

文章编号:1673-2049(2007)03-0043-04

## 黄土增湿变形的数值模型

梁 燕<sup>1</sup>, 赵桂娟<sup>2</sup>, 谢永利<sup>1</sup>, 李同录<sup>3</sup>

(1. 长安大学 特殊地区公路工程教育部重点实验室, 陕西 西安 710064; 2. 西安科技大学 建筑与土木工程  
学院, 陕西 西安 710054; 3. 长安大学 地质工程与测绘学院, 陕西 西安 710054)

**摘要:**以甘肃陇西自重湿陷性黄土作为研究对象,基于黄土湿陷过程中变形与渗流耦合的思想,建立了黄土增湿变形的数值模型。依据质量守恒定律和达西定律,建立了考虑变形影响的适合非饱和和土-饱和土的、非稳态的轴对称黄土渗流连续性基本方程。参考陇西自重湿陷性黄土室内侧限压缩试验数据建立了黄土增湿变形本构模型;采用 Galerkin 加权残值法对基本方程进行空间离散;在时间域内用差分方法离散,建立了考虑渗流和变形耦合的黄土增湿变形有限元支配方程,并提出了求解方法。研究结果表明:在研究黄土增湿变形过程中,考虑变形与渗流耦合的作用是可行的,建立的黄土增湿变形有限元模型是合理的。

**关键词:**湿陷性黄土;渗流;增湿变形;渗流与变形耦合;有限元模型

**中图分类号:**TU444 **文献标志码:**A

## Numerical Model of Loess Moistening Deformation

LIANG Yan<sup>1</sup>, ZHAO Gui-juan<sup>2</sup>, XIE Yong-li<sup>1</sup>, LI Tong-lu<sup>3</sup>

(1. Key Laboratory of Highway Engineering in Special Region of Ministry of Education, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China; 2. School of Civil Engineering and Architecture, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, Shaanxi, China; 3. School of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054, Shaanxi, China)

**Abstract:** Taking collapsible loess from Longxi region of Gansu Province as research object, the numerical model of loess moistening deformation was established, which considered the coupling of permeation and deformation. According to the conservation of mass and Darcy's law, the axis-symmetry permeation continuity equation was established, which fitted unsaturated soils and saturated soils, and the influence of deformation was considered. Constitutive model of loess collapse was established on the basis of the indoor consolidation tests. Because the permeation continuity equation and the basic equation of loess moistening deformation were all nonlinear, the numerical analysis method was adopted in solving equations. Space was parted by Galerkin method. Time field was parted by difference method. The finite element model (FEM) for the collapsible deformation of loess was gotten, and the solution of the FEM equation was presented. Results demonstrate that it is recommendable to consider the coupling of permeation and deformation in the research of loess moistening deformation, and the FEM model of loess moistening deformation is reasonable.

**Key words:** collapsible loess; permeation; moistening deformation; coupling of permeation and deformation; finite element model

收稿日期:2007-05-19

基金项目:国家自然科学基金项目(59870401);国家西部交通建设科技项目(2001 318 812 14)

作者简介:梁 燕(1968-),女,山西孝义人,讲师,工学博士,E-mail:yanlmnop@yahoo.com.cn.

## 0 引言

由于黄土湿陷具有突变性、非连续性和不可逆性,对工程建设的危害很大,加之中国黄土的分布范围很广,因此,预测黄土湿陷变形量对工程建设有着很重要的意义。黄土湿陷是遇水发生的,水在土中的渗流又会受到湿陷变形的影响,因此计算黄土湿陷变形宜采用渗流和变形耦合的方法。目前,关于黄土湿陷的物理力学性质的研究较多,关于湿陷数值计算的文献较少。焦彦利<sup>[1]</sup>引入了黄土增湿变形的计算模块计算黄土湿陷,但在建立非饱和黄土的入渗模型时,未考虑重力对入渗的影响,假定土体为刚性多孔介质,土体传导区内水分运动通量不随位置而变化,它仅是时间的函数,这些都是不切合实际的。笔者基于变形和渗流耦合的思想,建立了黄土增湿变形有限元模型,进而可以预测黄土增湿变形。

## 1 耦合原理

影响黄土增湿变形量的因素有黄土的性质、含水量和压力等,水在黄土中渗流时,其含水量是随时空不断变化的,因此,渗流对黄土增湿变形有很大的影响<sup>[2]</sup>。

