

文章编号: 1673-2049(2007)02-0001-05

岩土材料基本力学特性与屈服准则体系

郑颖人¹, 高红²

(1. 中国人民解放军后勤工程学院 土木工程系, 重庆 400041;

2. 中国科学院岩土力学研究所 岩土力学重点实验室, 湖北 武汉 430071)

摘要: 比较了岩土材料与金属材料特性及其力学性质差异, 认为岩土材料属于多相体的摩擦型材料, 存在内摩擦性质, 并对岩土材料在弹性状态及极限状态下的摩擦特性进行了分析。详细介绍了高红-郑颖人岩土材料三剪能量屈服准则, 给出了其在各种特殊情况下的具体形式, 并与 Mohr-Coulomb 准则进行了比较, 提出了三剪能量与三剪应力状态下的 Drucker-Prager 准则。最后总结了各国常用的应力与应变屈服准则及能量屈服准则, 并对其进行了分析比较。

关键词: 摩擦特性; 三剪; 能量; 屈服准则; 岩土材料

中图分类号: TU411.7 **文献标志码:** A

Basic Mechanics Characteristics and Yield Criterion System of Geomaterials

ZHENG Ying-ren¹, GAO Hong²

(1. Department of Civil Engineering, Logistical Engineering University of PLA, Chongqing 400041, China;

2. Key Laboratory of Rock and Soil Mechanics, Institute of Rock and Soil Mechanics, CAS, Wuhan 430071, Hubei, China)

Abstract: After comparing the difference of material properties and the induced difference of mechanics characteristics between metals and geomaterials, it was concluded that geomaterials were frictional materials with multiphase and had frictional properties. The frictional characteristics of geomaterials in elastic state and limit state were analyzed respectively. The triple shear energy yield criterions of geomaterials of Gao Hong and Zheng Ying-ren were introduced in detail, and the formulations in some special conditions were presented and compared with the Mohr-Coulomb criterion, then the triple shear energy and the triple shear Drucker-Prager criterion were put forward. At last, the commonly used stress and strain yield criterions as well as energy yield criterion were summarized and compared in every country.

Key words: frictional characteristic; triple shear; energy; yield criterion; geomaterial

0 引言

土力学的发展已有 200 多年的历史, 岩石力学的发展也有半个多世纪, 逐渐成为固体力学中的一个分支。岩土力学一方面不断地体现出岩土材料的力学特性, 促进了自身的发展; 另一方面又受到传统

固体力学的制约, 使岩土力学的发展受到阻碍^[1-3], 例如, 在岩土极限分析、塑性力学等方面, 岩土力学学者已经意识到必须克服传统固体力学的制约^[4], 将传统固体力学发展改造成具有内摩擦特性的真正的岩土力学; 此外, 在岩土弹性力学、能量理论甚至损伤理论等方面, 仍然受到传统力学的严重制约, 即

未体现岩土材料的力学特性,这样理论当然难以符合岩土工程实际。本文的目的是通过探讨,正确认识岩土材料的基本力学特性,从而自觉地将传统固体力学发展改造成适用于岩土材料的固体力学-摩擦体力学。由于岩土材料的屈服准则可以较好地反映岩土摩擦特性,因而笔者归纳分析了能体现岩土摩擦特性的岩土屈服准则,并形成了岩土与金属材料的屈服准则体系。

1 岩土材料的基本力学特性

岩土力学与传统力学的区别,源于岩土材料与金属材料不同的力学特性。岩土材料是自然条件下由颗粒材料堆积或胶结而成,因而岩土材料是多相的颗粒体,既具有固、水、气三相特性,又具有内摩擦性质^[5]。此外,岩土材料是一种双强度材料,既具有黏结力,又具有摩擦力,这就存在 2 种强度发挥与衰减的先后问题,它们对岩土力学计算是有影响的。岩土材料这些特性正是它不同于金属材料的基本力学特性。从内摩擦角度来看,岩土属于颗粒摩擦体,是固体的一种特殊情况,因而它的力学单元与传统固体力学单元不同,如图 1 所示。摩擦体的单元中存在摩擦力 s ,在非极限状态下,假设摩擦力与法向力成正比, $s = p \tan \varphi'$, p 为法向力, $\tan \varphi'$ 为摩擦因数,但它不是常数,随位移的增大而增大,直至极限状态下 $\varphi' = \varphi$,此时内摩擦因数为—常数。

