

文章编号:1673-2049(2007)01-0001-06

# 单轴拉压状态下混凝土破坏的 细观数值演化分析

林 皋<sup>1,2</sup>, 李建波<sup>1</sup>, 赵 娟<sup>1</sup>, 梁正召<sup>1</sup>

(1. 大连理工大学 工程抗震研究所, 辽宁 大连 116024; 2. 大连理工大学 海岸与近海工程  
国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

**摘要:**在提出可同时满足级配曲线及指定骨料填充率的任意凹凸形骨料配置算法的基础上,建立了混凝土试件的细观随机骨料模型,并建立了空间应力环境下细观单元的弹性损伤本构关系;分别就工程中常采用的两种不同的混凝土强度,研究了混凝土试件的细观损伤演化过程及细观单元力学参数取值对混凝土试件宏观表征强度的影响。数值算例验证了模型的有效性,并揭示出混凝土试件破坏主要是由细观单元的拉伸损伤积累所导致的。

**关键词:**混凝土;随机骨料模型;损伤与破坏;细观数值模拟;单轴拉伸;单轴压缩

**中图分类号:** TU528. 041

**文献标志码:** A

## Mesoscopic Numerical Evolution Analysis of Concrete Damage Under Uniaxial Tension and Compression

LIN Gao<sup>1,2</sup>, LI Jian-bo<sup>1</sup>, ZHAO Juan<sup>1</sup>, LIANG Zheng-zhao<sup>1</sup>

(1. Earthquake Engineering Research Division, Dalian University of Technology, Dalian 116024,  
Liaoning, China; 2. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering,  
Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China)

**Abstract:** An advanced method was presented to generate aggregates with random shapes and various sizes according to the given aggregate gradation curve and aggregate area fraction, and the elastic damage constitutive relations of mesoscopic elements were established in the three-dimension stress field. Numerical simulation tests were carried out to study the damage evolution on meso-level and the influences of parameters on macro-level strength of concrete specimen, in which two different kinds of concrete strengths were compared. The numerical results verify this mesoscopic model, and show that the failure of concrete is mostly due to the accumulation of tensile damage on mesoscopic level.

**Key words:** concrete; random aggregate model; damage and fracture; mesoscopic numerical simulation; uniaxial tension; uniaxial compression

## 0 引 言

混凝土是工程中广泛应用的一种建筑材料,其

力学特性的研究对于充分发挥材料强度、提高设计水平、降低工程造价具有重要的意义。目前,材料力学性能试验及细观数值分析是两条重要途径,随着

收稿日期:2007-01-28

基金项目:国家自然科学基金项目(90510018)

作者简介:林 皋(1929-),男,江西丰城人,教授,博士生导师,中国科学院院士,E-mail:gaolin@dlut.edu.cn。

高性能计算机及数值算法的迅速发展,相对廉价的细观数值分析有望弥补或替代部分材料试验<sup>[1-2]</sup>。

对于混凝土的数值研究,人们是从宏观层次逐渐过渡到细观层次的。Wittmann 最早把微观、细观和宏观的多研究尺度的概念引入到混凝土材料力学性能的研究中。在细观层次研究中,混凝土通常被视为水泥砂浆基质、骨料及两者之间的结合界面组成的三相复合材料,具有很强的细观非均匀性,因此,研究混凝土结构破坏过程的细观机理有着重要的意义。在此基础上,人们提出了多种研究混凝土结构的细观力学数值模型,其中较具代表性的有网格模型、随机骨料模型和随机力学参数模型等。

笔者在综合随机骨料模型及随机力学参数模型优势的基础上,提出了任意凹凸形骨料配置算法,克服了传统填充算法仅考虑凸骨料的限制,并运用各类细观单元统一的拉压非线性弹性损伤本构关系,从细观层次研究了混凝土的损伤破坏过程。面向工程应用及大规模问题求解的主要计算通过 ANSYS 大型有限元软件的二次开发来实现<sup>[3]</sup>。

## 1 细观数值模型

骨料是混凝土弹性模量及强度的重要影响因素之一,尤其是骨料颗粒的强度、形状、粒径分布及填充率等。从几何学的角度来看,混凝土细观数值模型的建立主要是在有限的混凝土试件轮廓区域内填充不同形状、不同数量的骨料颗粒,这也是生成混凝土随机骨料数值模型的难点。

