

文章编号:1673-2049(2009)03-0027-05

# 钢-混凝土连续组合梁腹板局部屈曲分析

蒋丽忠<sup>1</sup>, 曾丽娟<sup>1</sup>, 孙林林<sup>2</sup>

(1. 中南大学 土木建筑学院, 湖南 长沙 410075; 2. 江苏省交通科学研究院股份有限公司, 江苏 南京 210017)

**摘要:**对连续组合梁负弯矩区钢腹板的稳定性进行了研究, 分析了负弯矩区钢梁腹板在弯曲、轴向压力和剪切作用下的力学性能, 提出了组合梁腹板在各种荷载作用下的局部稳定性简化计算模型, 建立了非均匀受压、纯剪和弯剪复合受力状态下的临界屈曲应力计算公式; 分别计算了钢梁腹板在非均匀受压和纯剪状态下的弹性屈曲系数, 并根据偏心受压与剪切作用下的相关方程计算了钢梁腹板在复杂应力状态下的弹性屈曲系数; 基于屈曲分析结果, 提出了组合梁在弹性受力阶段钢梁腹板不设横向加劲肋的高厚比限值。结果表明: 采用该方法确定的钢梁腹板高厚比更具合理性, 且计算过程简单, 结果偏于安全。

**关键词:**钢-混凝土连续组合梁; 稳定承载力; 屈曲模型; 局部屈曲; 高厚比

**中图分类号:** TU398

**文献标志码:** A

## Local Buckling Analysis of Web of Continuous Steel-concrete Composite Beam

JIANG Li-zhong<sup>1</sup>, ZENG Li-juan<sup>1</sup>, SUN Lin-lin<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Central South University, Changsha 410075, Hunan, China;

2. Jiangsu Transportation Research Institute Co., Ltd, Nanjing 210017, Jiangsu, China)

**Abstract:** The stability of steel web in negative moment area of the continuous composite beam was studied. The mechanical behaviors of steel web in negative moment area under the load of bending, axial pressure and shear were analyzed, and a simplified model for calculating the local stability of web of composite beam under different loads was proposed, and formulas were also formed for calculating critical buckling stress under the load of non-uniform compression, shear and complicated stress loads of bending and shear. The elastic buckling factors under the load of non-uniform compression and shear were separately calculated. The elastic buckling factor under the complicated stress load of bending and shear was calculated according to interaction equation of eccentric compression and shear. Based on results of the buckling analysis, the limiting height to thickness ratio was also determined for webs without stiffening ribs in the elastic stage based on the critical buckling load. The results show that the method is more reasonable for determining height to thickness ratio of steel web of beam, and the calculating process is simple, the result is on safe side.

**Key words:** continuous steel-concrete composite beam; bearing capacity of stability; buckling model; local buckling; height to thickness ratio

收稿日期: 2009-06-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(50778177); 湖南省杰出青年基金项目(07JJ1009)

作者简介: 蒋丽忠(1971-), 男, 湖南衡山人, 教授, 博士研究生导师, 工学博士, E-mail: lzjiang@mail.csu.edu.cn.

## 0 引言

组合梁中的钢梁通常是由钢板组成的工字形、箱形、T 形等截面的实腹式构件,为了提高组合梁的稳定承载力,做到用料经济,应尽可能采用宽展形截面。但当所用板件过薄时,在面内压力作用下,构件尚未丧失整体稳定性以前,个别板件有可能先不能保持其平面平衡状态而发生平面外的波形凸曲现象,这种现象称为组合梁的局部板件丧失稳定,简称局部失稳<sup>[1]</sup>。

对于钢-混凝土组合梁腹板,有可能发生复合应力作用下的局部失稳。中国目前尚无专门的组合结构规范,组合梁的局部稳定设计主要沿用钢梁的设计方法,限定钢梁翼缘以及腹板的宽厚比,或在腹板上采用加设纵横向加劲肋来防止局部失稳的产生。这样一方面与组合梁的实际情况不符合,过高或过低估计了组合梁的承载能力,另一方面在许多情况下,导致了不必要的增设纵横向加劲肋。组合梁和纯钢梁在腹板的受力特性上有所区别,套用纯钢梁的设计方法,必然影响设计的经济合理性,故对组合梁腹板的稳定问题进行分析研究是非常必要的。

为了避免钢-混凝土组合梁腹板发生局部失稳,笔者将主要对连续组合梁负弯矩区钢腹板的力学性能进行研究,提出组合梁腹板稳定性的简化计算模型,并根据组合梁腹板稳定问题的特点,用能量法分析得出腹板稳定的临界应力,探讨组合梁在弹性受力阶段钢梁腹板不设横向加劲肋的高厚比限值。

