

文章编号:1673-2049(2008)02-0106-05

基于有限变形理论的 ANSYS 几何 非线性算法缺陷分析

高陈燕,尹冠生,马 超

(长安大学 理学院,陕西 西安 710064)

摘要:基于有限变形理论对 ANSYS 定义的应变、应力与物体真实应力之间的关系、位形、不平衡力的几何非线性计算等方面进行了详细分析,并针对 ANSYS 中的杆件单元 Link8 和平面单元 Plane42,通过算例计算结果与理论解的对比,指出了 ANSYS 几何非线性算法的不足,即在计算过程中没有考虑到应变、应力的共轭关系,只是一种近似的非线性计算。

关键词:ANSYS;有限变形理论;几何非线性;共轭关系

中图分类号:TU12

文献标志码:A

Analysis of Deficiency of ANSYS Geometric Nonlinear Arithmetic Based on Finite Deformation Theory

GAO Chen-yan, YIN Guan-sheng, MA Chao

(School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China)

Abstract: The definition of strain, the relationship between computation stress and true stress of body, deformation as well as geometric nonlinear computation of unbalance force were analyzed in details by using ANSYS based on finite deformation theory. The calculation values of rod element Link8 and 2-D element Plane42 solved by ANSYS were compared with the theoretical solutions. The comparison points out that ANSYS geometric nonlinear arithmetic is deficient, ie without considering the conjugacy relation of stress and strain, it is an approximate nonlinear calculation.

Key words: ANSYS; finite deformation theory; geometric nonlinearity; conjugacy relation

0 引 言

由于线性问题和通常的材料非线性问题均隐含有小变形假定,结构的几何非线性问题一直是非线性力学的研究热点之一。在有限元求解中假定在加载过程中单元的几何形状保持不变,而在工程实际中这种假设往往不成立。因此在几何方程和平衡方程中就必须考虑结构变形的影响,即几何非线性问题。ANSYS 有限元软件提供了计算大变形问题的

功能。

有限变形理论是解决几何非线性问题的精确理论。在小变形力学中,应力、应变只有一种定义,而在有限变形理论中应力、应变的定义有很多种,但必须在满足能量共轭原理的前提下成对地使用,例如 Lagrange 应变与第二 Piola-Kirchhoff 应力共轭。当采用 Lagrange 应变和第二 Piola-Kirchhoff 应力,并且始终以初始时刻的位形作为描述物体位形的参考构形时,这种方法称为完全的拉格朗日法

收稿日期:2008-02-20

基金项目:陕西省自然科学基金计划项目(2005E213)

作者简介:高陈燕(1981-),女,福建古田人,工学硕士研究生,E-mail:gaochenyan81@163.com。

(Total Lagrange 法,以下简称 TL 法)。而以 t_k 时刻的位形作为描述 t_{k+1} 时刻的物体位形的参考构形时,这种方法称为修正的拉格朗日法(Updated Lagrange 方法,以下简称 UL 法)。UL 法需要不断地修正参考构形^[1]。本文中笔者运用有限变形理论对 ANSYS 的几何非线性性能进行了研究,并通过算例对 ANSYS 单元的计算结果与其理论解进行比较,指出 ANSYS 几何非线性单元的理论缺陷与计算上的不足之处。

1 有限变形理论

凡考虑位移与应变的非线性关系或采用大应变理论均属于几何非线性问题,几何非线性问题包括大位移小应变问题和大位移大应变问题,几何非线性问题采用有限变形理论来解决^[2]。在有限变形中对应不同的参考构形和物理含义,应力和应变有多种形式,如 Lagrange (Green) 应变和第二 Piola-Kirchhoff (Kirchhoff) 应力^[3]。

Lagrange 应变

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1)$$

式中: u_i 、 u_j 、 u_k 分别为 x 、 y 、 z 轴方向的位移。计算 Lagrange 应变时, u_i 被看作是初始位形内质点位置的函数。

第二 Piola-Kirchhoff 应力

$$d\mathbf{T}_i^{(k)} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} d\mathbf{T}_j = \mathbf{S}_{ji} \mathbf{n}_j^0 d\mathbf{A}^0 \quad (2)$$