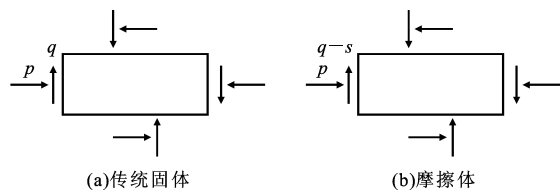


图 1 传统固体与摩擦体的力学单元

Fig. 1 Mechanics Unit of Traditional Solid and Frictional Solid

由于摩擦体的内摩擦力方向与剪应力 q 的方向相反,因而它的内摩擦力是有利的,相当于强度。在极限状态下, $q - p \tan \varphi = c$,即为库仑公式, $p \tan \varphi$ 为摩擦强度, c 为黏结力。

由图 1 可以看出,摩擦体的基本力学特性存在内摩擦力,无论材料处于弹性状态还是处于塑性状态,这种内摩擦力是始终存在的,可见传统的弹性力学与塑性力学均不适用于岩土材料,它们没有考虑其内摩擦力的存在。

由于处在极限状态下,岩土体的 c 、 φ 得到了充分的发挥,因而可以进行合理计算,但当岩土体处在

非极限状态时,还不清楚 c 、 φ 如何发挥作用,哪一种先发挥作用。这是双强度岩土材料力学计算中遇到的新问题。尽管目前还缺乏研究,但从土体剪切试验的剪应力与水平位移关系中看出,如图 2(a)所示,当碎石的质量分数为 80%,水的质量分数 $w = 9\%$ 时,碎石土 $c = 15 \text{ kPa}$, $\varphi = 38^\circ$,可见这是一种黏结力较小、内摩擦角较大的土体。由图 2(a)可以看出,当水平位移很小时,抗剪强度迅速增加,表明黏结力发挥了作用。随着水平位移的增大,抗剪强度逐渐增大,表明内摩擦力逐渐发挥作用,当水平位移达到 28 mm (约为试件尺寸的 11%),法向力为 100 kPa 时,抗剪强度达到极限值即 95 kPa,基本满足库仑条件, $95 \approx 15 + 100 \tan 38^\circ = 93$;当水平位移达到 30 mm,法向力为 200 kPa 时,抗剪强度达到极限值,也近似满足库仑条件,但当法向力为 300 kPa 时,抗剪强度达到极限值即 230 kPa,其值小于库仑条件,表明法向力大时,摩擦因数在极限情况下随着法向力的增高将有所下降。由此可见,抗剪强度中 c 最早发挥作用,此时曲线很陡,摩擦力则随着水平位移的增大而逐渐发挥作用。当法向力不大时,摩擦力发挥作用较快,达到极限状态时摩擦因数基本为一常数;但当法向力较大时,极限状态时摩擦因数将有所减小。如图 2(b)所示,当碎石的质量分数为 20%,水的质量分数 $w = 9\%$ 时, $c = 30 \text{ kPa}$, $\varphi = 26^\circ$,这是一种内摩擦角与黏结力相当的土体。由图 2(b)可以看出:水平位移很小时曲线很陡, c 发挥作用;摩擦力随着水平位移的增大而增大,直至达到极限值。在这种情况下,无论法向力有多大,极限状态时内摩擦因数基本不变,因而可视为常数。