黄土浸水后,随着水的渗流,土中的含水量发生了变化,如黄土发生了湿陷,土体的总体积也就发生了变化,即孔隙比发生了变化了,含水量和孔隙比的变化,引起了黄土渗透系数的变化,从而影响水在黄土中的渗流。因此黄土的湿陷变形将对渗流产生必然的影响,所以,黄土湿陷变形和渗流是相互影响的,用变形和渗流耦合的思想研究黄土湿陷性具有重要的实际意义。

## 2 耦合方程

### 2.1 考虑变形影响的渗流连续性基本方程

建立柱坐标系,其中 $z$ 轴向下为正,坐标系中任一点由3个坐标给出:垂直坐标 $z$ 、半径 $r$ 、角度 $\varphi$ 。在饱和、非饱和介质(土体)中取出一微分单元体,边界分别为 $dz$ 、 $dr$ 、 $d\varphi$ ,假定流体(水)密度不随时间而变化,且无源和汇情况下,根据质量守恒定律, $\Delta t$ 时间内流入和流出单元体的水量差等于单元体内水分的增量,即

$$-(q_r + r \frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial q_z}{\partial z}) \Delta r \Delta \varphi \Delta z \Delta t = \frac{\partial(\theta r \Delta r \Delta \varphi \Delta z)}{\partial t} \Delta t \quad (1)$$

式中: $\theta$ 为体积含水量,对于饱和流, $\theta = n$ , $n$ 为土的

孔隙率; $q_r$ 、 $q_\varphi$ 、 $q_z$ 分别为相应于3个坐标方向上的水分运动通量。

因黄土结构的各向异性、垂直方向有大孔隙存在,渗透性也具有各向异性,垂直方向和水平方向是渗流的主方向,依据达西定律有

$$\left. \begin{aligned} q_r &= -K_r(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ q_\varphi &= -\frac{1}{r} K_\varphi(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \\ q_z &= -K_z(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $K_r$ 、 $K_z$ 、 $K_\varphi$ 分别为径向、轴向和环向渗透系数,是土的含水量(或土中水基质势或土中水吸力)和土的孔隙比的函数<sup>[3]</sup>; $\Psi$ 为土水势。

将式(2)代入式(1),可得到在以 $z$ 为轴的轴对称柱坐标系中,土中水分运动的连续性方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r K_r(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial r}] + \frac{\partial}{\partial z} [K_z(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial z}] = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta \frac{\partial(r \Delta r \Delta \varphi \Delta z)}{\partial t} \frac{1}{r \Delta r \Delta \varphi \Delta z} \quad (3)$$

如果忽略温度势和溶质势对渗流的影响,则 $\Psi = \Psi_m + \Psi_p - \Psi_g$ , $\Psi_m$ 为基质势, $\Psi_p$ 为压力势, $\Psi_g$ 为重力势。由文献[4]可得重力势的表达式

$$\Psi_g = \begin{cases} hg & \omega_0 > 25\% \\ (14.3\omega - 2.57)hg & 18\% < \omega_0 \leq 25\% \\ 0 & \omega_0 \leq 18\% \end{cases}$$

式中: $\omega_0$ 为土的质量含水率。

令 $\Psi_m + \Psi_p = \Psi_{mp}$ ,将其代入式(3),则

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r K_r(\Psi_{mp}) \frac{\partial \Psi_{mp}}{\partial r}] + \frac{\partial}{\partial z} [K_z(\Psi_{mp}) \cdot \frac{\partial(\Psi_{mp} - \Psi_g)}{\partial z}] = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \quad (4)$$

式中: $\epsilon_v$ 为体应变(为了编程的方便规定为“土体积减小时,体应变为负”)。对于非饱和土:比水容量 $C(\Psi_m) = \frac{d\theta}{d\Psi_m}$ ,即 $\frac{\partial \theta}{\partial t} = C(\Psi_m) \frac{\partial \Psi_m}{\partial t}$ ; $\Psi_p = 0$ 。对于存在不断变形的饱和土体: $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t}$ ; $\Psi_m = 0$ 。

式(4)即为考虑土体变形的渗流连续性方程。由于滞后作用,基质势 $\Psi_m$ 不是含水率的单值函数,土体吸湿过程和脱湿过程不同,因此式(4)只适用于脱湿或吸湿单一过程。