### 1.1 随机骨料模型的生成

传统的混凝土细观数值模型中,骨料多被认为是圆形或凸多边形,而凹形骨料的投放往往被忽视,凹凸形骨料之间的契合作用也未被考虑。鉴于此,笔者利用计算机图形学多边形重叠判断及区域填充算法,提出了可考虑任意凹凸形状、大小的骨料投放算法,并且在二维骨料的投放过程中加入对极少数骨料颗粒位置的人工干预方法,以提高骨料投放的成功率及效率。具体实现过程如下:

(1)目前大型工程中常用的混凝土以碎石骨料混凝土为主,在任一混凝土截面上这些骨料都是多边形的,因此,用  $N$  边形( $N \geq 3$ )来模拟骨料的形状<sup>[4]</sup>。为生成  $N$  边形的骨料数值模型,一种直接算法是选用极坐标系来确定各个顶点的极半径  $r_i$  及相邻极半径间的夹角  $\varphi_i$ ,如图 1 所示;而针对骨料的粒径计算,通常采用“卡尺”算法,即按照多边形边的顺序进行循环,定义  $D_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) 为多边形顶点距

离对边的最大值,找出极大值  $D_{\max}$  和极小值  $D_{\min}$  (骨料颗粒的粒径),如图 2 所示。

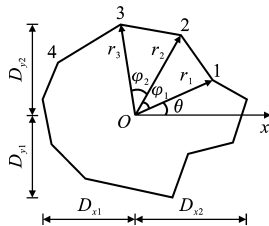


图 1 骨料颗粒的多边形

Fig. 1 Polygon of Aggregate Particle

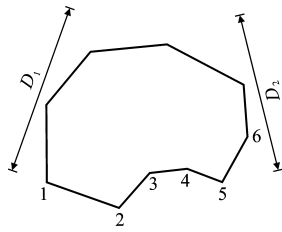


图 2 凹多边形骨料粒径的计算

Fig. 2 Calculation of Particle Size of Concave Polygon Aggregate

(2)由于随机生成的骨料颗粒在粒径上有很大的任意性,因此需要对骨料进行筛选,筛选的目的之一是剔除里面的畸形骨料,二是使骨料粒径的分配满足级配曲线。本文中提出用局部的粒径极值比  $\mu = D_{\max}/D_{\min}$  限值的做法,控制骨料颗粒的形状。显然, $\mu$  越接近于 1,骨料颗粒的形状越规则。本文中  $\mu = 1.5$ ,并且保留了随机颗粒中各凹边的信息。

(3)考虑了 7 个不同骨料颗粒的几何随机特征,如粒径、边数、极半径、粒径极值比等,在其生成各种尺寸的骨料颗粒之后,可以采用蒙特卡罗法,把这些骨料互不相交地随机填充到混凝土试件轮廓线内,但是,完全依靠随机填充,尤其针对高骨料填充率的情况,容易出现通过简单回代重填也难以保证全部骨料得以填充的情况。为了提高骨料投放的时效性及成功率,对于那些经过多次回代也无法填充的相交骨料颗粒,保留其最后位置到骨料投放完成之后,再通过手动调节位置。实践表明,这部分骨料的数量与骨料总的填充个数的比往往低于 5%。

(4)将规则的有限元网格映射到混凝土试件上,建立有限元的数值模型,并根据单元与骨料颗粒的相对位置来确定单元的材料特性,用以代表混凝土的三相结构。当单元位于骨料和砂浆基质之间时,将界面的材料性能分配给该细观单元,而该单元内骨料或基质成分的比例,则可一定程度地影响界面单元的初设弹性模量、强度等力学性质。

### 1.2 随机力学参数

非均匀混凝土材料的随机性,一方面表现在骨料分布的随机性,即几何特征上的随机性;另一方面表现在混凝土细观单元力学性质的随机性,即物理学上的随机性。前者体现在骨料的随机生成及填充上,而后者则体现在弹性模量、强度等力学参数的随机分布上。从物理学角度看,混凝土的力学性质在

空间上具有明显的随机性;但从试验角度来看,可获得统计学意义上的混凝土弹性模量、强度与水灰比、骨料填充率等特征因素的关系曲线,这为初设细观单元的力学参数提供了依据。本文中采用基于 Weibull 分布的随机力学参数模型分析混凝土试件的宏观表征强度及弹性模量。