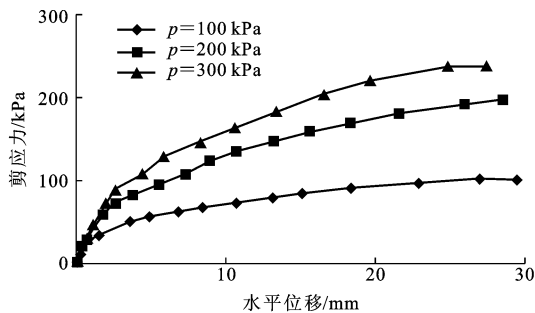
综上所述,黏结力 c 最早发挥作用,摩擦力随着水平位移的增大而逐渐发挥作用。在非极限状态下,摩擦因数并非为常数,随着水平位移的增大近似按双曲线规律增大,直至达到极限状态时为一常数;而对 c 值较小,内摩擦角 φ 值较大的土体,当法向力较大时,摩擦因数将有所降低。

由此可知,在非极限状态下,岩土体内也存在摩擦力,因而如何建立摩擦体弹性力学有待进一步研究,它可以更好地体现岩土力学的特点并准确地反映土体中任一点的弹性应力与位移。

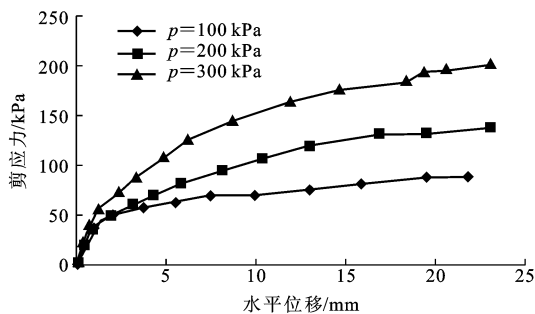
2 三剪能量屈服准则

高红等提出了岩土材料在三剪状态下的能量屈服准则

$$[p \sin \varphi + \frac{q}{3}(\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \sin \varphi)]^2 =$$



(a) 碎石质量分数为80%的碎石土



(b) 碎石质量分数为20%的碎石土

图 2 水平位移与剪应力的关系

Fig. 2 Relation of Horizontal Displacements and Shearing Stresses

$$(2c \cos \varphi \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3} \tan \theta \sin \varphi}{3 + 3 \tan^2 \theta - 4 \sqrt{3} \tan \theta \sin \varphi}})^2 \quad (1)$$

式中: θ 为洛德角。

式(1)开方后为

$$p \sin \varphi + \frac{q}{3} (\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \sin \varphi) =$$

$$2c \cos \varphi \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3} \tan \theta \sin \varphi}{3 + 3 \tan^2 \theta - 4 \sqrt{3} \tan \theta \sin \varphi}} \quad (2)$$

式(1)为岩土材料的三剪能量屈服准则,对金属材料可简化为 Mises 准则。式(2)为三剪应力准则,在单剪情况下可简化为 Mohr-Coulomb 准则,可见 Mohr-Coulomb 准则也是单剪能量准则。

式(2)与 Mohr-Coulomb 准则公式相似,只是其常数项为与洛德角 θ 有关的一常数。由此可知,其子午平面上的屈服曲线为一直线,并与 Mohr-Coulomb 线平行(图 3),只是截距大于 Mohr-Coulomb 线,表明 Mohr-Coulomb 准则比三剪能量屈服准则更加保守。在偏平面上的屈服曲线为一曲边三角形(图 4),这与各国大量真三轴的试验结果是一致的,表明三剪能量屈服准则是符合岩土材料实际的;同样,偏平面上的屈服曲线也稍大于 Mohr-Coulomb 屈服曲线。

在用三剪能量屈服准则确定岩土材料破坏剪切面的能量时,三剪能量屈服准则仿照 Mises 准则,即

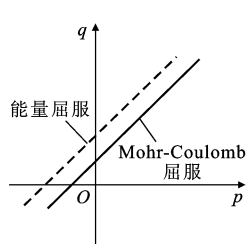


图 3 子午面上能量屈服

Fig. 3 Energy Yield in Meridian Plane

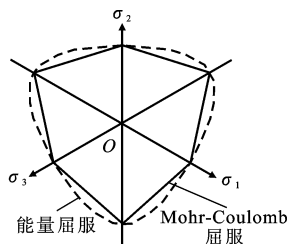


图 4 偏平面上能量屈服

Fig. 4 Energy Yield in Partial Plane

将 3 个破坏剪切面上的能量相加而得。显然在求解破坏剪切面时必须考虑岩土的特点,因为岩土材料的破坏剪切面与金属材料的破坏剪切面是不同的;同时在确定岩土材料剪切面上的形变能时,必须考虑摩擦力的形变能,由此岩土材料的能量理论中也必须考虑摩擦能,以体现岩土材料的特性。