式中: $d\mathbf{T}_j$ 为作用在变形后构形的面元上的力矢量; $d\mathbf{A}^0$ 为物体在 0 时刻的一个有向面微元; \mathbf{n}_j^0 为法线方向矢量; x 为初始构形下的坐标; X 为变形后构形下的坐标; \mathbf{S} 为第二 Piola-Kirchhoff 应力张量。

在有限变形理论中定义的应力、应变,并不是任何一种应力与任何一种应变都能满足虚功原理。一种应力只有和它相匹配的应变对才能满足虚功原理,称为共轭应力应变对。其中第二 Piola-Kirchhoff 应力与 Lagrange 应变就是共轭对。在 TL 法中采用的就是这对共轭应力应变。

2 ANSYS 的几何非线性

2.1 应变

图 1 为 ANSYS 的变形示意图。设物体上有 A 和 B 两点,以 A 点为原点 O,以 AB 连线所在的直

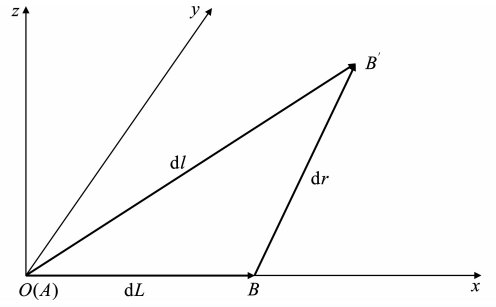


图 1 ANSYS 的变形示意

Fig. 1 Digraph of ANSYS Deformation

线为 x 轴,建立直角坐标系。 dL 是变形前 A、B 两点的距离, dl 是变形后 A、B' 的距离, $dr = (du, dv, dw)$, 由此可得: $dl = \sqrt{(dL + du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2}$ 。

ANSYS 中采用的应变定义为

$$\epsilon_x = \frac{dl}{dL} - 1 \quad (3)$$

$$\frac{dl}{dL} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \quad (4)$$

将式(3)用公式 $\sqrt{1+A} = 1 + \frac{A}{2} - \frac{A^2}{8} + \frac{A^3}{16} - \dots$

展开,并分别忽略展开式中一次以上高次项与二次以上高次项得

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] \quad (5)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] \quad (6)$$

式中: u 、 v 、 w 为 x 、 y 、 z 轴方向的挠度。

由此可以看出,ANSYS 的应变定义为式(3),近似表达式为式(5)、(6)。ANSYS 分析中仅把式(5)看作式(3)的低阶近似,而式(6)比式(5)有着更高的精度。这完全是一种近似几何非线性。

2.2 几何刚度矩阵

设 \mathbf{K}_i 为刚度矩阵; \mathbf{S}_i 为应力刚度矩阵,则 ANSYS 的切线刚度矩阵 \mathbf{K} 为

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_i + \mathbf{S}_i \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_i = \int \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i dv \quad (8)$$

$$\mathbf{S}_i = \int \mathbf{G}_i^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{G}_i dv \quad (9)$$

式中: \mathbf{B}_i 为应变矩阵; \mathbf{D}_i 为弹性矩阵; \mathbf{G}_i 为单元形函数导数矩阵; $\boldsymbol{\tau}$ 为柯西矩阵; \mathbf{B}_i 、 \mathbf{D}_i 、 \mathbf{G}_i 、 $\boldsymbol{\tau}$ 都是在当前位形下计算的。

Link8 杆单元的应力刚度矩阵为

$$\mathbf{S} = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中： F 为力。

由于 Link8 单元采用了近似应变式(6)，使得其应力刚度矩阵在杆轴线方向上不恰当地设成为 $\mathbf{0}$ 。

在 ANSYS 中 2-D 和 3-D 单元的应力刚度矩阵是通过数值积分产生的。以 3-D 单元 Solid45 为例说明在 ANSYS 中应力刚度矩阵产生的过程。

应力刚度矩阵 \mathbf{S} 为

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_0 = \int \mathbf{S}_g^T \mathbf{S}_m \mathbf{S}_g dv$$

$$\mathbf{S}_m = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_g}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_g}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_g}{\partial z} \end{bmatrix}$$

式中： σ 为应力； $N_1 \sim N_g$ 为形函数。

σ_x, σ_{xy} 等应力值都是由前一次迭代计算得到的位移值来计算得到的。文献[4]中认为，由此计算所得到的应力就是柯西应力，但实际上这并不是柯西应力，因此 ANSYS 中的平衡方程式是不正确的，这点也可由 Link8 单元的源程序进一步证明^[5]。