由于材料力学参数均为正值,则 Weibull 分布的密度函数可写为

$$f(x) = \frac{m}{u_0} \left( \frac{x}{u_0} \right)^{m-1} e^{-\left( \frac{x}{u_0} \right)^m} \quad (1)$$

式中:  $x$  为满足该分布的参数(强度、弹性模量、泊松比等)的数值;  $m$  为均值度,是密度函数分布曲线的形状参数,反映了参数的离散程度,  $m$  值越大,细观单元的材料性质越趋于均匀;  $u_0$  为与所有单元参数平均值有关的参数,由下式定义

$$E(U) = u_0 \Gamma(1 + \frac{1}{m}) \quad (2)$$

本文中着重考虑了细观单元的弹性模量及抗拉强度的随机分布。

## 2 细观单元的弹性损伤本构关系

基于岩石、混凝土类材料细观单元(基元)的各向同性弹性损伤本构模型<sup>[5]</sup>,笔者主要考虑了细观单元可能发生的拉伸及压剪切损伤。相应地采用两个损伤判据:最大拉应变准则;摩尔-库仑准则。

单轴应力环境下,按应变等价原理,可以建立拉伸和压缩状态下损伤变量随应变变化的定量演化方程;而在三轴应力环境下,通过等效主拉应变和主压应变的定义,沿用单轴拉伸损伤及剪切损伤演化方程。

### 2.1 拉伸损伤演化方程

单轴拉伸应力状态下,细观单元的弹性损伤本构关系如图 3 所示。相应地,损伤的定量表达式为

$$D = \begin{cases} 0 & \epsilon < \epsilon_{t0} \\ 1 - \frac{\eta - \lambda \epsilon_0}{\eta - 1} \frac{1 - \lambda}{\epsilon} & \epsilon_{t0} \leq \epsilon < \epsilon_{tr} \\ 1 - \lambda \frac{\epsilon_0}{\epsilon} & \epsilon_{tr} \leq \epsilon < \epsilon_{tu} \\ 1 & \epsilon \geq \epsilon_{tu} \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $\epsilon_{t0}$  为拉应力强度峰值对应的应变;  $\epsilon_{tr}$  为与抗拉残余强度相对应的残余应变,  $\epsilon_{tr} = \eta \epsilon_{t0}$ ,  $\eta$  为残余应变系数,一般取  $1 < \eta \leq 5$ ;  $f_{tr}$  为抗拉残余强度,  $f_{tr} = \lambda f_t = \lambda E_0 \epsilon_{t0}$ ,  $\lambda$  为残余强度系数,  $0 < \lambda \leq 1$ ;  $\epsilon_{tu}$  为极限拉应变,  $\epsilon_{tu} = \xi \epsilon_{t0}$ ,  $\xi$  为极限应变系数,  $\xi > \eta$ 。若超过了极限拉应变  $\epsilon_{tu}$ ,则认为单元达到完全破坏状态,

宏观裂缝出现。本文中  $\eta$  取 1.8,  $\xi$  取 2.5。

### 2.2 压缩剪切损伤演化方程

压缩或者剪切应力状态下,混凝土试件的宏观破坏特征往往表现为局部的剪切带形式。为反映细观单元在该应力状态下的损伤,选用摩尔-库仑准则作为第 2 损伤阈值判据,即

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_1 - \sigma_3 \geq f_c \\ \varphi &= \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \\ \alpha &= \frac{f_t}{f_c} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中:  $\varphi$  为细观单元的摩擦角;  $f_c$ 、 $f_t$  分别为细观单元的单轴抗压强度和单轴抗拉强度;  $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$  分别为细观单元的最大主应力和最小主应力。

对应于图 4 中的单轴压缩应力状态下的本构关系,其损伤变量为

$$D = \begin{cases} 0 & \epsilon > \epsilon_{c0} \\ 1 - \frac{\lambda \epsilon_{c0}}{\epsilon} & \epsilon_{cu} < \epsilon \leq \epsilon_{c0} \\ 1 & \epsilon \leq \epsilon_{cu} \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $\epsilon_{c0}$  为单元应力达到抗压强度时的压应变;  $\epsilon_{cu}$  为极限压应变,取定值为 0.003 3。当应变达到极限压应变时,单元的刚度将急剧退化为接近于 0 矩阵的矩阵<sup>[6]</sup>。

