

文章编号:1673-2049(2008)03-0037-05

非均布荷载作用下煤柱-顶板系统的失稳分析

贺广零¹, 洪芳², 李倩妹³

(1. 同济大学 建筑工程系, 上海 200092; 2. 福建工程学院 土木工程系, 福建 福州 350007;
3. 中南林业科技大学 土木建筑与力学学院, 湖南 长沙 410004)

摘要:针对实际工程中作用在煤柱-顶板系统上的荷载为非均布荷载的现象,研究了煤柱-顶板系统在非均布荷载下的失稳机制。基于温克尔假设,把坚硬顶板视为弹性梁,把煤柱等效为连续均匀分布的支撑弹簧,从而形成煤柱-顶板相互作用系统的力学模型;基于尖点突变理论,对采空区煤柱-顶板系统失稳机理进行了探索,导出了该系统失稳的充要力学判据,并得出了顶板破坏的临界厚度;同时,分析了影响系统失稳的主要参数,并给出了若干工程建议;最后以甘肃省某煤矿为例,计算了该矿体的临界顶板厚度。所得结果为进一步研究煤柱-顶板系统的失稳机制和制定相关规范提供了参考。

关键词:非均布荷载;煤柱-顶板系统;突变理论;失稳机理;临界厚度

中图分类号:TU311.2 **文献标志码:**A

Instability Analysis of Coal Pillar and Roof System Under Non-uniformly Distributed Loading

HE Guang-ling¹, HONG Fang², LI Qian-mei³

(1. Department of Architectural Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Civil Engineering, Fujian University of Technology, Fuzhou 350007, Fujian, China; 3. School of Civil Engineering, Architecture and Mechanics, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004, Hunan, China)

Abstract: Since the loads on the coal pillar and roof system were non-uniformly distributed, the instability mechanism of the system under non-uniformly distributed loading was studied. Based on the Winkler's hypothesis, the stiff roof was assumed as an elastic beam and the coal pillars were equal to continuously and uniformly distributed support springs, which formed the mechanical model of the pillar and roof interaction system. Then the instability mechanisms of the coal pillar and roof system were explored, the instability mechanical criterion was deduced and the critical thickness of roof was obtained based on the catastrophe theory. Furthermore, some suggestions for application were given according to the parametric analysis. At last, taking a coal mine in Gansu Province as an example, the exact critical thickness of roof was calculated. The result is useful for the further research of the stability of the pillar and roof system and designing of relevant codes.

Key words: non-uniformly distributed loading; coal pillar and roof system; catastrophe theory; instability mechanism; critical thickness

收稿日期:2008-05-21

基金项目:国家自然科学基金创新研究群体科学基金项目(50321803);国家自然科学基金创新研究群体科学基金项目(50621062);
“十一五”国家科技支撑计划项目(2006BAA01A23);上海市科学技术委员会“登山行动计划”项目(06ZD12205);
上海市浦江人才计划项目(06PJ14095)

作者简介:贺广零(1982-),男,湖南衡阳人,工学博士研究生,E-mail:hglcool@126.com。

0 引言

在所有非线性研究的理论中,突变理论在地质工程中的应用较广泛。突变理论之所以在工程地质学中有如此广泛的应用,是因为地质工程中的许多失稳破坏现象,如滑坡、矿层失稳、矿井顶板的变形失稳、地下硐室岩爆、矿井断层冲击地压、岩溶塌陷等,基本上都是突然在相对很短的时间内发生的,这正好符合突变理论所研究的范畴。自从将突变理论应用于分析煤柱-顶板系统动力失稳分析之后,中国一些学者在这个领域进行了深入研究,并取得了可喜的成果。目前,对矿柱的稳定性分析已从单纯的强度理论,向围岩组成的力学平衡系统的失稳研究方向发展。秦四清等^[1]、徐曾和等^[2-3]应用突变理论研究了对称开采时煤柱-顶板模型的失稳及其延迟效应。李宏等^[4]研究了非对称开采时矿柱-顶板模型的理论解。从总体上看,各位学者都将垂直荷载近似为均布荷载,但在实际工程中,因上覆土层和矿层厚薄不均,垂直荷载显然为非均布荷载^[5-7]。基于此,本文中笔者对在非均布荷载作用下的煤柱-顶板系统动力失稳的机制进行了探索。

