

文章编号:1673-2049(2006)04-0054-04

# 预应力混凝土四边简支双向 叠合板的设计方法

周绪红<sup>1</sup>, 张微伟<sup>2</sup>, 吴方伯<sup>2</sup>, 李定乾<sup>2</sup>

(1. 兰州大学 土木工程与力学学院, 甘肃 兰州 730000; 2. 湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

**摘要:**对预应力混凝土双向叠合板进行了抗弯刚度分析, 基于弹性薄板原理, 按照正交各向异性板推导四边简支单向预应力矩形板的相应计算公式, 通过自编程序求解出双向叠合板在四边简支边界条件下的计算系数, 并编制成与普通钢筋混凝土双向板相对应的表格, 为其进一步推广应用奠定基础。通过与现浇四边简支双向板弹性计算系数的比较可知, 在预应力双向叠合板的设计中, 应将预制构件沿短跨方向布置才能更好地发挥其节省钢材的优势。

**关键词:**预应力; 双向叠合板; 四边简支; 弹性薄板理论

**中图分类号:** TU378.5

**文献标志码:** A

## Design Method of Prestressed Concrete Simply Supported on Four Sides of Two-Way Composite Slab

ZHOU Xu-hong<sup>1</sup>, ZHANG Wei-wei<sup>2</sup>, WU Fang-bo<sup>2</sup>, LI Ding-qian<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, Gansu, China;

2. School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, Hunan, China)

**Abstract:** The flexural rigidity of prestressed concrete two-way composite slab was analyzed. Based on the theory of elastic thin plates, according to the orthotropic plate's perpendicularity, the corresponding calculation formulas of rectangular unidirectional prestressed slab simply supported on four sides were deduced. Moreover, with the program written by authors, the coefficients of two-way composite slab under border simply supported on four sides were obtained, authors made a form correspondence to the composition slab. Thus, this established a stable condition for the further appliance of such composition slab. Comparing with the elastic coefficient of cast-in-site two-way slab simply supported on four sides, it shows that in the design of prestressed two-way composite slab, prefabricated components along step short should be fixed up, which can make full use of its advantages of saving steel products.

**Key words:** prestress; two-way composite slab; simply supported on four sides; theory of elastic thin plate

## 0 引言

预应力混凝土双向叠合板是通过预应力预制构

件吊装就位后, 在凸出的板肋预留长方形孔中穿置横向受力钢筋, 再浇注混凝土叠合层而形成的装配整体式楼板。这种楼板的主要优点是: 预制薄板既

是承重结构又兼作模板;与现浇板相比,可节省模板,缩短施工工期;与预制空心板比较,整体性好,抗震能力强。正是由于该种楼板的独特优点,在中国不少地区得到了应用与发展;然而,由于该单向预应力双向叠合板在弹性工作阶段受二次受力<sup>[1]</sup>和结构形式的影响,两个方向刚度分布不均匀,形成了正交各向异性板,因此不能沿用钢筋混凝土现浇板的弹性计算系数,必须重新进行计算<sup>[2-5]</sup>。笔者依据弹性薄板原理研究了四边简支预应力混凝土双向叠合板的弹性设计方法。

1 刚度分析

预应力混凝土双向叠合板在  $x$ 、 $y$  方向的计算刚度应采用实际抗弯刚度。由于预应力混凝土双向叠合板属于在二次受力阶段荷载作用下不出现裂缝的构件,预应力方向截面的短期抗弯刚度  $B_{s2}$  采用弹性形式为<sup>[6]</sup>

$$B_{s2}=0.7E_{c1}I_0 \tag{1}$$

式中: $E_{c1}$  为预制构件混凝土的弹性模量; $I_0$  为换算截面对其重心轴的惯性矩。

通过 PDB-1、PDB-2 两块宽度为 1 m 的叠合拼块板的极限承载力试验对该方向的抗弯刚度进行分析,得出的试验结果见图 1<sup>[7]</sup>。

由图 1 可知:在前 3 级荷载加载期间,PK 叠合拼块板挠度大体上呈线性发展,处于弹性受力工作

阶段,该阶段的抗弯刚度  $B_s$  为

$$B_s=\beta E_{c1}I_0 \tag{2}$$

式中: $\beta$  为折减系数。

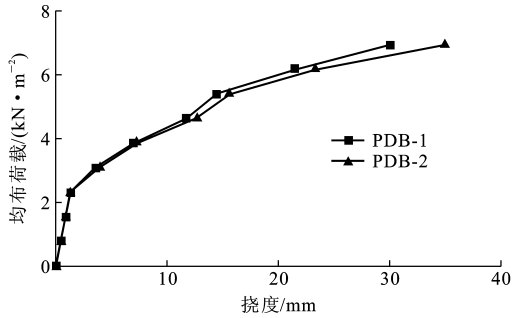


图 1 试验荷载-挠度关系

Fig. 1 Relation of Load and Deflection of Test

经计算可得,2 块叠合拼块板的材料抗弯刚度  $E_{c1}I_0=2.44\times10^6\text{ N}\cdot\text{m}^2$ ,运用结构力学方法,由挠度反算出 PK 叠合拼块板的抗弯刚度  $B_s$  见表 1。

