

文章编号:1673-2049(2007)04-0082-04

# 线性和均布荷载共同作用下简支圆板的极限荷载

张风华,赵均海,魏雪英,李巧燕

(长安大学 建筑工程学院,陕西 西安 710061)

**摘要:**采用统一屈服准则对线性和均布荷载共同作用下的简支圆板进行了塑性极限分析,并考虑了 2 种荷载形式,分别得出了极限解的表达式。通过变化解中参数值得出一系列不同屈服准则下的解析解和极限荷载随不同屈服准则变化的曲线。所得结果适用于各种拉压强度性质相同的材料,根据不同的材料取不同的参数值,可以得出对应材料的极限荷载。已有的 Mises 解是本文解的特例,从该文的统一解可知,正确认识材料强度并合理运用屈服准则对发挥材料潜能具有重要的意义,可使工程取得更好的经济效益。

**关键词:**统一屈服准则;极限荷载;简支圆板;线性和均布荷载

中图分类号:O344.3

文献标志码:A

## Critical Load of Simply Supported Circular Plates Under Linear and Uniformly Distributed Load

ZHANG Feng-hua, ZHAO Jun-hai, WEI Xue-ying, LI Qiao-yan

(School of Architectural Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, Shaanxi, China)

**Abstract:** The plastic critical analysis of simply supported circular plates based on unified yield criterion under linear and uniformly distributed load was carried out, and two forms of loads were considered. The unified solutions which consisted of a series of analytical solutions based on different yield criteria were obtained and the relative curves between critical load and parameter value were also gained. The results of this paper can be used in the different materials of the same tension and compression strength by choosing different parameter values in the unified solutions. The solution of Mises criterion is a special case of the unified solutions. From the unified solutions, correct understanding the material strength and reasonable applying the yield criterion are very important to bring out latent potentialities in material strength. It has profitable economic benefits in the engineering applications.

**Key words:** unified yield criterion; critical load; simply supported circular plate; linear and uniformly distributed load

## 0 引言

圆板是工程中广泛应用的一种结构,分析其极限荷载对充分发挥材料强度潜能具有重要的意义。各国学者利用 Tresca 和 Mises 屈服条件、统一屈服

准则、统一强度理论等分析了圆板在单一荷载作用下的极限荷载<sup>[1-7]</sup>。对在复杂荷载作用下圆板的极限荷载分析较少,文献[8]中进行了圆板在线性荷载和边缘弯矩共同作用下的塑性极限分析,文献[9]中采用 Mises 屈服条件分析了在线性和均布荷载作用

收稿日期:2007-08-14

基金项目:教育部高等学校博士学科点专项科研基金项目(20040710001)

作者简介:张风华(1982-),女,山西五台人,工学硕士,E-mail:airmoon128@tom.com。

下的简支圆板。为了充分发挥材料强度的潜能,方便工程应用,笔者采用统一屈服准则研究了简支圆板在线性和均布荷载共同作用下的塑性极限分析问题,并考虑了联合作用的 2 种形式,分别给出了其统一解。

## 1 统一屈服准则

统一屈服准则是以双剪单元体为模型,考虑了作用在单元体上的全部应力而建立的。其数学表达式为

$$F = \sigma_1 - \frac{1}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_s \quad \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (1)$$

$$F' = \frac{1}{1+b} (\sigma_1 + b\sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_s \quad \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (2)$$

式中: $b$  为反映中间主应力及其相应面上正应力对材料破坏影响程度的材料强度参数。

对于板的平面应力问题,统一屈服准则可以表示为

$$F = \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{1+b} = \sigma_s \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \geq 0 \quad (3)$$

$$F' = \frac{\sigma_1}{1+b} - \sigma_3 = \sigma_s \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \leq 0 \quad (4)$$

双剪统一屈服准则在  $\pi$  平面及双向应力下的极限线见图 1,此外,统一屈服准则形成的一族极限线覆盖了域内所有区域,可以适用于从下限到上限所有拉压相同的材料。当  $b=0$  时为 Tresca 准则; $b=1.0$  时为双剪应力屈服准则; $b=0.5$  时逼近 Mises 屈服准则。 $b$  在 0 与 1.0 之间形成了一系列线性、外凸的屈服准则。

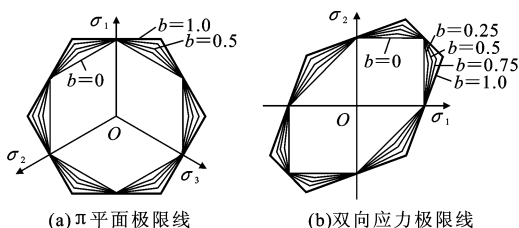


图 1 统一屈服准则的系列屈服面

Fig. 1 Series of Yield Surfaces of Unified Yield Criterion

## 2 基本方程

周边简支的圆板上作用着线性和均布荷载,如图 2 所示。

由于轴对称性,圆板的平衡方程为

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = - \int_0^r r q(r) dr \quad (5)$$