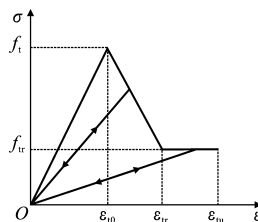


图 3 细观单元单轴拉伸时的损伤本构关系

Fig. 3 Uniaxial Tension Damage Constitutive Relation for Mesoscopic Element

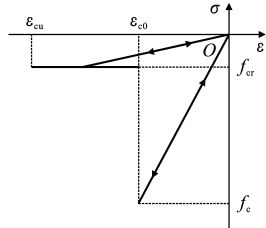


图 4 细观单元单轴压缩时的损伤本构关系

Fig. 4 Uniaxial Compression Damage Constitutive Relation for Mesoscopic Element

### 2.3 三轴应力空间下的损伤演化方程

三轴应力空间可根据 3 个主应力分为 T/T/T、T/T/C、T/C/C 和 C/C/C 四种应力状态(T 和 C 分别表示受拉和受压)<sup>[7-8]</sup>。由此,根据应力比的不同,混凝土的宏观破坏形态可分为拉断、柱状压坏、层状劈裂、斜剪破坏和挤压流动等形式。依其本质,可以将混凝土的破坏机理归结为两种基本形式,分别以单轴拉伸或单轴压缩破坏为代表:①主拉应力作用,

直接产生横向拉断裂缝和破坏;②主压应力作用,引起纵向劈裂裂缝或破坏,包括柱状压坏、斜剪破坏等几种形态。基于此,假定在三向受压 C/C/C 状态下,只考虑  $\sigma_3$  方向引起的压剪切损伤;而在其余的 T/T/T、T/T/C 和 T/C/C 状态下,则只考虑  $\sigma_1$  方向的拉伸损伤。

对于损伤本构关系向三维应力状态推导的过程,文献[1]中,拉伸损伤是按照 Mazars 的方法,用等效应变代替式(3)中的单轴拉应变,剪切损伤是用最大压缩主应变来代替式(5)中的单轴压应变;文献[5]采用单元加载历史上主拉应变的最大值。本文中采用等效应变的方法。

由于损伤阈值是基于应变建立的损伤阈值,因而需要推导出应力-应变的关系。根据广义虎克定律,主应力-主应变的关系可表示为

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (6)$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (7)$$

由此可见,在三轴应力状态下,主拉应力和主拉应变之间及主压应力和主压应变之间并不简单地满足单轴拉伸或单轴压缩的应力-应变关系(图 5、6)。由式(6)、(7)推导出等效应变的表达式(8)、(9),使得主应力  $\sigma_i$  和等效主应变  $\bar{\epsilon}_i$  之间满足单轴的应力-应变关系,从而由等效主应变  $\bar{\epsilon}_i$  代入式(3)、(5)确定损伤值,并对割线模量  $E$  进行折减

$$\bar{\epsilon}_1 = \epsilon_1 + \frac{\mu}{E} (\sigma_2 + \sigma_3) \quad (8)$$

$$\bar{\epsilon}_3 = \epsilon_3 + \frac{\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (9)$$

在式(8)、(9)推导的基础上,可将单轴应力环境下的简单损伤本构关系拓展到三轴应力空间。

### 3 数值模拟

因 ANSYS 仅可进行三维实体元数值破坏分析,故将二维混凝土试件拓展为有一层单元厚度的板状试件结构,这样虽然宏观上对试件施加了单向载荷,但是从细观单元的受力来看,试件均处于三轴应力状态。

#### 3.1 参数设定

首先,建立 100 mm×100 mm 混凝土试件的随机骨料(断面骨料填充率为 45%;骨料粒径为 0.5~1.2 mm,均匀分布)细观数值模型,并由《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2002),设定细观单元的随机力学参数统计量(表 1),使得试件宏观抗拉强