由表 1 可以看出:在弹性工作阶段抗弯刚度可大致按  $\beta=0.3$  折减。在楼板中的板带不是独立工作的,其变形受到两侧板带的约束,同时沿板缝采取了布置折线形抗裂钢筋网等有利构造措施,对板带的抗弯刚度有所加强,考虑到上述抗弯刚度的有利因素的影响,可取  $\beta=0.35$ ,即 PK 预应力叠合板非预应力方向的抗弯刚度为

$$B_s=0.35E_{c1}I_0 \tag{3}$$

由式(1)、(3)可知,在二次受力阶段弹性工作状

表 1 叠合板抗弯刚度试验结果分析值

Tab. 1 Analysis Value of Experimental Results on Composite Slab's Flexural Rigidity

均布荷载/(kN·m <sup>-2</sup> )		0.77	1.54	2.31	3.08	3.85	4.62	5.39	6.16	6.93
抗弯刚度 $B_s$ /( $10^5\text{ N}\cdot\text{m}^2$ )	PDB-1	7.11	7.35	7.21	3.64	2.34	1.67	1.58	1.21	0.98
	PDB-2	7.78	7.27	7.01	3.30	2.23	1.55	1.47	1.12	0.84

态下,PK 预应力叠合板预应力方向的单位宽度截面抗弯刚度近似为非预应力方向抗弯刚度的 2 倍。

2 挠曲基本微分方程

2.1 正交各向异性板的挠曲微分方程

假设正交各向异性板的边缘分别平行于弹性方向,以  $x$ 、 $y$  轴表示,弹性薄板四边支承,由各向异性板单元内弯矩平衡,推导出均布荷载  $p_0$  下异性板的平衡方程式<sup>[8]</sup>为

$$D_x\frac{\partial^4w}{\partial x^4}+2B\frac{\partial^4w}{\partial x^2\partial y^2}+D_y\frac{\partial^4w}{\partial y^4}=p_0 \tag{4}$$

根据各向异性板弯矩  $m_x$ 、 $m_y$  和扭矩  $m_{xy}$  与挠度  $w$  的关系,它们可分别表示为

$$m_x=-D_x(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\mu_y\frac{\partial^2w}{\partial y^2}) \tag{5}$$

$$m_y=-D_y(\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\mu_x\frac{\partial^2w}{\partial x^2}) \tag{6}$$

$$m_{xy}=-2D_t\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y} \tag{7}$$

式中: $D_x$  与  $D_y$ 、 $2D_t$  分别为正交各向异性板  $x$ 、 $y$  方向上的抗弯刚度和抗扭刚度, $2D_t=(1-\sqrt{\mu_x\mu_y})\cdot\sqrt{D_xD_y}$ ,PK 预应力混凝土叠合板的抗弯刚度见式(1)、(3); $B$  为正交各向异性板的有效抗扭刚度, $B=(v_yD_x+v_xD_y+4D_t)/2$ ,对于等厚度的钢筋混凝土板, $B=\sqrt{D_xD_y}$ ; $\mu_x$ 、 $\mu_y$  分别为异性板  $x$ 、 $y$  方向的泊松比,对于钢筋混凝土板, $\mu_x=\mu_y=\mu=0.2$ 。

2.2 四边简支各向异性板的求解

采用如图 2 所示的坐标系,则四边简支板的边界条件如下:

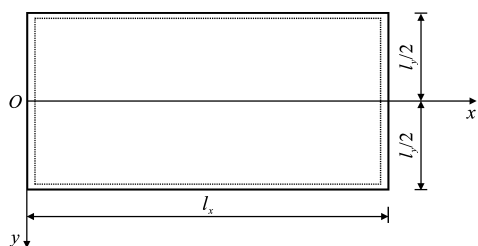


图2 四边简支板

Fig. 2 Simply Supported Slab on Four Sides

在  $x=0$  或  $l_x$  处

$$w=0, \partial^2 w / \partial x^2 = 0 \quad (8)$$

在  $y=\pm l_y/2$  处

$$w=0, \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \quad (9)$$

采用李维法求解,假设四边简支板沿简支边界方向无限长,正交各向异性板弯曲微分方程式(4)的解可分解为两个部分<sup>[9]</sup>

$$w = w_H + w_P \quad (10)$$

式中:  $w_H$  为该齐次方程的解;  $w_P$  为该方程的特解。

在均布荷载  $q$  作用下,其特解为<sup>[10]</sup>

$$w_P = \frac{4ql_x^4}{\pi^5 D_x} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{l_x} \quad (11)$$