## 1 非均匀受压状态下的屈曲

由于连续组合箱梁在承受不利荷载作用下,中间支座处出现负弯矩区,因而中间支座附近截面钢梁的下半部分腹板处于受压状态,当达到其临界压力时,其结果是导致钢梁腹板的局部失稳,影响截面极限承载力的发挥。

作用在平板面内的荷载沿作用边线性分布,其表达式为

$$N_x = N_b(1 - \frac{\lambda y}{h_0}) \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{N_b - N_t}{N_b} \quad (2)$$

式中:  $N_x$  为受荷载边单位长度上的压力;  $N_b$ 、 $N_t$  分别为受荷载边单位长度上的最大压力和最小压力;  $y$  为腹板上某点到最大压力点的距离;  $h_0$  为腹板高度;  $\lambda$  为单位长度压力沿腹板宽度的变化率。

利用里兹能量法<sup>[2]</sup>求腹板的弹性屈曲强度,假定其位移函数  $\omega(y, z)$  前面部分是满足非加载位移边界条件的四次多项式,后面部分是满足受荷载边位移边界条件的三角调和函数,则满足所有边界条件的屈曲位移函数表达式为

$$\omega(y, z) = [\frac{y}{h_0} + \frac{\chi_b}{2}(\frac{y}{h_0})^2 + \frac{-(12 + 5\chi_b + \chi_b\chi_t + 3\chi_t)}{6 + \chi_t}(\frac{y}{h_0})^3 + \frac{(6 + 2\chi_b + \chi_b\chi_t/2 + 2\chi_t)}{6 + \chi_t}(\frac{y}{h_0})^4] \sum_m C_m \sin \frac{m\pi z}{l} \quad (3)$$

式中:  $\chi_b$ 、 $\chi_t$  为非加载边的约束系数;  $C_m$  为钢梁腹板受荷载边位移的最大幅值;  $m$  为正弦半波个数;  $l$  为腹板弹性约束边长度;  $z$  为沿腹板弹性约束边上某点到嵌固边的距离。

当腹板产生屈曲变形时,板内的弯曲弹性应变能  $U_e$  为

$$U_e = \frac{Et_w^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^l \int_{-h_0}^0 [u_{w,yy}^2 + 2\nu u_{w,yy} u_{w,zz} + u_{w,zz}^2 + 2(1-\nu)u_{w,yz}^2] dydz = \frac{D}{2} \int_0^l \int_{-h_0}^0 [u_{w,yy}^2 + 2\nu u_{w,yy} u_{w,zz} + u_{w,zz}^2 + 2(1-\nu)u_{w,yz}^2] dydz \quad (4)$$

式中:  $D$  为腹板的弯曲刚度,  $D = Et_w^3/[12(1-\nu^2)]$ ,  $E$  为钢材的弹性模量,  $t_w$  为腹板厚度,  $\nu$  为钢材的泊松比;  $u_{w,yy}$ 、 $u_{w,zz}$  为腹板位移  $u_w$  对  $y$ 、 $z$  的二阶导数。

由于腹板沿非加载边的转动受到约束,其储存于等效弹簧中的应变能  $U_r$  的表达式为

$$U_r = \frac{1}{2} \int [\zeta_b (\frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=0})^2 + \zeta_t (\frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=h_0})^2] d\Gamma \quad (5)$$

式中:  $\zeta_b$ 、 $\zeta_t$  为非加载边转动约束刚度。

面内荷载  $N_x$  所做的功  $V$  为

$$V = \frac{1}{2} N_b \iint (1 - \lambda \frac{y}{h_0}) (\frac{\partial \omega}{\partial z})^2 dydz \quad (6)$$

总势能  $\Pi$  是应变能  $U$  和外力功  $V$  之和,而  $U = U_e + U_r$ , 则有

$$\begin{aligned} \Pi = U - V = U_e + U_r - V = & \frac{D}{2} \int_0^l \int_0^{h_0} [u_{w,yy}^2 + 2\nu u_{w,yy} u_{w,zz} + u_{w,zz}^2 + 2(1-\nu)u_{w,yz}^2] dydz + \\ & \frac{1}{2} \int [\zeta_b (\frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=0})^2 + \zeta_t (\frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=h_0})^2] d\Gamma - \\ & \frac{1}{2} N_b \iint (1 - \lambda \frac{y}{h_0}) (\frac{\partial \omega}{\partial z})^2 dydz \end{aligned} \quad (7)$$