式中: $r$  为圆板半径; $M_r$  为径向弯矩; $M_\theta$  为切向弯

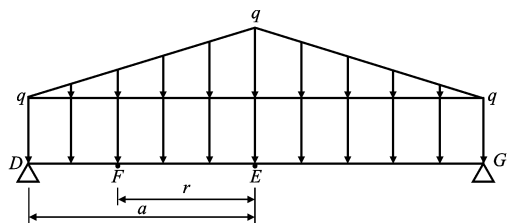


图 2 线性和均布荷载共同作用下的简支圆板

Fig. 2 Simply Supported Circular Plate Under Linear and Uniformly Distributed Load

矩; $q(r)$  为半径  $r$  处的荷载。

设圆板最大半径为  $a$ ,厚度为  $h$ ,极限抗拉强度为  $\sigma_t$ ,拉压比为  $\alpha$ 。当圆板为理想弹塑性材料时,可求出塑性极限弯矩  $M_p = \frac{\sigma_t}{4} h^2$ ,采用由广义应力表示的双剪统一屈服准则的极限条件为

$$\max \left\{ \left| M_r - \frac{b}{1+b} M_\theta \right|, \left| M_r - \frac{1}{1+b} M_\theta \right|, \frac{1}{1+b} |bM_r + M_\theta|, \left| \frac{1}{1+b} M_r - M_\theta \right|, \frac{1}{1+b} |M_r + bM_\theta|, \left| \frac{b}{1+b} M_r - M_\theta \right| \right\} = M_p \quad (6)$$

统一屈服准则的圆板极限线如图 3 所示。由圆板的边界条件  $M_\theta = (1 + \alpha)M_r$  [图 3 中的 B 点 ( $\alpha = 1$ )],  $M_r|_{r=0} = M_\theta|_{r=0}$  (图 3 中的 A 点),  $M_r|_{r=a} = 0$  (图 3 中的 C 点),可得全板应力处于 AB、BC 两线段上,且有:

AB 段

$$\frac{b}{1+b} M_r + \frac{1}{1+b} M_\theta = M_p$$

BC 段

$$M_\theta - \frac{b}{1+b} M_r = M_p$$

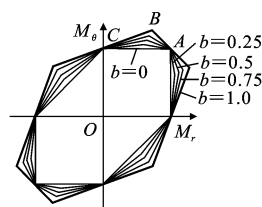


图 3 统一屈服准则的圆板极限线

Fig. 3 Critical Lines of Circular Plates of Unified Yield Criterion

## 3 极限荷载

本文中考虑了 2 种荷载形式:①均布荷载和内三角形荷载组合(第 1 种荷载形式);②均布荷载和外三角形荷载组合(第 2 种荷载形式)。

### 3.1 第 1 种荷载形式

第 1 种荷载计算模型如图 2 所示。设板上点  $F$  的弯矩位于图 3 中的 B 点,则可得 EF、FD 段的平衡方程:

EF 段

$$\left. \begin{aligned} r \frac{dM_r}{dr} &= (1+b)M_p - (1+b)M_r - \frac{q}{3a}(3ar^2 - r^3) \\ M_\theta &= (1+b)M_p - bM_r \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

FD 段

$$\left. \begin{aligned} r \frac{dM_r}{dr} &= M_p - \frac{1}{1+b}M_r - \frac{q}{3a}(3ar^2 - r^3) \\ M_\theta &= M_p + \frac{b}{1+b}M_r \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由式(7)、(8)可得:

EF 段

$$M_r = C_1 r^{-(1+b)} + M_p + \frac{qr^3}{3a(b+4)} - \frac{qr^2}{b+3}$$

$$M_\theta = -C_1 b r^{-(b+1)} + M_p - \frac{bqr^3}{3a(b+4)} + \frac{bqr^2}{b+3}$$

FD 段

$$M_r = C_2 r^{-\frac{1}{1+b}} + (1+b)M_p + \frac{(1+b)qr^3}{3a(3b+4)} - \frac{(1+b)qr^2}{2b+3}$$

$$M_\theta = C_2 \frac{b}{1+b} r^{-\frac{1}{1+b}} + (1+b)M_p + \frac{bqr^3}{3a(3b+4)} - \frac{bqr^2}{2b+3}$$

根据边界条件和连续条件可得

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \left[ -(1+b)M_p - \frac{(1+b)qa^2}{3(3b+4)} + \frac{(1+b)qa^2}{2b+3} \right] a^{\frac{1}{1+b}}$$