正交各向异性板弯曲微分方程的齐次方程解  $w_H$  可表示为

$$w_H = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{l_x} \quad (12)$$

$$Y_m(y) = (A_m + B_m y) \cosh \frac{m\pi r y}{l_x} + (C_m + D_m y) \sinh \frac{m\pi r y}{l_x} \quad (13)$$

式中:  $r = (D_x/D_y)^{0.25} = \lambda_2^{0.25}$ ,  $\pm r$  为方程式(4)的齐次特征方程的二重根;系数  $A_m, B_m, C_m, D_m$  可由简支板四周的边界条件来确定,并应用对称性来加以简化。当另两边边界条件对称于  $x$  轴,挠曲函数为  $y$  坐标的偶函数,则式(12)可简化为

$$w_H = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cosh \frac{m\pi r y}{l_x} + D_m y \sinh \frac{m\pi r y}{l_x}) \sin \frac{m\pi x}{l_x} \quad (14)$$

则均布荷载下横向位移  $w$  为

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{4ql_x^4}{\pi^5 D_x m^5} + A_m \cosh \frac{m\pi r y}{l_x} + D_m y \sinh \frac{m\pi r y}{l_x} \right) \sin \frac{m\pi x}{l_x} \quad (15)$$

将式(15)代入边界条件式(8)、(9),可得到横向

位移  $w$  的级数表达式为

$$w = \frac{4ql_x^4}{D_x \pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left( 1 - \frac{2 + \alpha_m \tanh \alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \cdot \cosh \frac{m\pi r y}{l_x} + \frac{\alpha_m}{\cosh \alpha_m} \frac{y}{l_y} \sinh \frac{m\pi r y}{l_x} \right) \sin \frac{m\pi x}{l_x} \quad (16)$$

将式(16)代入式(5)、(6),得出  $x, y$  方向弯矩  $m_x, m_y$  的表达式,弹性计算系数不考虑泊松比,即泊松比  $\mu=0$ ,则弯矩  $m_x, m_y$  的表达式分别为

$$m_x = -D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{4ql_x^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left( 1 - \frac{2 + \alpha_m \tanh \alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{m\pi r y}{l_x} + \frac{\alpha_m}{\cosh \alpha_m} \frac{y}{l_y} \sinh \frac{m\pi r y}{l_x} \right) \sin \frac{m\pi x}{l_x} \quad (17)$$

$$m_y = -D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{4r^2 ql^2}{D_x \pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left( \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \cdot \cosh \frac{m\pi r y}{l_x} - \frac{\alpha_m y}{\cosh \alpha_m l_y} \sinh \frac{m\pi r y}{l_x} \right) \sin \frac{m\pi x}{l_x} \quad (18)$$

式中:  $\alpha_m = m\pi r l_y / (2l_x)$ ;  $r = (D_x/D_y)^{0.25}$ 。

在均布荷载下的四边简支板的横向位移最大值(挠度)产生于板中心处,当跨度比  $\lambda_1 = l_x/l_y$  位于 0.5~2.0 时,其最大弯矩位于板中心附近,将板中心坐标  $x=l_x/2, y=0$  代入式(16)~(18),可得

$$\left. \begin{aligned} w_{\max} &= \frac{4qa^4}{\pi^5 D_x} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \left( 1 - \frac{2 + \alpha_m \tanh \alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \right) \\ m_x &= \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3} \left( 1 - \frac{2 + \alpha_m \tanh \alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \right) \\ m_y &= \frac{2qa^2}{\sqrt{\lambda_2} \pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3} \cdot \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m}{\cosh \alpha_m} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中:  $\alpha_m = m\pi r l_y / (2l_x) = m\pi r / (2\lambda_1)$ 。

若计入泊松比的影响,弯矩的表达式为

$$\left. \begin{aligned} m_x'' &= m_x + \mu \lambda_2 m_y \\ m_y'' &= m_y + \frac{\mu}{\lambda_2} m_x \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