对于垂直方向渗流<sup>[5]</sup>

$$\frac{dK_{20}^v}{dt} = \frac{\partial K_{20}^v}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial K_{20}^v}{\partial S} \frac{dS}{dt} = 6.5677 \times 10^{2.8523e-3.5739} \times \xi \frac{de}{dt} - 0.1619S^{-1.1683} \frac{dS}{dt} \quad (5)$$

对于水平方向渗流

$$\frac{dK_{20}^h}{dt} = \frac{\partial K_{20}^h}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial K_{20}^h}{\partial S} \frac{dS}{dt} = 6.5677 \times 10^{2.8523e-3.5739} \times \xi \frac{de}{dt} - 0.6609 S^{-1.5833} \frac{dS}{dt} \quad (6)$$

式中:  $S$  为基质吸力;  $e$  为孔隙比;  $t$  为时间;  $\xi$  为修正系数;  $K_{20}^v$ 、 $K_{20}^h$  分别为  $20^\circ\text{C}$  时垂直向和水平向渗透系数。

## 2.2 黄土湿陷的基本方程

在陇西自重湿陷性黄土室内侧限压缩试验的基础上,由文献[1]得到

$$\Delta\delta_{si} = \frac{P_i(E_{oi1} - E_{oi2})}{E_{oi1}E_{oi2}} = P_i \left( \frac{1}{E_{oi2}} - \frac{1}{E_{oi1}} \right) \quad (7)$$

式中:  $\Delta\delta_{si}$  为压力  $P_i$  下含水量从  $\omega_1$  到  $\omega_2$  时的增湿变形系数,  $\Delta\delta_{si} = \frac{\Delta S_i}{h_0}$ ;  $i_1$ 、 $i_2$  表示第  $i$  级压力下含水量从  $\omega_1$  到  $\omega_2$ ;  $E_0$  为变形模量。

如果引起黄土自重湿陷的水被认为是一种特殊的力,那么,含水量可以反映力的大小,  $\Delta\delta_{si}$  可以认为是含水量力引起的应变,此时式(7)可写为

$$\Delta\epsilon_i = P_i \Delta \left( \frac{1}{E_{oi}} \right) \quad (8)$$

如果  $P_i = 0$ ,  $\Delta\epsilon_i = P_i \Delta \left( \frac{1}{E_{oi}} \right) = 0$ , 而实际自重湿陷性黄土附加压力为 0 时,也可能发生湿陷变形,即  $\Delta\epsilon_i \neq 0$ 。若令  $P_i = 1 \text{ kPa}$ , 代入式(8)计算,应该不会有大的误差,即黄土自重湿陷变形的应变计算式可写为

$$\Delta\epsilon = \Delta \left( \frac{1}{E_0} \right) \quad (9)$$

根据弹性理论,变形模量  $E_0$  与压缩模量  $E_s$  之间的关系为

$$E_0 = \beta E_s = \left( 1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu} \right) E_s, \mu = \frac{K_0}{1+K_0}$$

黄土侧压力系数  $K_0$  与含水量  $\omega$  之间的关系为

$$K_0 = m\omega^n$$

该式的应用范围为  $\omega \in [3\%, 8\%]$ 。

根据陇西黄土的实际情况,参数  $m$ 、 $n$  取值为:  $m = 1.2253$ ,  $n = 0.5410$ 。

结合文献[1]中的不同初始含水量下双线法试验割线模量与压力关系曲线,做  $p = 0$  时的  $\frac{1}{E_0}$  与  $\omega$  关系曲线如图 1 所示。

经曲线拟合得:  $\frac{1}{E_0} = 0.0167\omega^{1.454}$  (相关系数为  $\rho = 0.9957$ )。

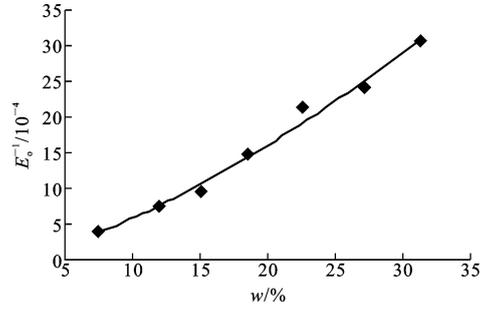


图 1  $p = 0$  时  $1/E_0$  与  $w$  的关系

Fig. 1 Relation Between  $1/E_0$  and  $w$  at  $p = 0$

将上式整理并微分得

$$d\tau\omega = 11.48 \left( \frac{1}{E_0} \right)^{-0.3122} d \left( \frac{1}{E_0} \right) \quad (10)$$