1 力学简化模型

应用柱式采煤方法,采空区内留下大量的煤柱,这些煤柱支撑着坚硬难冒顶板岩体,见图 1。随着开采的进行,坚硬顶板的厚度不断变薄,当达到某一临界值时,顶板在上层岩土和自身的重力作用下,产生大面积突然冒落,引发矿山灾害的发生。笔者从力学理论角度来研究煤柱-顶板的塌陷破坏机理,有助于在更深层次上认识坚硬难冒顶板大面积一次性冒落这一矿山压力现象的本质,以便寻求解决顶板冒落的工程控制问题。

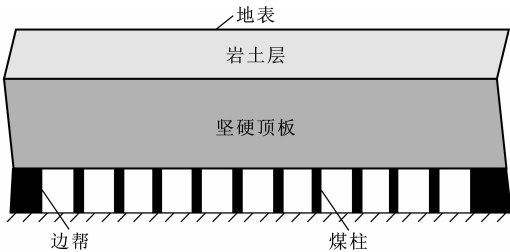


图 1 采空区垂直剖面

Fig. 1 Cross Section of Coal Pillar and Roof System

实际情况是很复杂的,在进行系统失稳分析之前必须抽象出一个合理的简化模型。不妨将坚硬顶板简化为深梁,将每个煤柱视为相同的受压弹性直

杆,其弹性模量为 E_0 ,高度为 H 。假设煤柱是等距分布的,可以将这些等距分布的弹性直杆近似地等效成连续分布的温克尔弹性基础,记等效弹性地基系数为 k ,则有 $k=E_0/H$ 。煤柱-顶板系统的力学简化模型如图 2 所示。

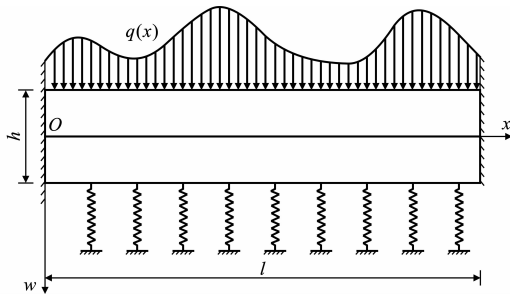


图 2 煤柱-顶板系统的力学简化模型

Fig. 2 Mechanical Simplified Model of Coal Pillar and Roof System

2 非均布荷载作用下近似挠度的求解

在实际地质工程中,垂直荷载是任意形式的,不妨将上覆不均匀岩土层引起的垂直荷载取为均布荷载和半周期正弦函数形式荷载之和,即

$$q(x)=c_1+c_2\sin(\pi x/l)$$
 (1)

式中: $q(x)$ 为非均布荷载; l 为顶板总长度; c_1 、 c_2 为确定非均布荷载的任意常数。

弹性地基对顶板的作用荷载 p 为

$$p=k\omega$$
 (2)

式中: ω 为顶板挠度。

由图 2 可知,煤柱-顶板系统的端部固支,其边界条件为 $\omega|_{x=0,l}=0, \frac{d\omega}{dx}|_{x=0,l}=0$,故可设梁的挠度曲线方程为

$$\omega=\frac{u}{2}(1-\cos\frac{2\pi x}{l})$$
 (3)

式中: u 为位移参数,等于挠度峰值 ω_{\max} 。

弹性地基上顶板的应变能^[8]为

$$U=\frac{EI}{2}\int_0^l(\frac{d^2\omega}{dx^2})^2dx=2u^2\frac{EI\pi^4}{l^4}\cdot\int_0^l\cos(\frac{2\pi x}{l})dx=\frac{\pi^4EI}{l^3}u^2$$
 (4)