式(2)中常数项含有洛德角 θ ,反映了中主应力的影响。常规三轴压缩试验时, $\sigma_2 = \sigma_3$, $\theta = 30^\circ$,此时式(2)即为 Mohr-Coulomb 准则;同理,常规三轴拉伸试验时, $\sigma_1 = \sigma_2$, $\theta = -30^\circ$,此时式(2)也为 Mohr-Coulomb 准则,在这种情况下,三剪能量屈服准则与 Mohr-Coulomb 准则一致。

与 Mohr-Coulomb 准则相似,当洛德角 θ 为常量时,可得到单剪应力状态下 Drucker-Prager 准则;同样,可由式(2)得出三剪能量与三剪应力状态下的 Drucker-Prager 准则为

$$\alpha_a I_1 + \sqrt{J_2} - k_a = 0 \quad (3)$$

当 $\theta = 30^\circ$ 时,有 q_{\max} ,三剪能量屈服准则与 Mohr-Coulomb 准则的三轴压缩试验情况相当,此时

$$\left. \begin{aligned} \alpha_a &= \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \\ k_a &= \frac{6 c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

当 $\theta = -30^\circ$ 时,有 q_{\min} ,三剪能量屈服准则与 Mohr-Coulomb 的三轴拉伸试验相当,此时

$$\left. \begin{aligned} \alpha_a &= \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)} \\ k_a &= \frac{6 c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

当 $\theta = 0^\circ$ 时,三剪能量屈服准则为采用非关联流动法则的平面应变情况,三剪应力情况与 Mohr-Coulomb 准则单剪应力情况不同,在三剪应力情况下有

$$p \sin \varphi + \frac{q}{\sqrt{3}} = \frac{2 c \cos \varphi}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

此种情况下,式(2)中的常数项比 Mohr-Coulomb 准则公式中的增大了1.157倍,并有

$$\left. \begin{aligned} \alpha_a &= \sin \varphi \\ k_a &= \frac{2}{\sqrt{3}} c \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

(7)

最后应当指出,式(2)不适用于 $c=0$ 的情况,因为此时常数项为 0,不能反映中主应力的影响,此时,式(2)与 Mohr-Coulomb 准则公式相同。

3 材料屈服准则体系

表 1、2 分别为各国常用的应力、应变与能量屈服准则^[6-8],这里不包括一些试验拟合得到的准则,也不包括双剪应力准则、松冈元三剪切角准则;同时该屈服准则只适用于极限曲线为直线的情况,不包

括双曲线、椭圆等二次极限曲线。表 1 为应力表述的各种屈服准则。根据弹性状态下应力与应变不变量的关系,有

$$\left. \begin{aligned} p &= KI'_1 = 3K\epsilon_m \\ q &= \sqrt{3J_2} = 2G \sqrt{3J_2} = 3G\bar{\gamma} \\ c &= G\gamma_s \\ \theta_\sigma &= \theta_\epsilon \end{aligned} \right\}$$

(8)

式中: I'_1 、 J'_2 、 θ_ϵ 分别为应变第一不变量、偏应变第二不变量与应变洛德角。由此可得到各种应变表述的屈服准则^[9]。表 2 为应变表述的各种屈服准则。能量表述的屈服准则与应力表述的屈服准则只差一个平方关系,且后者更为简洁,因而这里不再列出。