3 计算实例与分析

在进行几何非线性计算时，文献[4]中指出，ANSYS 单元的理论依据就是有限变形理论中的 UL 法，而这种说法并不正确。本文中笔者将采用比较简单的算例，将理论解和用 ANSYS 单元的计算结果进行比较。由有限变形理论计算得到理论解(用数学软件 Matlab 计算)，因为是精确解，所以 TL 法的计算结果与 UL 法的计算结果应该一致，本文中采取 TL 法进行计算。

3.1 杆单元的比较

ANSYS 中采用了支持非线性的 Link8 杆单元。本文中算例采用常用来说明几何非线性问题的跃变结构示例，如图 2 所示。由于模型简单，可以推导出节点 2 的理论解。

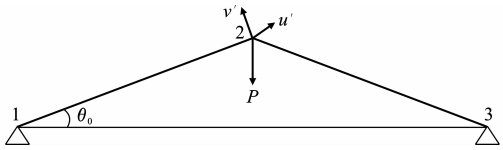


图 2 跃变结构

Fig. 2 Transition Structure

设在初始位形下的杆长、截面积、弹性模量及杆与水平线之间夹角分别为 L_0, A_0, E_0, θ_0 ，在力 P 作用下达达到平衡时分别变为 L_t, A_t, E_t, θ_t ，铰 2 的垂直位移为 v 。假设材料的弹性模量在初始位形为参考位形时保持不变，亦即认为在 Lagrange 坐标系中弹性模量为常量： $E_0 = E_t = E_L$ 。在杆单元的初始位形上建立局部坐标系(图 2)。杆单元 1-2、端点 2 的轴向和法向的位移分别为 u' 和 v' ，则

$$u' = -v \sin \theta_0, v' = -v \cos \theta_0$$

容易导出杆的 Lagrange 应变为

$$E_{xx} = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 \right] = -\frac{v}{L_0} \sin \theta_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{L_0} \right)^2 \quad (11)$$

杆的 Kirchhoff 应力为

$$S_{xx} = E_L E_{xx} \quad (12)$$

由此可得，杆的 Kirchhoff 应力对应的伪轴向力为

$$N^0 = S_{xx} A_0 = E_L A_0 \left[-\frac{v}{L_0} \sin \theta_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{L_0} \right)^2 \right] \quad (13)$$

当采用有限元法研究上述问题时，可得现时构形中的真实轴内力为

$$N = \frac{L_t}{L_0} N^0 = E_L A_0 \frac{L_t}{L_0} \left[-\frac{v}{L_0} \sin \theta_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{L_0} \right)^2 \right] \quad (14)$$

因为现时构形中真实的轴向力是沿着现时杆单元轴向方向的，所以由铰 2 的平衡得

$$2N \frac{L_0 \sin \theta_0 - v}{L_t} + P = 0 \quad (15)$$

将式(15)代入式(16)，整理得最后平衡方程

$$\frac{P}{E_L A_0} = \frac{v}{L_0} \left(\frac{v}{L_0} - \sin \theta_0 \right) \left(\frac{v}{L_0} - 2 \sin \theta_0 \right) \quad (16)$$

当 $\frac{v}{L_0} = (1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}) \sin \theta_0$ 时， P 取得极值。

ANSYS 中用 1 个 Link8 单元模拟 1 根杆，用

Link8 单元计算所得的节点 2 位移与用式(16)计算得到的理论解进行比较。3 个节点的坐标分别为 1 (−100 mm, 0 mm, 0 mm)、2 (0 mm, 10 mm, 0 mm)、3(100 mm,0 mm,0 mm)。节点 1 和节点 2 的 x 、 y 、 z 轴方向的位移约束为 0,节点 3 的 z 轴方向的位移约束为 0。杆的横截面积为 1 mm²,弹性模量 $E=2.0$ MPa。施加 1 个 y 轴方向的力 P 。在该算例中,当荷载逐渐加大到一定值时,两杆会突然发生跃变,位移突然增大很多。用式(16)计算出的跃变点荷载为 $P=\pm 758.396$ N。

表 1 为节点 2 位移采用 Link8 单元计算的结果和采用式(16)计算的理论解(用数学软件 Matlab 计算所得)。当荷载达到 800 N 时,很明显位移发生了跃变。