由最小势能原理可知,在给定外力作用下,实际存在的一组位移使腹板的总势能取极小值,即

$$\delta \Pi = \delta U_e + \delta U_r - \delta V \quad (8)$$

将满足所有边界条件的屈曲位移函数式(3)及

总势能方程式(7)代入式(8)得

$$\delta \Pi = \delta U_e + \delta U_r - \delta V =$$

$$\begin{aligned} & D \left[ \frac{\pi^4 h_0 A_1}{5 \cdot 040 l^3 (6 + \chi_t)^2} \sum C_m m^4 \delta C_m + \right. \\ & \frac{l A_2}{10 (6 + \chi_t)^2 h_0^3} \sum C_m \delta C_m + \\ & \frac{2 \pi^2 A_3}{420 (6 + \chi_t)^2 h_0 l} \sum C_m m^2 \delta C_m \left. \right] + \\ & \frac{D l}{2 h_0^3} \left[ \frac{A_4 + A_5}{(6 + \chi_t)^2} \right] \sum C_m \delta C_m + \\ & \frac{\pi^2 h_0 N_b A_6}{10 \cdot 080 h_0 (6 + \chi_t)^2} \sum C_m m^2 \delta C_m = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$A_1 = 4(1 \ 116 + 285 \chi_t + 19 \chi_t^2) + (1 \ 140 + 272 \chi_t +$$

$$17 \chi_t^2) \chi_b + (76 + 17 \chi_t + \chi_t^2) \chi_b^2$$

$$A_2 = 36(24 + 6 \chi_t + \chi_t^2) + 4(54 + 9 \chi_t + 2 \chi_t^2) \chi_b +$$

$$(36 + 8 \chi_t + \chi_t^2) \chi_b^2$$

$$A_3 = 72(51 + 13 \chi_t + \chi_t^2) + 3(312 + 70 \chi_t + 5 \chi_t^2) \chi_b +$$

$$(72 + 15 \chi_t + \chi_t^2) \chi_b^2$$

$$A_4 = (6 + \chi_b)^2 \chi_t$$

$$A_5 = (6 + \chi_t)^2 \chi_b$$

$$A_6 = 4 \ 464(2 - \lambda) + 24(95 - 44 \lambda) \chi_t + 2(76 -$$

$$33 \lambda) \chi_t^2 + [24(95 - 51 \lambda) + 272(2 - \lambda) \chi_t +$$

$$2(17 - 8 \lambda) \chi_t^2] \chi_b + [(15 - 86 \lambda) + (34 -$$

$$18 \lambda) \chi_t + 2(2 - \lambda) \chi_t^2] \chi_b^2$$

由于  $\delta C_i$  的任意性,可以得到  $i$  个关于位移函数系数的线性方程,即

$$k_{ij} C_i = 0 \quad (10)$$

虽然系数  $C_i$  全为 0 满足式(9),但是它表示腹板没有产生屈曲位移,处于稳定的平衡状态,此解为平凡解。如果腹板已经发生屈曲,则系数  $C_i$  不全为 0,那么系数矩阵的行列式就得为 0,即

$$k_{ij} = 0 \quad (11)$$

从而可以计算出腹板屈曲的临界荷载,通过整理可得到腹板屈曲系数  $k_t$  的计算公式为

$$k_t = \frac{24}{A_6 \pi^2} [2A_3 + \sqrt{(56 + \frac{7}{32}) A_1 A_7}] \quad (12)$$

$$A_7 = A_2 + 5(A_4 + A_5)$$

则矩形腹板的临界屈曲荷载  $N_{cr}$  的计算公式为

$$N_{cr} = k_t \frac{\pi^2 D}{h_0^2} \quad (13)$$

临界屈曲应力为

$$\sigma_{cr} = k_t \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t_w}{h_0} \right)^2 \geq f_y \quad (14)$$

式中:  $f_y$  为钢材的屈服强度;  $\sigma_{cr}$  为非均匀受压时腹板的屈曲应力。

由式(14)可得到非均匀受压时组合梁弯矩矩区的腹板高厚比限值为

$$\frac{h_0}{t_w} \leq \sqrt{\frac{k_t \pi^2 E}{12(1 - \nu^2) f_y}} \quad (15)$$

## 2 纯剪状态下的屈曲

腹板受剪切而失稳是屈曲问题的一个重要经典问题<sup>[8]</sup>。腹板是狭长的,其长度  $l$  远大于高度  $h_0$ ,腹板的中面剪力  $N_{yz}$  所做的功  $W$  为