式中: E 为梁的弹性模量; I 为顶板横截面对中心轴的转动惯量, $I=bh^3/12$, b 为顶板宽度, h 为顶板厚度。

对顶板而言,外力由作用在顶板上的非均布荷载和弹性地基反力两部分构成,则外力做功可以表示为

$$L = \int_0^l q w dx + \int_0^l p w dx = \int_0^l (p + q) w dx = \frac{l}{24\pi} (12c_1\pi + 32c_2 + 9k\pi u) u \quad (5)$$

顶板的总势能 Π 为顶板应变能和外力做功之和,其表达式为

$$\Pi = U - L = \frac{\pi^4 EI}{l^3} u^2 - \frac{l}{24\pi} (12c_1\pi + 32c_2 + 9k\pi u) u \quad (6)$$

根据最小势能原理有 $\delta\Pi = 0$, 对式(6)求变分可得挠度曲线中的位移参数 u 为

$$u = \frac{2l^4 (3c_1\pi + 8c_2)}{3\pi(8\pi^4 EI - 3kl^4)} \quad (7)$$

将式(7)代入式(3)中,可得顶板的挠度为

$$w = \frac{(3c_1\pi + 8c_2)l^4}{3\pi(8\pi^4 EI - 3kl^4)} (1 - \cos \frac{2\pi x}{l}) \quad (8)$$

3 突变模型的建立

3.1 系统势能函数的求取

对式(6)按 u 的幂次排列,得到顶板总势能的表达式为

$$\Pi = U - L = (\frac{\pi^4 EI}{l^3} - \frac{3kl}{8}) u^2 - (\frac{c_1 l}{2} + \frac{4c_2 l}{3\pi}) u \quad (9)$$

不难发现,式(9)并非尖点突变的标准形式,这是由于式(9)中求顶板应变能时做了一定的近似造成的。其实,顶板的精确应变能^[9]表达式应为

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l (\frac{d^2 w}{dx^2})^2 \sqrt{1 + (\frac{dw}{dx})^2} dx \quad (10)$$

这样,将式(1)代入式(10),然后对式(10)做Taylor级数展开可得

$$U = (\frac{2\pi^4 EI}{l^3} - \frac{8\pi^6 EI}{l^3} + \frac{32\pi^8 EI}{15l^{13}}) u^2 + (\frac{4\pi^8 EI}{3l^5} - \frac{64\pi^{10} EI}{15l^{15}}) u^4 + O(u^6) \quad (11)$$

所以顶板的总势能为

$$\Pi = U - L = -\frac{386\ 910EI}{l^5} u^4 + (\frac{17\ 873EI}{l^3} - \frac{3kl}{8}) u^2 - \frac{(3c_1\pi + 8c_2)l}{6\pi} u + O(u^6) \quad (12)$$

笔者感兴趣的是 u^2 及 u 均很小的情况,因此可以确定4次项是不为0的最低次项,故可略去6次及其以上的项,而不会影响顶板总势能 Π 在原点附近的形态。

3.2 尖点突变模型的建立

对式(12)做变量代换,将其转化为尖点突变的标准形式,令 $x = (383\ 910EI/l^5)^{1/4} u$, $\alpha =$

$\frac{3kl/8 - 17\ 873EI/l^3}{(386\ 910EI/l^5)^{1/2}}$, $\beta = \frac{(3c_1\pi + 8c_2)l/(6\pi)}{(386\ 910EI/l^5)^{1/4}}$, 则系统总势能可化为以 α, β 为控制变量,以 x 为状态变量的尖点突变模型,即

$$\Pi = -(x^4 + \alpha x^2 + \beta x) \quad (13)$$

所以,流形曲面的方程为

$$4x^3 + 2\alpha x + \beta = 0 \quad (14)$$

三次代数方程式(14)的解依赖于2个参数 α 和 β , 即有 $w = w(\alpha, \beta)$, 其为如图3所示的流形曲面。根据突变理论^[10-11], 式(14)的解与尖点突变模型有关。流形曲面在控制参数平面的投影称之为分岔点集(图4), 式(14)的分岔点集方程为