表 1 不同荷载时节点 2 的位移

Tab. 1 Displacements on Node 2 with Different Loads

荷载/N	理论解位移/mm	Link8 单元位移/mm
400	1.239 7	1.223
500	1.667 5	1.624
600	2.203 3	2.086
700	2.995 6	2.904
755	3.854 0	3.509
760	21.520 5	3.578
800	21.587 7	发散

从表 1 可以看出,所施加的荷载远离跃变点时,ANSYS 单元的计算结果与理论的计算结果较接近,在跃变点附近计算结果相差很大,理论解在荷载为 755 N 处出现跃变,而 ANSYS 单元的计算结果在荷载为 760 N 才出现跃变,甚至出现不收敛。这都说明了采用 Link8 杆单元计算的不足。

3.2 平面单元的比较

本文中引用文献[2]中的算例对平面单元进行了拉伸计算,ANSYS 中采用 4 节点平面单元——Plane42 单元计算。Plane42 单元具有支持应力刚度矩阵、大转动、大应变等功能。该算例的几何结构为一长 20 cm、宽 1 cm、厚度 0.1 cm 的平板,弹性模量 $E=2\times 10^2$ MPa。平板左端固定,右端施加力荷载或位移荷载。在 ANSYS 中采用 20 个 4 节点的平面单元来模拟该平板,模型见图 3。

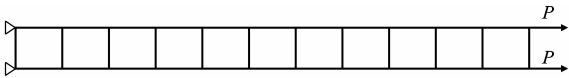


图 3 平面单元受力

Fig. 3 Forces of Plane Element

由于该算例是个简单的拉伸问题,可以得到有

限变形理论的理论解。

Lagrange 应变为

$$\epsilon=u_{,x}+u_{,x}^2/2 \tag{17}$$

Kirchhoff 应力为

$$S=E\epsilon$$

式中: E 假设对初始位形不变。

Kirchhoff 内力为

$$N=SA_0$$

式中: A_0 为初始面积。

杆的真实内力为

$$f_c=\int_{V_0}\bar{\mathbf{B}}^T\mathbf{S}dV_0=N(1+u_{,x}) \tag{18}$$

由真实内力(柯西应力)与外荷载 P 平衡得

$$P=N(1+u_{,x})$$

故有理论解

$$\begin{aligned} \frac{P}{EA_0} &= (1+u_{,x})\epsilon = (1+u_{,x}) \cdot \\ &\quad (u_{,x}+u_{,x}^2/2) \end{aligned} \tag{19}$$

3.2.1 力荷载

表 2 为在拉伸荷载作用下理论解和采用 Plane42 单元计算板伸长量的结果比较。当外荷载 P 大于 34 200 N 时,采用 Plane42 单元不收敛。

表 2 拉伸并施加不同力荷载时板的伸长量

Tab. 2 Plate Elongation with Different Tensiles and Loads

荷载/ N	理论解 伸长量/ cm	Plane42 单元 伸长量/ cm	荷载/ N	理论解 伸长量/ cm	Plane42 单元 伸长量/ cm
1 000	0.197	0.202	17 000	2.785	3.705
3 000	0.574	0.609	19 000	3.057	4.181
5 000	0.932	1.027	21 000	3.320	4.666
7 000	1.274	1.454	23 000	3.576	5.209
9 000	1.600	1.892	25 000	3.824	5.732
11 000	1.913	2.342	27 000	4.066	6.271
13 000	2.214	2.777	29 000	4.302	6.767
15 000	2.505	3.237	33 000	4.757	7.862

3.2.2 位移荷载

笔者在经过对给定的力荷载的情况进行比较后,又对给定位移荷载的情况进行了比较。表 3 为采用 Plane42 单元计算在拉伸时施加不同位移荷载时最右侧节点所受的节点反力。

从表 2 中可以看出,当荷载越大时,用 Plane42 单元计算所得的结果与理论解的偏差越来越大。从表 3 中可以看出,当位移荷载越来越大时,用 ANSYS 中的 Plane42 单元计算所得的节点反力与理论解之间的差距越来越大。

表 3 拉伸并施加不同位移荷载时板的节点反力
Tab.3 Nodal Reaction Force with Different Tensiles and Displacement Loads

