  以及弯矩  $M$ 、相对转角  $\theta$ 。式(9)、(10)就是拟力法的核心表达式,梁的材料以及梁左端的连接状态并不影响表达式的形式。

## 2 在框架结构中的应用

在框架结构的每一个集中力作用处定义一个与集中力方向相同的位移自由度,在框架结构每一个

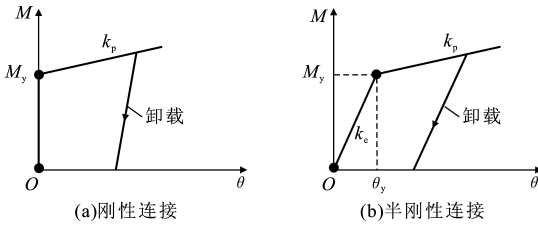


图3 梁左端塑性铰的弯矩-相对转角关系

Fig. 3 Relation of Moments and Relative Rotation

## Angle for Left Plastic Hinge of Beam

可能出现相对转动以及需要获知弯矩值的位置定义一个相对转角自由度,并有

$$\mathbf{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t))^T$$

$$\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$$

$$\mathbf{M}(t) = (M_1(t), M_2(t), \dots, M_m(t))^T$$

$$\boldsymbol{\theta}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_m(t))^T$$

式中:  $n$  为结构的位移自由度数;  $m$  为结构的相对转角自由度数。按前述的思路同样可以获得应用于框架结构分析中的基本公式,但公式中的力、位移、弯矩、相对转角以及刚度将不再是数,而是矩阵,但它们的物理意义仍然相同,各刚度矩阵的意义如下<sup>[1]</sup> (位移状态为各相对转角自由度处不发生相对转动;转角状态为各位移自由度处不发生位移):

$\mathbf{K}_1$  为  $m \times m$  阶矩阵。元素  $k_{1,ij}$  为框架在转角状态下,第  $j$  个相对转角自由度发生单位转动(其余相对转角自由度不发生转动)时,第  $i$  个相对转角自由度处的弯矩。

$\mathbf{K}_2$  为  $n \times m$  阶矩阵。元素  $k_{2,ij}$  为框架在转角状态下,第  $j$  个相对转角自由度发生单位转动(其余相对转角自由度不发生转动)时,第  $i$  个位移自由度处链杆的约束反力。

$\mathbf{K}_3$  为  $m \times n$  阶矩阵。元素  $k_{3,ij}$  为框架在位移状态下,第  $j$  个位移自由度处发生单位位移(其余位移自由度不发生位移)时,第  $i$  个相对转角自由度处的弯矩。

$\mathbf{K}$  为  $n \times n$  阶矩阵。元素  $k_{ij}$  为框架在位移状态下,第  $j$  个位移自由度发生单位位移(其余位移自由度不发生位移)时,在第  $i$  个位移自由度处施加的水平力。

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{K}\mathbf{X}(t) + \mathbf{K}_2\boldsymbol{\theta}(t) \quad (11)$$

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{K}_3\mathbf{X}(t) + \mathbf{K}_1\boldsymbol{\theta}(t) \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{M}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \boldsymbol{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

根据功的互等定理可知

$$\mathbf{K}_2 = -\mathbf{K}_3^T \quad (14)$$

式(13)可写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{M}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K}_3^T \\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \boldsymbol{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

补充  $m$  个弯矩-相对转角关系

$$\mathbf{M}(t) \sim \boldsymbol{\theta}(t) \quad (16)$$

联立式(15)、(16) ( $2m+n$  个方程),则可根据外力  $\mathbf{F}$  求出相对应的位移  $\mathbf{X}$ 、弯矩  $\mathbf{M}$  和相对转角  $\boldsymbol{\theta}$  ( $2m+n$  个未知数),或根据位移  $\mathbf{X}$  求出相对应的外力  $\mathbf{F}$ 、弯矩  $\mathbf{M}$ 、相对转角  $\boldsymbol{\theta}$ 。

式(15)、(16)是拟力法应用于框架结构的通用表达式,式(15)中的分块刚度矩阵在分析过程中为常值,与结构是否进入弹塑性状态无关,结构的弹塑性性能完全由式(16)来体现,即结构的弹塑性性能完全由各塑性铰的弹塑性性能来体现。文献[2]中介绍了拟力法在刚性连接钢框架中的应用,以下讨论拟力法在钢筋混凝土框架和半刚性连接钢框架的静力弹塑性分析中的应用。