度接近于 C25 和 C40 混凝土的;然后,参照规范中混凝土的抗拉与抗压强度的比来确定各材料的抗压强度,本文中泊松比暂取 0.2,对应均质度为 100。试件加载过程采用位移控制,试件底面节点采用法向约束;考虑到单轴拉伸时极限拉应变较小,加载位移步长取为 0.001 mm;而单轴压缩时,加载位移步长调整为 0.004 mm。

表 1 混凝土试件的 Weibull 分布力学参数

Tab. 1 Mechanical Parameters of Weibull Distribution of Concrete Specimens

材 料	弹性模量均值/GPa		抗拉强度均值/MPa		均值度
	C40	C25	C40	C25	
骨料	60	55	9.0	6.0	9
基质	32	26	5.0	3.5	6
界面	30	23	4.5	2.8	4

### 3.2 结果分析

#### 3.2.1 单轴拉伸损伤破坏

混凝土在单轴拉伸载荷作用下的应力-应变关系的数值模拟结果如图 5 所示。此曲线具有上升段、峰值点和下降段,数值试件 C25 的单轴抗拉强度为 1.36 MPa,峰值点对应的最大拉伸应变为  $5.0 \times 10^{-5}$ ,弹性模量为 27.20 GPa;而数值试件 C40 的单轴抗拉强度为 2.20 MPa,峰值点对应的最大拉伸应变为  $7.0 \times 10^{-5}$ ,弹性模量为 32.43 GPa,符合《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2002)的规定:抗拉强度为 1.36 MPa 时,混凝土弹性模量近似为 23.10 GPa;抗拉强度为 2.20 MPa 时,混凝土弹性模量近似为 32.00 GPa。

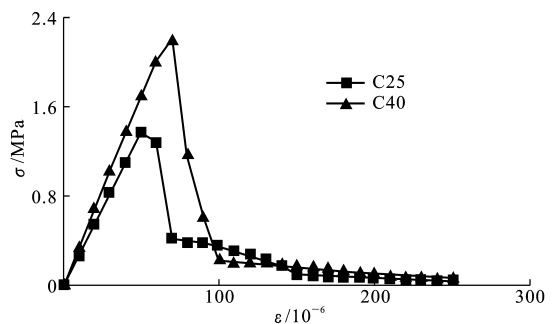


图 5 单轴拉伸时的应力-应变关系

Fig. 5 Relation of Stress and Strain Under Uniaxial Tension

单轴拉伸应力状态下,由试件的宏观应力-应变响应曲线可知,在加载初期较低的应力状态下,单元的初始损伤极小;而随着载荷的增加,在骨料和基质粘结的部分首先出现拉伸损伤单元,尤其是骨料颗粒多边形的角点等处。由于骨料尖角处不易和砂浆基质黏结,因而,角点处的界面单元又是界面单元中

的薄弱单元。单元拉伸损伤会逐步增大直至破坏,形成一些细小的拉裂纹,这些微裂纹主要水平分布于试件的中下部,而发生损伤或破坏的细观单元会导致整个试件的应力重分布,在它们周围易形成新的应力集中区,从而使得损伤区域扩展。尤其达到峰值之后,大量的骨料以外的单元开始损伤,并且破坏了的单元贯通形成宏观裂缝,试件的承载力也不断降低。最后,由于中部附近产生与受载方向垂直的宏观裂纹带使得试件最终破坏。

### 3.2.2 单轴压缩损伤破坏

混凝土在单轴压缩载荷作用下的应力-应变关系的数值模拟结果如图 6 所示。此曲线同样具有上升段、峰值点和下降段。计算结果表明,数值试件 C25 的单轴抗压强度为 17.58 MPa,峰值点对应的最大压应变为  $6.8 \times 10^{-4}$ ,弹性模量为 25.85 GPa,试件的拉压强度比值为 12.93;而数值试件 C40 的单轴抗压强度为 28.72 MPa,峰值点对应的最大压应变为  $8.8 \times 10^{-4}$ ,弹性模量为 32.64 GPa,试件的拉压强度比值为 13.05,符合《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2002)的规定:抗压强度为 17.58 MPa 时,混凝土弹性模量近似为 26.14 GPa,试件的拉压强度比值为 9.60;抗压强度为 28.72 MPa 时,混凝土弹性模量近似为 33.18 GPa,试件的拉压强度比值为 11.63。