极限荷载  $q$  为

$$q = \frac{3a(b+4)(b+3)M_p}{[3a(b+4) - (b+3)r](b+2)r^2} \quad (9)$$

式中:  $r$  满足

$$\left[ \frac{(b+2)r^3}{3a(b+4)} - \frac{(b+2)r^2}{b+3} - \frac{a^2}{3(3b+4)} + \frac{a^2}{2b+3} \right] \left( \frac{a}{r} \right)^{\frac{1}{1+b}} = \frac{(b+1)r^3}{3a(b+4)} - \frac{(b+1)r^2}{b+3} - \frac{r^3}{3a(3b+4)} + \frac{r^2}{2b+3}.$$

### 3.2 第 2 种荷载形式

第 2 种荷载计算模型如图 4 所示。与第 1 种情况类似,设板上点  $F$  的弯矩位于图 3 中的  $B$  点,则可得  $EF$ 、 $FD$  段的平衡方程:

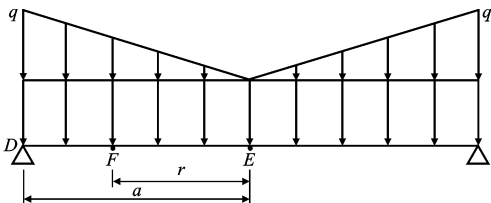


图 4 线性和均布荷载共同作用下的  
简支圆板(第 2 种荷载形式)

Fig. 4 Simply Supported Circular Plates Under Linear and  
Uniformly Distributed Load (the 2nd Load Form)

EF 段

$$\left. \begin{aligned} r \frac{dM_r}{dr} &= (1+b)M_p - (1+b)M_r - \frac{qr^3}{3a} - \frac{qr^2}{2} \\ M_\theta &= (1+b)M_p - bM_r \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

FD 段

$$\left. \begin{aligned} r \frac{dM_r}{dr} &= M_p - \frac{1}{1+b}M_r - \frac{qr^3}{3a} - \frac{qr^2}{2} \\ M_\theta &= M_p + \frac{b}{1+b}M_r \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

由式(10)、(11)可得:

EF 段

$$M_r = C_1 r^{-(b+1)} + M_p - \frac{qr^3}{3a(b+4)} - \frac{qr^2}{2(b+3)}$$

$$M_\theta = -C_1 b r^{-(b+1)} + M_p + \frac{bqr^3}{3a(b+4)} + \frac{bqr^2}{2(b+3)}$$

FD 段

$$M_r = C_2 r^{-\frac{1}{1+b}} + (1+b)M_p - \frac{(1+b)qr^3}{3a(3b+4)} - \frac{(1+b)qr^2}{2(2b+3)}$$

$$M_\theta = C_2 \frac{b}{1+b} r^{-\frac{1}{1+b}} + (1+b)M_p - \frac{bqr^3}{3a(3b+4)} - \frac{bqr^2}{2(2b+3)}$$

根据边界条件和连续条件可得

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \left[ -(1+b)M_p + \frac{(1+b)qa^2}{3(3b+4)} + \frac{(1+b)qa^2}{2(2b+3)} \right] a^{\frac{1}{1+b}}$$

极限荷载  $q$  为

$$q = \frac{6a(b+4)(b+3)M_p}{[3a(b+4) + 2(b+3)r](b+2)r^2} \quad (12)$$

式中:  $r$  满足

$$\left[ \frac{(b+2)r^3}{3a(b+4)} - \frac{(b+2)r^2}{2(b+3)} + \frac{a^2}{3(3b+4)} + \frac{a^2}{2(2b+3)} \right] \left( \frac{a}{r} \right)^{\frac{1}{1+b}} = -\frac{(b+1)r^3}{3a(b+4)} - \frac{(b+1)r^2}{2(b+3)} + \frac{r^3}{3a(3b+4)} + \frac{r^2}{2(2b+3)}.$$

## 4 讨论

(1)由式(9)、(12)可得 2 种荷载形式下的统一极限荷载  $q$  与屈服准则参数  $b$  的关系,见表 1。从表 1 可以看出,极限荷载  $q$  的大小与参数  $b$  直接有关,2 种荷载形式下的极限荷载  $q$  值均随参数  $b$  增大而增大。当  $b=0.5$  时,文中的解与 Mises 准则下的解基本一致。

(2)从表 1 可知,在均布荷载和内三角形荷载组合下求得的极限荷载略高于均布荷载和外三角形荷载组合下的极限荷载。Tresca 准则解与双剪屈服准则解的误差在这 2 种情况下分别约为 14% 和 13%,这种误差取决于结构在荷载作用下的应力场。当取不同的  $b$  值时,对应不同的屈服准则,相应地在  $\pi$  平

表 1 极限荷载  $q$  与参数  $b$  的关系  
Tab. 1 Relation of Critical Load  $q$  and Parameter  $b$