用差分近似代替微分,并结合式(9)得

$$\Delta\tau\omega = 11.48 \left( \frac{1}{E_0} \right)^{-0.3122} \Delta\epsilon \quad (11)$$

式(11)为黄土自重湿陷变形的增量本构模型。如果含水量不变,压力变化,可用邓肯-张模型计算黄土增湿变形量。

## 2.3 虚功方程

以克希荷夫应力张量和格林应变表述的虚功方程为<sup>[6]</sup>

$$\int_{V_0} \mathbf{S}_{ij} \delta \mathbf{E}_{ij} dV_0 = \int_{V_0} f_{oi} \delta u_i dV_0 + \int_{A_{oi}} q_{oi} \delta u_i dV_0 \quad (12)$$

式中:  $f_{oi}$ 、 $q_{oi}$  分别为初始构形下单位体积的体力荷载和面力荷载;  $\mathbf{S}_{ij}$  为克希荷夫应力张量;  $\mathbf{E}_{ij}$  为格林应变张量;  $\delta u_i$  为无限小位移变分。

## 3 有限元支配方程的建立

渗流方程中渗透系数是含水量和孔隙比的函数,因此渗流连续性方程是非线性方程,很难用解析的方法求解,本文中采用数值方法求解。由于 Galerkin 加权残值法不需要寻找泛函,适用性广,整理分析过程也较简单,所以采用该法对基本方程进行空间离散,在时间域内用差分方法离散,得到渗流和黄土增湿变形有限元模型。

(1) 渗流有限元模型

$$\mathbf{K}_1 \Psi + \mathbf{K}_2 \Psi = \mathbf{F} \quad (13)$$

$$\mathbf{K}_{ij1} = \int_{\Omega_e} \left( -\Psi_i K_r \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} + K_r r \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} + K_z r \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \right) d\Omega \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_{ij2} = \int_{\Omega_e} C \Psi_i \Psi_j r d\Omega \quad (15)$$

$$\mathbf{F}_i = \int_{\Omega_e} \left( K_z r \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \frac{\partial \Psi_g}{\partial z} - \theta \Psi_i r \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_e} B \Psi_i r \frac{\partial n}{\partial t} d\Omega = \int_{\Gamma_e} \Psi_i q_n d\Gamma \quad (16)$$

式中:  $\Psi_i, \Psi_j$  为形函数; 当土体饱和时  $K$  取  $2.2874 \text{ m} \cdot \text{d}^{-1}$ , 非饱和时, 按式(5)、(6)取值; 当土体饱和时  $C$  取 0, 非饱和时,  $C(\Psi_m) = \frac{d\theta}{d\Psi_m}$ ; 当土体饱和时  $B$  取 1.0, 非饱和时,  $B$  取 0。式(13)就是式(4)的有限元模型。

(2) 变形场有限元模型

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{DS}} \Delta \mathbf{a}_e = -\bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R}_{\text{sp}} \quad (17)$$

式中:  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{DS}} = \tilde{\mathbf{K}}_{\text{D}} + \mathbf{K}_{\text{S}}$ ;  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{D}} = -\int_{V_0} \mathbf{B}' \mathbf{D}_{\text{wot}} \tilde{\mathbf{B}} dV_0$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{S}} = \int_{V_0} \mathbf{G}' \mathbf{M} \mathbf{G} dV_0$ ,  $\mathbf{D}_{\text{wot}}$  为黄土自重湿陷变形增量本构模型对应的刚度矩阵,  $\mathbf{G}, \mathbf{M}, \mathbf{B}', \tilde{\mathbf{B}}$  的含义对于平面问题见文献[6], 对于轴对称问题见文献[7];  $\Delta \mathbf{a}_e$  为单元节点位移增量矢量;  $\bar{\mathbf{R}}$  为时刻  $t + \Delta t$  的载荷等效节点矢量;  $\mathbf{R}_{\text{sp}}$  为时刻  $t$  的总应力场等效节点矢量。