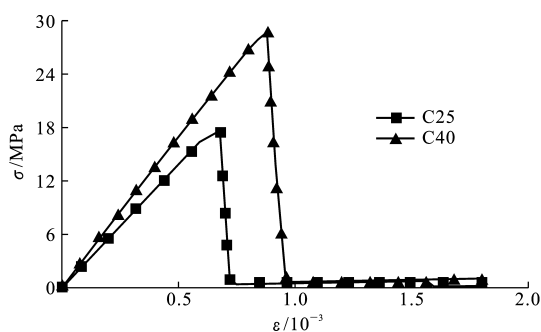


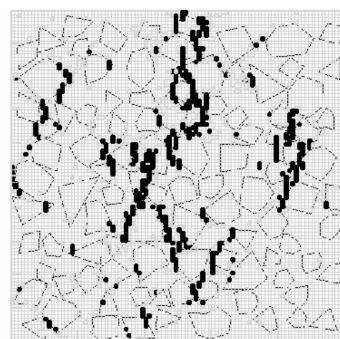
图 6 单轴压缩时的应力-应变关系

Fig. 6 Relation of Stress and Strain Under Uniaxial Compression

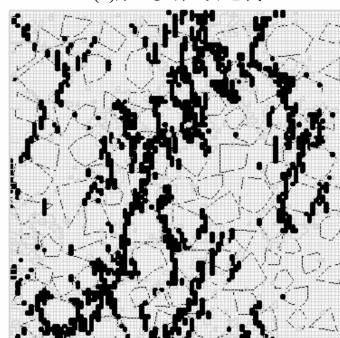
在单轴压缩初始加载低应力状态下,细观单元只表征出拉损伤及拉破坏,且全部位于骨料多边形角点处的界面单元。与第 3.2.1 节中单轴拉伸状态时相比,初始损伤的单元并不是布满整个试件,而是沿着与加载载荷平行的竖直向扩展。在加载达到峰值载荷后,才有细观单元发生压剪损伤,并且逐渐在试件的中部形成一些局部连通的裂纹;这些细小裂纹扩展并进而形成一条连通的竖向裂缝,同时试件的左上角和右侧也有小裂纹出现,如图 7(a)所示。

在试件中部竖向的主要裂缝扩展过程中,不断有一些平行的斜裂纹出现,如图 7(b)所示。最后,两条宏观裂纹形成一个倒 V 字形裂纹带,一条从顶面的中部延伸到底面的左下角,另一条从顶面的中部延伸到底面的右下角,如图 7(c)所示。

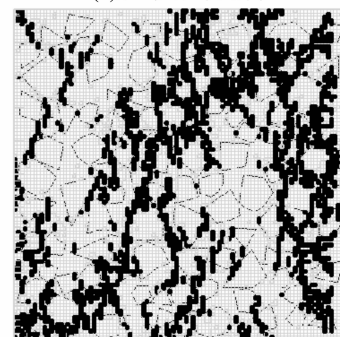
剪切带反映的损伤局部化只是形成于应力峰值后的软化段,且存在有两种明显的局部化模式<sup>[9]</sup>:平行剪切带与共轭剪切带。对于高径比较小的试件(如高径比值为 1 和 0.5 时),最终的局部化剪切带模式主要是互相交错的共轭剪切带;而对于高径比较大的试件(如高径比值为 2),损伤演化的局部化模式则比较复杂,可能还会出现平行剪切带或单一剪切带。本文中的数值模拟结果中,出现了大量的共轭剪切带及平行剪切带。



(a)第23步第4次迭代



(b)第23步第9次迭代



(c)第45步

图 7 单轴压缩时的损伤破坏过程

Fig. 7 Process of Damage and Fracture Under Uniaxial Compression

## 4 结 语

(1)本文中算例显示,利用细观单元简单的弹性损伤本构关系,能够反映出混凝土试件破坏的典型形式,并且从混凝土试件表征的宏观强度来看,针对 C25 和 C40 混凝土进行的单轴拉伸及压缩破坏数值模拟是有效的,得到峰值压拉强度比值分别为 12.93 和 13.05,位于合理范围内,符合混凝土随着抗压强度的提高,压拉比逐步增加的趋势。

(2)单轴拉伸及单轴压缩状态下,细观单元均主要表现出拉损伤破坏。从宏观角度看,单轴拉伸条件下,最终贯穿裂缝呈现水平状,与加载方向垂直;