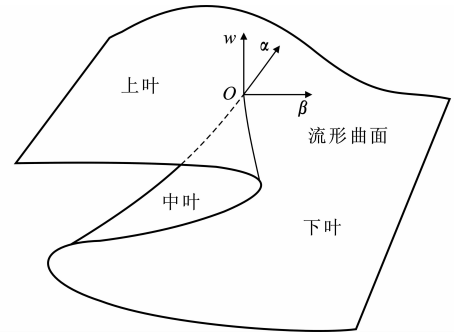


图3 流形曲面

Fig. 3 Manifold Curved Surface

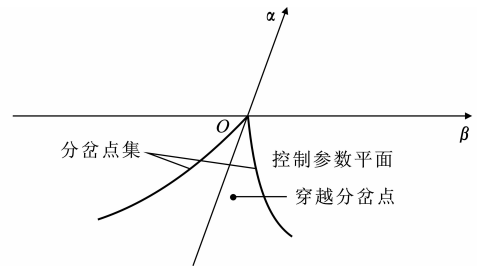


图4 控制参数平面上的分岔点集

Fig. 4 Bifurcation Point Set in Control Parameter Plane

$$8\alpha^3 + 27\beta^2 = 0 \quad (15)$$

将 α, β 代入式(15)中可得

$$8 \times [(\frac{3kl}{8} - \frac{17\ 873EI}{l^3})(386\ 910EI/l^5)^{-\frac{1}{2}}]^3 + 27 \times [\frac{(3c_1\pi + 8c_2)l}{6\pi}(386\ 910EI/l^5)^{-\frac{1}{4}}]^2 = 0 \quad (16)$$

由突变理论可知,势函数仅在分叉点集上有退化的临界点。因此上述力学模型系统在各参数满足式(16)时是不稳定的,可能出现由一个平衡状态突变到另一个平衡状态的情况,在实际地质工程中则体现为结构体系突变失稳。对顶板厚度 h 变化时煤柱-顶板系统的突然失稳问题,可将 $I = bh^3/12$ 代入式(16)得

$$8 \times \left(\frac{3lk}{8} - \frac{17}{12l^3} \frac{873Ebh^3}{12l^3} \right)^3 + 27 \times \left(\frac{3c_1\pi + 8c_2}{6\pi} \right)^2 \frac{386}{12l} \frac{910Ebh^3}{12l} = 0 \quad (17)$$

对式(17)进行适当变换可得

$$\frac{17}{12l^3} \frac{873Ebh^3}{12l^3} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{3c_1\pi + 8c_2}{6\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{386}{12l} \frac{910Ebh^3}{12l} \right)^{\frac{1}{3}} h - \frac{3lk}{8} = 0 \quad (18)$$

式(18)就是最终的系统分叉点集表达式。不难发现,式(18)为顶板厚度 h 的三次方程,求解该方程即可初步确定顶板的临界厚度。值得指出的是,实际顶板厚度小于依据式(18)确定的临界厚度为煤柱-顶板系统失稳的必要条件而非充分条件。

4 失稳条件

4.1 失稳的必要条件和临界厚度

由图 4 和式(14)可知,只有 $\alpha < 0$ 时煤柱-顶板系统才可能跨越分叉点集发生突变。注意到由式(13)到式(14)时在方程等号两边都改变了系数的符号,所以在这里应该是 $\alpha \geq 0$ 时该系统才可能发生突变,由此可得失稳的必要条件为