## 2.1 钢筋混凝土框架

钢筋混凝土框架在进入弹塑性状态后,由于开裂的影响,构件的抗弯刚度会小于弹性抗弯刚度,根据文献[3]中关于曲率计算理想化的描述,在求解式(15)中的 3 个刚度矩阵时,构件的抗弯刚度可取(图 4)

$$EI = M_u / \varphi_y \quad (17)$$

根据文献[3],得塑性铰的极限转动量为

$$\theta_u = (\varphi_u - \varphi_y) l_p \quad (18)$$

式中:  $l_p$  为塑性铰的等效长度。根据图 4、5 的对应关系得

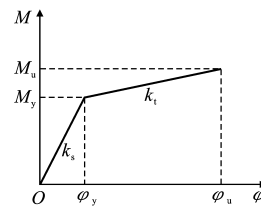


图4 理想化的弯矩-曲率关系

Fig. 4 Relation of Idealization of Moment and Curvature

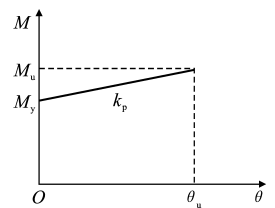


图5 塑性铰的弯矩-相对转角关系

Fig. 5 Relation of Moment and Relative Rotation Angle for Plastic Hinge

$$k_p = \frac{M_u - M_y}{\theta_u} = \frac{M_u - M_y}{(\varphi_u - \varphi_y) l_p} = \frac{k_t}{l_p} \quad (19)$$

塑性铰等效长度  $l_p$  的求解方法有很多,具体可见文献[4]。根据式(17)、(19),就可以通过构件截面的弯矩-曲率关系获得求解 3 个刚度矩阵所需的构件抗弯刚度,并确定各塑性铰的弯矩-相对转角关系。

算例 1: 一单层单跨钢筋混凝土框架,梁柱截面的宽度和高度分别为 300、400 mm,均采用对称配

筋,C35 混凝土,在框架顶点作用一集中力,如图 6 所示。在集中力作用点定义一个水平位移自由度,相对转角自由度数设为 4,分别设在梁的两端和柱的根部,梁柱截面弯矩-曲率参数见表 1。

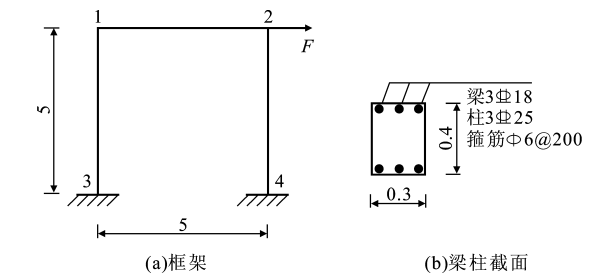


图 6 钢筋混凝土框架(单位:m)

Fig. 6 RC Frame(Unit:m)

表 1 梁柱截面的弯矩-曲率参数及塑性铰等效长度					
Tab. 1 Moment vs Curvature Parameters of Beam and Column Section and Equivalent Length of Plastic Hinge					
构 件	$M_y/$ (kN·m)	$\varphi_y/$ (rad·m <sup>-1</sup> )	$M_u/$ (kN·m)	$\varphi_u/$ (rad·m <sup>-1</sup> )	$l_p/m$
梁	88.34	0.007 2	104.77	0.062 4	0.365
柱	196.97	0.009 6	213.16	0.039 3	0.365

注:混凝土压应变为 0.003 3 时,认为截面达到极限状态;由于不考虑轴力,且为对称配筋, $l_p=h_0$  [5]。

根据式(17)计算梁柱的抗弯刚度,并由各刚度矩阵定义得

$K=(2\ 646)\text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$

$$K_1=\begin{bmatrix}-6\ 581 & -2\ 201 & 3\ 284 & 1\ 100 \\ -2\ 201 & -6\ 586 & 1\ 098 & 3\ 293 \\ 3\ 284 & 1\ 098 & -14\ 951 & -549 \\ 1\ 100 & 3\ 293 & -549 & -14\ 969\end{bmatrix}\text{ kN}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$$