从表 1、2 可以看出,任何屈服准则,无论是采用

表 1 应力表述的屈服准则

Tab. 1 Yield Criterion of Stress Expression

材料	单剪情况		三剪情况	
	屈服准则	公 式	屈服准则	公 式
金属	Tresca	$\sigma_1 - \sigma_3 = k$	Mises	$J_2 = C$
岩土	Mohr-Coulomb	$p \sin \varphi + \frac{q}{3} (\sqrt{3} \cos \theta_\sigma - \sin \theta_\sigma \sin \varphi) = c \cos \varphi$	高红-郑颖人	$p \sin \varphi + \frac{q}{3} (\sqrt{3} \cos \theta_\sigma - \sin \theta_\sigma \sin \varphi) = 2c \cos \varphi \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3} \tan \theta \sin \theta}{3 + 3 \tan^2 \theta - 4 \sqrt{3} \tan \theta \sin \theta}}$
	Drucker-Prager	$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0$	Drucker-Prager	$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0$
		$\theta = 30^\circ$ (三轴压缩) $\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, k = \frac{6 c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$		$\theta = 30^\circ$ (三轴压缩) $\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, k = \frac{6 c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$
		$\theta = -30^\circ$ (三轴拉伸) $\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}, k = \frac{6 c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$		$\theta = -30^\circ$ (三轴拉伸) $\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}, k = \frac{6 c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$
		$\theta = 0^\circ$ (非关联平面应变) $\alpha = \sin \varphi, k = c \cos \varphi$		$\theta = 0^\circ$ (非关联平面应变) $\alpha = \sin \varphi, k = \frac{2}{\sqrt{3}} c \cos \varphi$

表 2 应变表述的屈服准则

Tab. 2 Yield Criterion of Strain Expression

材料	单剪情况		三剪情况	
	屈服准则	公 式	屈服准则	公 式
金属	Tresca	$\epsilon_1 - \epsilon_3 = \gamma_s$	Mises	$\sqrt{J_2} - \gamma_s/2 = 0$
岩土	Mohr-Coulomb	$2 \sin \varphi \frac{1+\nu}{1-2\nu} \epsilon_m + (\sqrt{3} \cos \theta_\epsilon - \sin \theta_\epsilon \sin \varphi) \bar{\gamma} = \gamma_s \cos \varphi$	高红-郑颖人	$2 \sin \varphi \frac{1+\nu}{1-2\nu} \epsilon_m + (\sqrt{3} \cos \theta_\epsilon - \sin \theta_\epsilon \sin \varphi) \bar{\gamma} = 2 \gamma_s \cos \varphi \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3} \tan \theta_\epsilon \sin \varphi}{3 + 3 \tan^2 \theta_\epsilon - 4 \sqrt{3} \tan \theta_\epsilon \sin \varphi}}$
	Drucker-Prager	$\alpha' I'_1 + \sqrt{J'_2} - k' = 0$	Drucker-Prager	$\alpha'_a I'_1 + \sqrt{J'_2} - k'_a = 0$
		$\theta = 30^\circ$ (三轴压缩) $\alpha' = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, k' = \frac{3 \gamma_s \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$		$\theta = 30^\circ$ (三轴压缩) $\alpha'_a = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, k'_a = \frac{3 \gamma_s \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$
		$\theta = -30^\circ$ (三轴拉伸) $\alpha' = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}, k' = \frac{3 \gamma_s \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$		$\theta = -30^\circ$ (三轴拉伸) $\alpha'_a = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}, k'_a = \frac{3 \gamma_s \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$
		$\theta = 0^\circ$ (非关联平面应变) $\alpha' = \frac{\sin \varphi}{3} \frac{1+\nu}{1-2\nu}, k' = \frac{\gamma_s \cos \varphi}{2}$		$\theta = 0^\circ$ (非关联平面应变) $\alpha' = \frac{\sin \varphi}{3} \frac{1+\nu}{1-2\nu}, k' = \frac{\gamma_s \cos \varphi}{2}$

应力、应变或能量表述,尽管其形式不同,但其实质是一致的。高红-郑颖人岩土材料三剪能量屈服准则适用于任何情况下的屈服准则,是各种屈服准则的统一表达式。Mohr-Coulomb 准则是单剪应力准则,也是单剪能量准则,它是单剪情况下的统一表达式。Mises 准则既是金属材料三剪能量准则,也是三剪应力准则,是金属材料的统一准则,它也是高红-郑颖人岩土材料三剪能量屈服准则中的一种特殊情况。Drucker-Prager 准则是岩土材料在单剪情况下洛德角 θ 为常量时的屈服准则,因而在偏平面上均为一圆;同时,笔者又提出了岩土材料在三剪情况下洛德角 θ 为常量时的屈服准则,也称为三剪 Drucker-Prager 准则。岩土材料屈服准则中,由郑颖人等提出的强度准则有三剪能量、三剪应力、Mohr-Coulomb 等面积圆、平面应变、三剪 Drucker-Prager 等系列准则。