对于四边简支各向异性板的求解,挠度的级数

收敛很快,只要考虑级数的两项就可得到比较精确的解,但板的内力弯距要多考虑几项才能达到足够的精确度。编制计算程序进行电算,每个级数可取 100 项以上,各计算系数的计算值就能得到比较满意的精度。

根据第 1 节中对抗弯刚度的分析,PK 预应力双向叠合板在  $x$ 、 $y$  方向的抗弯刚度比  $\lambda_2$  取 2.0 或 0.5,将该值和跨度比代入式(19),并结合自编的程序,得到预应力双向叠合板在四边简支各向异性板边界下的计算系数,见表 2、3。

表 2 四边简支正交各向异性板弹性计算系数 1( $\lambda_2=2.0$ )

Tab. 2 Elasticity Calculation Coefficient 1 of Orthotropy Simply Supported Slab on Four Sides( $\lambda_2=2.0$ )

$l_x \cdot l_y^{-1}$	各量的弹性计算系数		
	$w_{\max}$	$m_x$	$m_y$
0.50	0.011 24	0.107 1	0.008 1
0.55	0.010 66	0.102 2	0.010 3
0.60	0.010 06	0.095 8	0.012 5
0.65	0.009 45	0.089 7	0.014 7
0.70	0.008 83	0.083 7	0.016 6
0.75	0.008 23	0.077 7	0.018 4
0.80	0.007 64	0.071 9	0.020 0
0.85	0.007 07	0.066 4	0.021 4
0.90	0.006 54	0.061 1	0.022 6
0.95	0.006 04	0.056 2	0.023 6
1.00	0.005 57	0.051 6	0.024 4

注:挠度  $w_{\max}$  为表中系数乘以  $ql_x^4/D_s$ ;  $\mu=0$ ; 弯矩  $m_x$  或  $m_y$  为表中系数乘以  $ql_x^2$ ; 表 3 同。

表 3 四边简支正交各向异性板弹性计算系数 2( $\lambda_2=0.5$ )

Tab. 3 Elasticity Calculation Coefficient 2 of Orthotropy Simply Supported Slab on Four Sides( $\lambda_2=0.5$ )

$l_x \cdot l_y^{-1}$	各量的弹性计算系数		
	$w_{\max}$	$m_x$	$m_y$
0.50	0.008 75	0.082 8	0.033 8
0.55	0.007 90	0.074 5	0.038 7
0.60	0.007 09	0.066 6	0.042 8
0.65	0.006 35	0.059 2	0.046 1
0.70	0.005 66	0.052 5	0.048 6
0.75	0.005 04	0.046 4	0.050 4
0.80	0.004 48	0.040 9	0.051 5
0.85	0.003 97	0.035 9	0.052 1
0.90	0.003 53	0.031 6	0.052 3
0.95	0.003 13	0.027 8	0.052 1
1.00	0.002 78	0.024 4	0.051 6

将表 2 与文献[11]中现浇四边简支双向板的弹

性计算系数相比较,当 $\lambda_2=2.0$ 时,即 PK 预应力双向叠合板预制构件在垂直于楼板短边并列布置的情况下, $m_x$  的系数较大, $m_y$  的系数较小。这反映了将预制构件布置在楼板短跨方向时,由于预应力方向刚度分布较大,该方向板带可分配较多的荷载,发挥了 PK 预应力叠合板高强预应力钢丝的材料优势,同时也减小另一方向板带的跨中内弯矩,从而降低了 PK 预应力双向叠合楼板的配筋量,其他边界条件下的 PK 预应力双向叠合板也是同样的道理;而取 $\lambda_2=0.5$ 时,即与将预制构件沿长跨方向布置承载的情况恰恰相反,因此将预制构件沿短跨方向布置才能更好地发挥其节省钢材的优势。

### 3 结 语

笔者根据弹性薄板理论,应用李维法建立了 PK 预应力混凝土简支双向叠合板的挠曲基本微分方程,并根据自编的程序,结合抗弯刚度分析求解出双向叠合板在四边简支边界条件下的计算系数,并将其编制成与普通各向同性板相应的表格,为设计人员设计该板提供了便利,从而为该叠合板的进一步推广应用奠定了基础。通过将本文系数与现浇四边简支双向板的弹性计算系数的比较,得出在 PK 预应力双向叠合板的设计中,应将预制构件沿短跨方向布置才能更好地发挥其节省钢材的优势。

#### 参考文献:

#### References:

[1] 周旺华. 现代混凝土叠合结构[M]. 北京: 中国建筑工程工业出版社,1998.

ZHOU Wang-hua. Modern Concrete Composite Structure [M]. Beijing: China Architecture & Building Press,1998.