$$\frac{3kl}{8} - \frac{17}{l^3} \frac{873EI}{12l^3} \geq 0 \quad (19)$$

将 $I = bh^3/12$ 代入式(19)得

$$9kl^4 - 35 \frac{746Ebh^3}{12l^3} \geq 0 \quad (20)$$

对式(20)进行适当变换,则可得到顶板的临界厚度为

$$h \leq \sqrt[3]{\frac{9kl^4}{35 \frac{746Eb}{12l^3}}} \quad (21)$$

即当顶板厚度小于临界厚度时,煤柱-顶板系统可能发生动力失稳,同样,此处获得的顶板临界厚度仍然为煤柱-顶板系统失稳的必要条件而非充分条件。

4.2 失稳的充分条件

当顶板的有效厚度 h 逐渐减小到其临界值[式(18)],同时常参数 $\alpha < 0$ [式(21)]时,则可穿越分岔点集(图 4)。根据突变理论,顶板的塌陷位移(煤柱的压缩位移) w 将产生突跳,顶板产生极限点失稳,煤柱-顶板系统完全塌陷。结合式(18)和式(21),可得煤柱-顶板系统失稳的充分条件为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{17}{12l^3} \frac{873Ebh^3}{12l^3} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{3c_1\pi + 8c_2}{6\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \\ & \left(\frac{386}{12l} \frac{910Ebh^3}{12l} \right)^{\frac{1}{3}} h - \frac{3lk}{8} = 0 \\ & h \leq \sqrt[3]{\frac{9kl^4}{35 \frac{746Eb}{12l^3}}} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

依据式(22)的第 1 式可初步确定顶板的临界厚度,同时,煤柱-顶板系统失稳必须在式(22)的第 2 式所限制的范围内发生。因此,最终的顶板临界厚度应为式(22)的 2 个表达式所确定值中的较大者。不难发现,煤柱-顶板系统发生失稳与否不仅取决于顶板的厚度 h 、长度 l 、宽度 b 、弹性模量 E 、弹性地基系数 k ,而且还与上覆岩土层对顶板产生的荷载的分布形式 c_1 、 c_2 密切相关。对于顶板而言,顶板越长、弹性模量越小、宽度越小、厚度越小,越易于发生突变失稳;对于煤柱而言,弹性模量越小、高度越大,越易于发生突变失稳。

5 算例分析

以甘肃省河西走廊北侧的某矿体为例进行分析。根据该矿的岩层和煤层工程地质及采空区的实际情况,近似地将采空区视为矩形区域,坚硬顶板长度 $l = 200$ m,宽度 $b = 60$ m。顶板岩石为粗砂岩,弹性模量 $E_s = 4$ GPa,泊松比 $\nu = 0.24$,顶板岩石极限抗拉强度 $[\sigma_s] = 10.37$ MPa。煤柱的高度 $H = 20$ m,弹性模量 $E_0 = 0.8$ GPa,峰值抗压强度 $[\sigma_m] = 19.9$ MPa。作用在顶板上总的非均布载荷可近似为 $q = c_1 + c_2 \sin(\pi x/l) = 10 + 5 \sin(\pi x/200)$ 。则弹性地基系数 $k = E_0/H = 40$ MPa \cdot m $^{-1}$ 。由式(18)可确定顶板的临界厚度,即

$$\frac{17}{12 \times 200^3} \frac{873 \times 4 \times 10^9 \times 60}{12 \times 200^3} h^3 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{3 \times 10\pi + 8 \times 5}{6\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{386}{12 \times 200} \frac{910 \times 4 \times 10^9 \times 60}{12 \times 200} \right)^{\frac{1}{3}} h - \frac{3 \times 200 \times 4 \times 10^7}{8} = 0 \quad (23)$$

求解方程式(23),可初步确定顶板的临界厚度为 $h = 4.1$ m。

由式(21)可得矿层顶板的厚度为

$$h \leq \sqrt[3]{\frac{9l^4 k}{35 \frac{746Eb}{12l^3}}} = 4.064 \text{ m} \approx 4 \text{ m} \quad (24)$$

比较式(23)、(24)的结果,取较大者 $h = 4.1$ m 作为顶板的临界厚度,即当 $h < 4.1$ m 时煤柱-顶板系统将发生失稳坍塌。

6 结 语

(1)针对实际工程中作用在煤柱-顶板系统上的荷载为非均布荷载的现象,笔者探讨了在非均布荷载作用下煤柱-顶板系统的失稳机制,并给出了相应的失稳判据;同时,在失稳判据的基础上进一步确定了采空区顶板的临界厚度。其中,顶板临界厚度由分岔点集的方程确定,同时还应满足常参数 $\alpha < 0$ 的

条件。

(2)煤柱-顶板系统失稳是多种因素相互作用的结果,除与煤柱和顶板的材料属性及几何尺寸相关外,还与其所承受的荷载类型有关。一般来说,对于顶板而言,顶板越长、弹性模量越小、宽度越小、厚度越小,越易于发生突变失稳;对于煤柱而言,弹性模量越小、高度越大,越易于发生突变失稳。在荷载分布类型方面,考虑荷载的非均匀分布为煤柱-顶板系统的精细化分析和设计奠定了基础。