位移/ cm	理论解 节点反力/ N	Plane42 单元 节点反力/ N	位移 /cm	理论解 节点反力/ N	Plane42 单元 节点反力/ N
0.5	2 598.7	2 469.1	6.0	44 932.2	26 087.0
1.0	5 390.0	4 878.0	7.0	55 623.0	29 787.0
2.0	11 569.2	9 523.8	8.0	67 330.4	33 333.0
3.0	18 575.2	13 953.0	9.0	80 091.1	36 735.0
4.0	26 446.0	18 182.0	9.5	86 878.5	38 384.0
5.0	35 219.0	22 222.0	10.0	93 943.5	40 000.0

从表 2、3 中还可以看出, ANSYS 单元的计算结果与理论解存在着差异, 并且这种差异是有一定规律的。当拉伸时, 用有限变形理论计算的理论解的载荷与位移比值大于相应的 ANSYS 单元计算的比值, 并且随着拉伸幅度的增加, 比值的差值也增大。这主要是由于算法的原因造成的^[6-7]。在 ANSYS 的计算方法中没有考虑到应力在不同位形下的计算需要进行应力之间的转化, 材料矩阵也没有更新。由于随着荷载的增加, 物体的变形也越大, 其位形与初始位形的差异也越大, 使得弹性矩阵 D 的差别也越大, 造成荷载与位移比值的差值越大。

4 结 语

(1)ANSYS 计算的结果与有限变形理论计算的结果存在着差异, 并且这种差异是随着变形的增大而不断增大。文献[4]中指出, ANSYS 中的单元大变形计算都是基于有限变形理论的。

(2)在 ANSYS 的计算过程中并没有把 Lagrange 应变计算得到的 Kirchhoff 应力转化为柯西应力, 而只是简单的由应变计算得到的应力当作柯西应力, 即 ANSYS 定义的应力与应变不满足共轭关系, 所以不可能建立起正确的平衡方程。ANSYS 计算得到的应力与现时位形下的应力即柯西应力不存在转换关系。

(3)ANSYS 的几何非线性算法只是近似的几何非线性算法, 只有在变形不是很大的情况下, ANSYS 的计算值才能较好地逼近真实的位移解。这

就是 ANSYS 中几何非线性算法中的不足之处。

参考文献:
References:

[1] 凌道盛,徐 兴. 非线性有限元及程序[M]. 杭州:浙江大学出版社,2004:153-187.
LING Dao-sheng,XU Xing. Nonlinear Finite Element and Procedures [M]. Hangzhou: Zhejiang University Press,2004:153-187.

[2] 徐 巍. ANSYS 二次开发及大变形性能研究[D]. 北京:中国农业大学,2005.
XU Wei. Research on the Second Development of ANSYS and Large Deformation Properties [D]. Beijing: China Agricultural University,2005.

[3] 李明瑞. 梁板壳的几何大变形——从近似的非线性理论到有限变形理论[J]. 力学与实践,2003,25(3):1-8.
LI Ming-rui. The Geometric Large Deformation of Beam,Plate and Shell—from the Approximate Nonlinear Theory to the Finite Deformation Theory [J]. Mechanics and Practice,2003,25(3):1-8.

[4] ANSYS Inc. ANSYS6. 1 Documentation [M]. Pittsburgh:ANSYS Inc,2004.

[5] 徐 巍,周 喆. 对 ANSYS 的 Link8 杆单元的几何非线性性能的评述[J]. 中国农业大学学报,2005,10(3): 111-114.
XU Wei,ZHOU Zhe. Review on Geometric Non-linear Performance of ANSYS' Link8 Element[J]. Journal of China Agricultural University,2005,10(3):111-114.

[6] 赵均海,王敏强,魏雪英. 高等有限元[M]. 武汉:武汉理工大学出版社,2004.
ZHAO Jun-hai,WANG Min-qiang,WEI Xue-ying. Higher Finite Element Method [M]. Wuhan: Wuhan University of Technology Press,2004.

[7] 程 磊,瞿伟廉. 基于 Hilbert-Huang 变换理论的非平稳数据处理[J]. 建筑科学与工程学报,2007,24(1): 26-30.
CHENG Lei,QU Wei-lian. Non-stationary Data Processing Based on Hilbert-Huang Transform Theory [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2007,24(1):26-30.