$K_3=(-2\ 633,-2\ 636,3\ 976,3\ 982)^T\text{ kN}\cdot\text{m}\cdot\text{m}^{-1}$

根据式(18)计算各相对转角自由度的弯矩-转角关系,卸载刚度取为无穷大。

图 7 为拟力法程序 HRFAM 计算结果与有限元计算程序 IDARC5.5 计算结果的对比,两者比较接近,其结果见文献[3],按式(17)取构件的抗弯刚度会使弹性位移偏大。

2.2 半刚性连接钢框架

相对于钢筋混凝土框架,半刚性连接钢框架的求解要简单很多。获得 3 个刚度矩阵所需的梁柱抗弯刚度直接取其弹性抗弯刚度即可;文献[6]中总结了各种半刚性梁柱连接形式的弯矩-相对转角的滞回关系,计算时可根据情况方便地取用。

算例 2:一单层单跨钢框架,高度与跨度均为 5 m,在框架顶点作用一集中力,形式如图 6 所示,

材料参数见表 2,梁与柱采用半刚性连接。

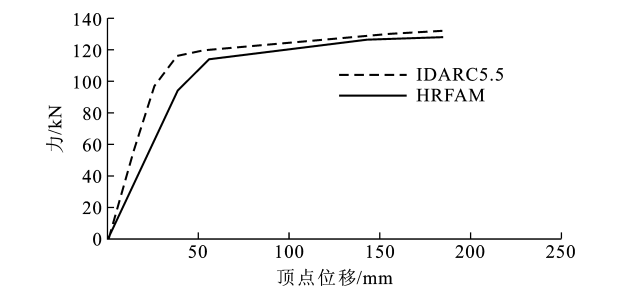


图 7 拟力法计算结果与有限元计算结果的对比 1

Fig. 7 Calculation Result Comparison 1 Between Force Analogy Method and FEM

在集中力作用点定义一个水平位移自由度,相对转角自由度数设为 4,分别设在梁的两端和柱的根部(图 6),相对转角自由度 1、2 和 3、4 处的  $M-\theta$  关系分别采用如图 3 所示的两折线关系,具体参数见表 3,卸载刚度取为弹性刚度  $k_e$  [7-9]。

表 2 梁柱结构材料参数			
Tab. 2 Structure Material Parameters of Beam and Column			
构 件	弹性模量 $E/\text{kPa}$	截面积 $A/\text{m}^2$	惯性矩 $I/\text{m}^4$
梁	$2.06\times10^8$	$63.66\times10^{-4}$	$1.37\times10^{-4}$
柱	$2.06\times10^8$	$120.40\times10^{-4}$	$2.05\times10^{-4}$

表 3 截面各相对转角自由度处的受力性能			
Tab. 3 Forced Capabilities of Sections at Relative Rotation Angle Degree of Freedoms			
相对转角 自由度	$M_y/$ (kN·m)	$k_e/$ (kN·m·rad <sup>-1</sup> )	$k_p/$ (kN·m·rad <sup>-1</sup> )
1、2	69.94	12 905	779.06
3、4	312.70		2 533.80

注:相对转角自由度 3、4 的塑性刚度为  $0.015EI/l_p$ ,  $l_p$  取 0.25 m。

根据各刚度定义可得

$K=(5\ 636)\text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$

$$K_1=\begin{bmatrix}-15\ 656 & -4\ 426 & 7\ 780 & 2\ 213 \\ -4\ 426 & -15\ 696 & 2\ 200 & 7\ 848 \\ 7\ 780 & 2\ 200 & -29\ 152 & -1\ 100 \\ 2\ 213 & 7\ 848 & -1\ 100 & -29\ 262\end{bmatrix}\text{ kN}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$$