4 结 语

(1) 比较了岩土类材料与金属材料特性及其力学性质之间的差异,认为岩土材料存在内摩擦性质,并对岩土材料在弹性状态及极限状态的摩擦特性进行了分析。

(2) 详细介绍了笔者提出的高红-郑颖人岩土材料三剪能量屈服准则,给出了其在各种特殊情况下的具体形式,并与 Mohr-Coulomb 准则进行了比较,提出了三剪能量与三剪应力状态下的 Drucker-Prager 准则。

(3) 总结了各国常用的应力与应变屈服准则及能量屈服准则,并对其进行了分析比较。

参考文献:

References:

- [1] 易伟建,杨随新. 软土地基上的土-结构动力相互作用[J]. 建筑科学与工程学报,2005,22(2):61-65.
YI Wei-jian, YANG Sui-xin. Soil-structure Dynamic Interaction Based on Soft Soil Foundation[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering,2005,22(2):61-65.
- [2] 张仪萍,曹国强,李 涛,等. 分级加载条件下沉降预测方法[J]. 中国公路学报,2005,18(1):30-33.
ZHANG Yi-ping, CAO Guo-qiang, LI Tao, et al. Prediction Method of Settlement Under Multi-stage Load-

- ing[J]. China Journal of Highway and Transport, 2005,18(1):30-33.
- [3] 夏建中,江 雯,谢康和. 成层非均质地基一维固结方程半解析求解[J]. 中国公路学报,2006,19(3):8-11.
XIA Jian-zhong, JIANG Wen, XIE Kang-he. Semi-analytical Solution to One-dimensional Consolidation Equation of Layered Non-homogeneous Subgrade[J]. China Journal of Highway and Transport, 2006, 19(3):8-11.
- [4] 郑颖人,沈珠江,龚晓南. 广义塑性力学——岩土塑性力学原理[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2002.
ZHENG Ying-ren, SHEN Zhu-jiang, GONG Xiao-nan. Generalized Plasticity—Soil and Rock Plasticity Principle[M]. Beijing:China Architecture & Building Press, 2002.
- [5] 松冈元. 土力学[M]. 罗 汀,姚仰平,译. 北京:中国水利水电出版社,2001.
MATSUYOKA H. Soil Mechanics [M]. Translated by LUO Ting, YAO Yang-ping. Beijing: China Water Conservancy and Electric Power Press,2001.
- [6] 陈惠发,萨里普 A F. 混凝土和土的本构方程[M]. 余天庆,王勋文,刘西拉,等译. 北京:中国建筑工业出版社,2004.
CHEN Hui-fa, SALIPU A F. Concrete and Soil Constitutive Equation[M]. Translated by YU Tian-qing, WANG Xun-wen, LIU Xi-la, et al. Beijing: China Architecture & Building Press,2004.
- [7] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京:中国水利水电出版社,2000.
SHEN Zhu-jiang. Academic Soil Mechanics[M]. Beijing: China Water Conservancy and Electric Power Press,2000.
- [8] 徐干成,郑颖人. 岩土工程中屈服准则应用的研究[J]. 岩土工程学报,1990,12(2):93-99.
XU Gan-cheng, ZHENG Ying-ren. Study on the Application of Yield Criteria in the Geotechnical Engineering [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1990,12(2):93-99.
- [9] 陈长安,郑颖人. 应变空间的岩土屈服条件与本构关系[J]. 应用数学和力学,1985,6(7):20-28.
CHEN Chang-an, ZHENG Ying-ren. Strain Space Soil and Rock Yield Condition and Constitutive Equation [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1985,6(7):20-28.