$b$		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5(文献[9])	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
第 1 种 荷载形式	$r$	0.671 2	0.658 7	0.647 6	0.637 5	0.628 5	0.620 1	0.612 5	0.605 6	0.599 1	0.593 2	0.587 7
	$q$	3.999 8	4.078 4	4.149 8	4.217 2	4.277 9	4.337 1(4.339 8)	4.391 4	4.441 3	4.490 0	4.534 3	4.576 5
第 2 种 荷载形式	$r$	0.739 9	0.728 3	0.717 8	0.708 3	0.699 6	0.691 6	0.684 2	0.677 4	0.670 9	0.665 1	0.659 6
	$q$	3.999 9	4.071 3	4.137 4	4.198 3	4.255 2	4.308 7	4.359 3	4.406 2	4.451 9	4.492 7	4.532 6

面上的极限线不同。当  $b=0$  时,Tresca 准则极限面最小;当  $b=1$  时,双剪应力屈服准则极限面最大,相应的极限荷载较大。

5 结 语

(1)统一解中选择不同的  $b$  值可得到一系列不同屈服准则下的解,不同的  $b$  值对应不同的拉压强度性质相同的工程材料,参数  $b$  的值对塑性极限荷载有较大影响。

(2)对于不同的材料,可根据剪切屈服极限和拉伸屈服极限确定合适的屈服参数  $b$ ,其关系式为  $b=\frac{2\tau_s-\sigma_s}{\sigma_s-\tau_s}$ 。

(3)参考各种材料的试验结果可知,参数  $b$  一般是大于 0 的,所以选用双剪统一屈服准则可以更好地发挥材料的强度潜能,并取得较好的经济效益。

参考文献:

References:

[1] 王延斌,俞茂宏.拉压异性的简支圆板在线性分布荷载作用下的塑性极限分析[J].土木工程学报,2003,36(8):31-36.  
WANG Yan-bin,YU Mao-hong. Plastic Limit Analysis of Simply Supported Circular Plates with Different Tension and Compressive Strength Under Linear Distributed Load[J]. China Civil Engineering Journal, 2003,36(8):31-36.

[2] 王延斌,俞茂宏.考虑材料拉压强度异性的简支圆板塑性极限统一解[J].应用力学学报,2003,20(1):144-148.  
WANG Yan-bin,YU Mao-hong. Unified Plastic Limit Analysis of Simply Supported Circular Plates with Strength Differential Effect in Tension and Compression[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics,2003,20(1):144-148.

[3] 赵均海,张永强,李建春.基于统一屈服准则的混凝土矩形板极限荷载的研究[J].工程力学,1999,16(2):121-126.  
ZHAO Jun-hai,ZHANG Yong-qiang,LI Jian-chun. A

New Method to Calculate the Limit Load of Concrete Rectangular Plate[J]. Engineering Mechanics,1999,16(2):121-126.

[4] 赵均海,李建春,张永强.用双剪统一屈服准则求矩形板的极限荷载[J].机械强度,1998,20(3):181-184.  
ZHAO Jun-hai,LI Jian-chun,ZHANG Yong-qiang. A New Method to Calculate the Limit Load of Rectangle Plate[J]. Journal of Mechanical Strength,1998,20(3):181-184.

[5] 赵均海.强度理论及其工程应用[M].北京:科学出版社,2003.  
ZHAO Jun-hai. Intension Theory and Its Engineering Application[M]. Beijing:Science Press,2003.

[6] 俞茂宏.双剪理论及其应用[M].北京:科学出版社,1991.  
YU Mao-hong . Twin Shear Theory and Its Application [M]. Beijing:Science Press,1991.

[7] 俞茂宏,ODA Y,盛 谦,等.统一强度理论的发展及其在土木水利等工程中的应用和经济意义[J].建筑科学与工程学报,2005,22(1):24-41.  
YU Mao-hong,ODA Y,SHENG Qian,et al. Development of Unified Strength Theory and Its Applications in Civil Engineering and Its Economic Significance[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering,2005,22(1):24-41.

[8] 王延斌,俞茂宏.简支圆板在复杂荷载作用下的塑性极限荷载统一解析解[J].力学季刊,2002,23(4):575-582.  
WANG Yan-bin,YU Mao-hong. Unified Plastic Limit Analyses of Simply Supported Circular Plates Under Complicated Load[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2002,23(4):575-582.

[9] 陈 钢,洪 媛.用 Mises 屈服条件求简支圆板在线性和均布荷载共同作用下的极限荷载[J].辽宁大学学报:自然科学版,2004,31(4):302-305.  
CHEN Gang,HONG Yuan. Evaluation of Ultimate Load Circular Plates with Simply Supported Edges Under Linear Load and Uniform Load Based on Mises Yield Condition[J]. Journal of Liaoning University: Natural Sciences Edition,2004,31(4):302-305.