由于矩阵  $\mathbf{B}', \tilde{\mathbf{B}}$  与  $\Delta \mathbf{a}_e$  有关, 则矩阵  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{DS}}$  就受  $\Delta \mathbf{a}_e$  的影响, 因此式(17)是非线性方程。

将式(13)、(17)组合在一起, 即为考虑渗流和变形耦合的黄土增湿变形有限元模型。

## 4 模型的求解

因式(13)、(17)均是非线性方程组, 直接联合求解有较大困难, 因此, 建议按下列步骤求解:

(1) 天然含水量对应的渗透系数  $K_0$  作为迭代初始值, 求解式(13), 求得各节点的  $\Psi_{\text{mp}}$ , 再由各节点的  $\Psi_{\text{mp}}$  求出对应的含水率  $w$ 。

(2) 已知外力和各节点的含水量解变形方程式(17), 求出各节点的变形, 进而求出各节点的孔隙比变化量。

(3) 根据渗透系数的表达式求出黄土湿陷变形后各节点的渗透系数, 作为下一时刻计算的初始值。

(4) 重复步骤(1)~(3), 迭代满足精度要求或迭代次数达到规定值后, 开始下一步的计算。时间步长的确定要根据黄土渗流的特点, 渗流初始步长取小些, 之后逐渐增大, 以弥补间接耦合合法求解的不足, 从而准确计算黄土增湿变形量。

## 5 结语

以甘肃陇西自重湿陷性黄土为研究对象, 依据质量守恒定律和达西定律, 推导出了受变形影响的适合非饱和土-饱和土的、非稳态的轴对称黄土渗流连续性基本方程。结合已有的室内侧限压缩试验数据推导出了黄土增湿变形本构模型。由于渗流连续性方程和黄土增湿变形基本方程均是非线性方程,

本文中采用数值方法求解。采用 Galerkin 加权残值法对基本方程进行空间离散, 在时间域内用差分方法离散, 得到渗流场和黄土增湿变形有限元模型, 将它们组合在一起, 即为考虑渗流和变形耦合的黄土增湿变形有限元支配方程, 根据其特点提出了求解方法。结果表明: 在研究黄土增湿变形过程中, 考虑变形与渗流耦合的作用是可行的, 建立的黄土增湿变形有限元模型是合理的。

参考文献:

References:

- [1] 焦彦利. 黄土增湿的工程性状仿真分析[D]. 西安: 长安大学, 2004.  
JIAO Yan-li. The Numerical Calculation of Loess Moistening Deformation and the Application to the Construction Engineering[D]. Xi'an: Chang'an University, 2004.
- [2] 张茂花, 谢永利, 刘保健. 湿陷性黄土变形的各向异性及与浸水路径的无关性[J]. 中国公路学报, 2006, 19(4): 11-16.  
ZHANG Mao-hua, XIE Yong-li, LIU Bao-jian. Anisotropy of Collapsible Loess Deformation and Independence of Deformation and Soak Paths[J]. China Journal of Highway and Transport, 2006, 19(4): 11-16.
- [3] FREDLUND D G, RAHARDJO H. Soil Mechanics for Unsaturated Soils[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1993.
- [4] 王铁行, 李 宁, 谢定义. 非饱和黄土重力势、基质势、温度势探讨[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(5): 715-718.  
WANG Tie-hang, LI Ning, XIE Ding-yi. Gravitational Potential, Matrix Suction and Thermal Potential of Unsaturated Loess Soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(5): 715-718.
- [5] 梁 燕, 谢永利, 刘保健, 等. 非饱和黄土渗透性的试验研究[J]. 水文地质工程地质, 2006, 33(2): 27-30.  
LIANG Yan, XIE Yong-li, LIU Bao-jian, et al. The Test Study on the Permeability of Unsaturated Typical Loess [J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2006, 33(2): 27-30.
- [6] 谢永利. 大变形固结理论及其有限单元法[M]. 北京: 人民交通出版社, 1998.  
XIE Yong-li. The Theory and Finite Element Method of the Large Deformation Consolidation[M]. Beijing: China Communications Press, 1998.
- [7] 蒋友谅. 非线性有限元法[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1988.  
JIANG You-liang. The Nonlinear Finite Element Method[M]. Beijing: Beijing Industry College Press, 1988.