(3)为煤柱-顶板系统失稳进一步研究和相关规范的制定提供了参考,同时,所得结果简单易懂,便于工程应用,为工程中合理布置采场、控制采空程度提供了依据。

参考文献:

References:

- [1] 秦四清,何怀锋. 狭窄煤柱冲击地压失稳的突变理论分析[J]. 水文地质工程地质, 1995, 22(5): 17-20.
QIN Si-qing, HE Huai-feng. Catastrophe Analysis of Narrow Coal Pillar Instability in the Impact Area[J]. Hydrogeology and Engineering Geology, 1995, 22(5): 17-20.
- [2] 徐曾和,徐小荷,唐春安. 坚硬顶板下煤柱岩爆的尖点突变理论分析[J]. 煤炭学报, 1995, 20(5): 485-491.
XU Zeng-he, XU Xiao-he, TANG Chun-an. Theoretical Analysis of a Cusp Catastrophe Bump of Coal Pillar Under Hard Rocks[J]. Journal of China Coal Society, 1995, 20(5): 485-491.
- [3] 徐曾和,徐小荷. 柱式开采岩爆发生条件与时间效应的尖点突变[J]. 中国有色金属学报, 1997, 7(2): 17-23.
XU Zeng-he, XU Xiao-he. Cusp Catastrophe of Occurrence Conditions and Hysteresis of Rockbursts in Pillar Workings[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 1997, 7(2): 17-23.
- [4] 李宏,徐曾和,徐小荷,等. 非对称开采时矿柱岩爆的准则与前兆[J]. 中国矿业, 1997, 6(1): 46-51.
LI Hong, XU Zeng-he, XU Xiao-he, et al. Criteria and Forewarning of Ore Pillar Rock Bursts in Asym-

metric Mining[J]. China Mining Magazine, 1997, 6(1): 46-51.

- [5] 贺广零,洪芳,王艳苹. 采空区煤柱-顶板系统失稳的力学分析[J]. 建筑科学与工程学报, 2007, 24(1): 31-36.
HE Guang-ling, HONG Fang, WANG Yan-ping. Mechanical Analysis of Instability of Coal Pillar and Roof System in Goaf[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2007, 24(1): 31-36.
- [6] 石坚,武莹,贺建辉. 上部结构、筏板基础和地基共同作用的有限元分析[J]. 建筑科学与工程学报, 2006, 23(2): 72-75.
SHI Jian, WU Ying, HE Jian-hui. FEA on Interaction of Super Structure, Raft Foundation and Ground Base[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2006, 23(2): 72-75.
- [7] 康亚明,杨明成,胡艳香,等. 基于重度增加法的边坡稳定性三维有限元分析[J]. 建筑科学与工程学报, 2006, 23(4): 49-53.
KANG Ya-ming, YANG Ming-cheng, HU Yan-xiang, et al. 3-D FEM Analysis of Slope Stability Based on Gravity Increase Method[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2006, 23(4): 49-53.
- [8] 徐芝纶. 弹性力学:下册[M]. 北京:高等教育出版社, 1992.
XU Zhi-lun. Elasticity Mechanics: Volume 2[M]. Beijing: Higher Education Press, 1992.
- [9] 刘正兴,孙雁,王国庆. 计算固体力学[M]. 上海:上海交通大学出版社, 2000.
LIU Zheng-xing, SUN Yan, WANG Guo-qing. Calculating Solid Mechanics[M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 2000.
- [10] SAUNDERS P T. 突变理论入门[M]. 凌复华,译. 上海:上海科学技术文献出版社, 1983.
SAUNDERS P T. An Introduction to Catastrophe Theory[M]. Translated by LING Fu-hua. Shanghai: Shanghai Science & Technology Literature Press, 1983.
- [11] ARNOLD V I. Catastrophe Theory[M]. Berlin: Springer-verlag, 1986.