$K_3=(-6\ 015,-6\ 034,8\ 046,8\ 085)^T\text{ kN}\cdot\text{m}\cdot\text{m}^{-1}$

图 8 为拟力法程序 HRFAM 的计算结果与有限元程序 IDARC5.5 的计算结果对比,两者结果接近。

3 结 语

(1)拟力法与传统的有限元方法相比 [10-11],在处理弹塑性问题时由于不存在修正单元刚度矩阵和重组结构刚度矩阵的过程,因而计算效率较高,这种优

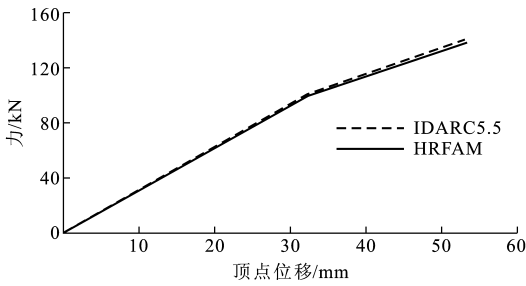


图 8 拟力法计算结果与有限元计算结果的对比 2

Fig. 8 Calculation Result Comparison 2 Between Force Analogy Method and FEM

势在动力非线性的分析中会更加突出;同时,由于拟力法在弹塑性分析过程中能求解各塑性铰的弯矩以及相对转动量,因此对分析中的结构是否破坏能进行实时监测,只要制定相应结构破坏准则(塑性铰的极限转动量、可能的破坏机构、层间位移限值)就可获得静力弹塑性分析中结构已经发生破坏的依据。

(2)由于拟力法是将结构的塑性变形区域考虑为塑性铰,因而整个结构的滞回耗能将会是各塑性铰的滞回耗能之和,因此,当拟力法与能量分析结合时,便能有效地解决耗能分析难以进入构件层面的问题。

(3)对拟力法的应用领域进行了扩展,获得了在钢筋混凝土框架以及半刚性连接钢框架弹塑性分析中应用拟力法的方法。

#### 参考文献:

#### References:

- [1] 刘哲锋,沈蒲生.基于拟力法的地震能量分析[C]//周福霖,张燕.防震减灾工程研究与进展.北京:科学出版社,2005:184-190.  
LIU Zhe-feng, SHEN Pu-sheng. Seismic Energy Analysis Based on Force Analogy Method[C]//ZHOU Fu-lin, ZHANG Yan. Research and Progress in Earthquake Prevention and Disaster Reduction. Beijing: Science Press, 2005: 184-190.
- [2] WONG K K F, YANG R. Inelastic Dynamic Response of Structures Using Force Analogy Method[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125(10): 1 190-

- 1 199.
- [3] PARK R, PAULAY T. Reinforced Concrete Structures[M]. New York: Wiley, 1975.
- [4] 顾祥林,孙飞飞.混凝土结构的计算机仿真[M].上海:同济大学出版社,2002.  
GU Xiang-lin, SUN Fei-fei. Computer Simulation for Concrete Structures[M]. Shanghai: Tongji University Press, 2002.
- [5] 朱伯龙,董振祥.钢筋混凝土非线性分析[M].上海:同济大学出版社,1985.  
ZHU Bo-long, DONG Zhen-xiang. Inelastic Analysis of Steel Concrete Structures[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1985.
- [6] 李国强,沈祖炎.钢结构框架体系弹性及弹塑性分析与计算理论[M].上海:上海科学技术出版社,1998.  
LI Guo-qiang, SHEN Zu-yan. Elastic and Elastic-Plastic Analysis and Calculation Theory of Steel Frame Systems[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 1998.
- [7] WONG K K F, YANG R. Earthquake Response and Energy Evaluation of Inelastic Structures[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128(3): 308-317.
- [8] 陈绍蕃.钢结构设计原理[M].北京:科学出版社,1998.  
CHEN Shao-fan. Design Theory of Steel Structures[M]. Beijing: Science Press, 1998.
- [9] 马玉平,马昕,崔建涛.高强度混凝土试验研究[J].建筑科学与工程学报,2005,22(3): 67-69.  
MA Yu-ping, MA Xin, CUI Jian-tao. Experimental Research on High-Strength Concrete[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(3): 67-69.
- [10] 杨弗康,李家宝.结构力学[M].北京:高等教育出版社,1991.  
YANG Fu-kang, LI Jia-bao. Structural Mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1991.
- [11] 龙驭球,包世华.结构力学[M].北京:高等教育出版社,1988.  
LONG Yu-qiu, BAO Shi-hua. Structural Mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1988.