而单轴压缩条件下,压破坏(剪切破坏)的细观单元数目很少,最终,试件内的贯穿裂缝呈现出明显的局部化剪切带或竖直劈裂特征。

(3)静载或缓慢加载条件下,单轴拉伸或单轴压缩状态时扩展的宏观裂缝(被破坏单元)整体上均是绕过骨料颗粒的;但从单轴压缩状态下细观单元的损伤破坏结果分析来看,局部位置处,部分骨料单元,尤其是与基质相接处,部分细观单元也出现拉破坏,且 C25 及 C40 混凝土都存在这种现象。这一方面是由于周围细观单元破坏导致应力集中造成的;另一方面,由于骨料的力学参数也是随机确定的,有可能这些骨料单元的弹性模量与抗压强度均比较小。值得注意的是,单轴拉伸状态下不存在细观骨料单元破坏的现象。

(4)静载工况可以看作动力数值分析时一个子步上的迭代过程,因此,本文中地对地震载荷作用下混凝土的动力损伤破坏过程的细观机理研究有着重要的意义。

#### 参考文献:

#### References:

- [1] 唐春安,朱万成.混凝土损伤与断裂——数值试验[M].北京:科学出版社,2003.  
TANG Chun-an,ZHU Wan-cheng. Damage and Fracture of Concrete: Numerical Test[M]. Beijing: Science Press,2003.
- [2] 马怀发,陈厚群,黎保琨.混凝土细观力学研究进展及评述[J].中国水利水电科学研究院学报,2004,2(2): 124-130.  
MA Huai-fa,CHEN Hou-qun,LI Bao-kun. Review on Micro-mechanics Studies of Concrete[J]. Journal of China Institute of Water Resources and Hydropower Research,2004,2(2):124-130.
- [3] 闫晓荣.正交各向异性损伤模型在混凝土抗震安全评价中的作用[D].大连:大连理工大学,2005.  
YAN Xiao-rong. Effect of Orthotropy Damage Model on Concrete Anti-seismic Safety Evaluation [D]. Dalian:Dalian University of Technology,2005.

- [4] 张剑,金南国,金贤玉,等.混凝土多边形骨料分布的数值模拟方法[J].浙江大学学报:工学版,2004,38(5):581-585.  
ZHANG Jian,JIN Nan-guo,JIN Xian-yu, et al. Numerical Simulation Method for Polygonal Aggregate Distribution in Concrete[J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science,2004,38(5):581-585.
- [5] 马怀发,陈厚群,黎保琨.混凝土试件细观结构的数值模拟[J].水利学报,2004,52(10):27-35.  
MA Huai-fa,CHEN Hou-qun,LI Bao-kun. Meso-structure Numerical Simulation of Concrete Specimen [J]. Journal of Hydraulic Engineering,2004,52(10): 27-35.
- [6] 刘金庭,朱合华,莫海鸿.非均质混凝土破坏过程的细观数值试验[J].岩石力学与工程学报,2005,24(22): 4 120-4 133.  
LIU Jin-ting,ZHU He-hua,MO Hai-hong. Meso-structure Numerical Test of Nonuniformity Concrete Damage Process[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2005,24(22):4 120-4 133.
- [7] 过镇海.混凝土的强度和变形-试验基础和本构关系[M].北京:清华大学出版社,1997.  
GUO Zhen-hai. Strength and Distortion of Concrete: Test Basis and Constitutive Relation[M]. Beijing: Tsinghua University Press,1997.
- [8] 宋玉普.多种混凝土材料的本构关系和破坏准则[M].北京:中国水利水电出版社,2002.  
SONG Yu-pu. Constitutive Relation and Failure Criterion of Multiple Concrete Material[M]. Beijing: China Water Conservancy and Electric Power Press,2002.
- [9] 徐涛,于世海,王述红,等.岩石细观损伤演化与损伤局部化的数值研究[J].东北大学学报:自然科学版,2005,26(2):160-163.  
XU Tao,YU Shi-hai,WANG Shu-hong, et al. Numerical Investigation on Mesoscopic Damage Evolution and Localization Behaviors of Rock[J]. Journal of Northeastern University: Natural Science,2005,26(2): 160-163.