[2] 贺拥军,周绪红,刘永健,等. 超大跨度巨型网格结构[J]. 建筑科学与工程学报,2005,22(3):25-29.

HE Yong-jun,ZHOU Xu-hong,LIU Yong-jian,et al. Super-Span Reticulated Mega-structure[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(3): 25-29.

[3] 武岳,陈波,沈世钊. 大跨度屋盖结构等效静风荷载研究[J]. 建筑科学与工程学报,2005,22(4):27-31.

WU Yue,CHEN Bo,SHEN Shi-zhao. Research on Equivalent Static Wind Loadings of Large-Span Roof Structures[J]. Journal of Architecture and Civil Engi-

- 化改造策略[J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(2): 72-74.
- JIN Hong, SONG Fei, CHEN Chun-hui. Strategy of Ecological Reconstruction to Resident Buildings at Old Industrial Zone in Northeast China[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(2): 72-74.
- [7] 姜 峰. 中国公共建筑外观的探索[J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(2): 83-85.
- JIANG Feng. Probe into Appearance of Public Buildings in China[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(2): 83-85.
- [8] 冷畅俭, 陈友富, 罗广宇, 等. 大学博览园景观设计[J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(3): 91-94.
- LENG Chang-jian, CHEN You-fu, LUO Guang-yu, et al. Landscape Design of University Museum Park[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(3): 91-94.
- [9] 韩 效. 景观建筑学对中国景观设计发展状况的思考[J]. 四川建筑, 2004, 24(2): 17-18.
- HAN Xiao. Landscape Architecture of Landscape Design Development in China[J]. Sichuan Architecture, 2004, 24(2): 17-18.
- [10] 赵 丹. 浅析中国现代景观设计——人、自然、科技的彻底融合[J]. 重庆邮电学院学报: 社会科学版, 2005, 20(2): 295-296.
- ZHAO Dan. Modern Scenery Designs in China—the Combination of Mankind Nature and Technology[J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications: Social Science Edition, 2005, 20(2): 295-296.
- [11] 陆 宁, 蔡爱云, 黄永安, 等. 建筑业可持续发展综合评价[J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(3): 88-90.
- LU Ning, CAI Ai-yun, HUANG Yong-an, et al. Comprehensive Evaluation of Sustainable Development of Building Industry[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(3): 88-90.
- [12] 沈志明. 论现代景观设计中——造园继承的发展与趋势创新[J]. 南平师专学报, 2004, 23(1): 116-119.
- SHEN Zhi-ming. Development and Creation of Garden—Making Style Inheritance in Modern Landscape Design[J]. Journal of Nanping Teachers College, 2004, 23(1): 116-119.
- ~~~~~
- (上接第 57 页)
- neering, 2005, 22(4): 27-31.
- [4] 周 庆, 邹银生. 现浇混凝土空心楼盖受力特性研究[J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(4): 57-60.
- ZHOU Qing, ZOU Yin-sheng. Research on Force Resistance Properties of Cast-in-Situ Hollow Concrete Floor[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(4): 57-60.
- [5] 楼文娟, 卢 旦, 孙炳楠. 风致内压及其对屋盖结构的作用研究现状评述[J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(1): 76-82.
- LOU Wen-juan, LU Dan, SUN Bing-nan. Review of Wind-Induced Internal Pressure and Its Effects on Roof Structures[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(1): 76-82.
- [6] GB J50010-2002, 混凝土结构设计规范[S].
- GB J50010-2002, Code for Design of Concrete Structures [S].
- [7] 郑伦存. PK预应力混凝土叠合板的试验研究与应用[D]. 长沙: 湖南大学, 2003.
- ZHENG Lun-cun. Experimental Research and Application of PK Prestressed Concrete Composite Slab [D]. Changsha: Hunan University, 2003.
- [8] TIMOSHENKO S, WOINOWSKY-KRIEGER S. Theory of Plates and Shells[M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1958: 389-404.
- [9] SZILARD R. 板的理论和分析[M]. 陈太平, 戈鹤翔, 周孝贤, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1984.
- SZILARD R. Theory and Analysis of Slab[M]. Translated by CHEN Tai-ping, GE He-xiang, ZHOU Xiaoxian. Beijing: China Railway Publishing House, 1984.
- [10] 曲庆璋. 弹性板理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000.
- QU Qing-zhang. Theory of Elastic Slab[M]. Beijing: China Communications Press, 2000.
- [11] 沈蒲生. 楼盖结构设计原理[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- SHEN Pu-sheng. Design Principle of Floor Structure [M]. Beijing: Science Press, 2003.