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iint 2N_{yz} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial z} dy dz = \\ & \frac{1}{2} \iint 2\tau_{yz} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial z} t_w dy dz \end{aligned} \quad (16)$$

式中:  $\tau_{yz}$  为中截面剪应力。

总势能  $\Pi$  是应变能  $U$  和外力功  $W$  之和,即

$$\begin{aligned} \Pi &= U - W = U_e + U_r - W = \frac{D}{2} \int_0^l \int_0^{h_0} [u_{w,yy}^2 + \\ & 2\nu u_{w,yy} u_{w,zz} + u_{w,zz}^2 + 2(1 - \nu) u_{w,yz}^2] dy dz + \\ & \frac{1}{2} \int [\zeta_b \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{y=0}^2 + \zeta_t \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{y=h_0}^2] d\Gamma - \\ & \frac{A_8}{60(6 + \chi_b)^2 \tau_{yz} t_w} \sum_m \sum_n C_m C_n \frac{mn}{m^2 - n^2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$A_8 = (h_0 - 1)(8\chi_t + \chi_b \chi_t + 72 + \chi_b)(6 + \chi_t)$$

式中:  $C_n$  为钢梁腹板受荷载边位移的最大幅值;  $n$  为正弦半波个数。

根据第 1 节的方法可以得到腹板纯剪屈曲时的屈曲系数  $k_s$  为

$$k_s = \frac{90 \sqrt{P_1 P_2}}{A_8} \quad (18)$$

$$P_1 = \frac{\pi^2 h_0^3 A_1}{5 \cdot 040 l^3} + \frac{l A_2}{10 \pi^2 h_0} + \frac{2 h_0 A_3}{420 l} + \frac{l(A_4 + A_5)}{2 \pi^2 h_0}$$

$$P_2 = \frac{16 \pi^2 h_0^3 A_1}{5 \cdot 040 l^3} + \frac{l A_2}{10 \pi^2 h_0} + \frac{8 h_0 A_3}{420 l} + \frac{l(A_4 + A_5)}{2 \pi^2 h_0}$$

剪应力  $\tau_{cr}$  可以表示为

$$\tau_{cr} = \frac{k_s \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t_w}{h_0} \right)^2 \quad (19)$$

从而可以得到腹板在纯剪时的高厚比限值为

$$\frac{h_0}{t_w} \leq \sqrt{\frac{k_s \pi^2 E}{12(1 - \nu^2) f_y}} \quad (20)$$

## 3 非均匀轴力和剪力共同作用下的局部屈曲

多跨连续组合梁在工作时,中间支座截面上作用的弯矩及剪力都很大,受力状态很复杂,所以要同时考虑弯矩和剪力对腹板屈曲的影响。

组合梁腹板屈曲前的应力状态为:偏心压应力

沿腹板高度方向呈线性变化;剪应力均匀分布,且各种应力在一个腹板区格内沿梁长度方向保持恒定,计算模型如图 1 所示。

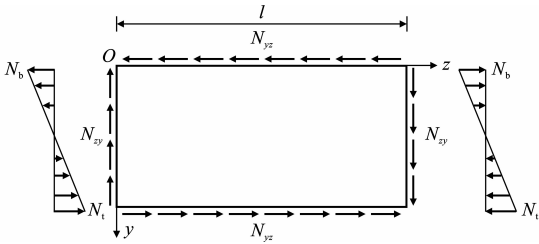


图 1 矩形腹板复合应力状态下的屈曲模型  
Fig. 1 Buckling Model of Rectangular Web Under Complicated Stress State

在轴向压力、弯矩和剪力的共同作用下<sup>[4]</sup>,如果压弯构件失稳时腹板仍然处在弹性状态,Chwala 按图 1 所示腹板在非均匀受压和受剪共同作用下的受力条件,给出弹性屈曲的近似计算公式为

$$\left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 \leq 1 \quad (21)$$

式中: $\sigma$ 为腹板边缘的最大压应力。

当腹板在几种应力作用下达到临界状态时,可从式(23)得到用边缘最大压应力  $\sigma$  表示的弹性屈曲应力  $\sigma_{cs}$ ,其通式可表示为

$$\sigma_{cs} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_w}{h_0}\right)^2 \quad (22)$$

式中: $k$ 为组合梁腹板在组合应力作用下的屈曲系数,其表达式为

$$k = k_t k_s \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 k_s^2 + 4k_t^2 \gamma^2} - \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) k_s \right] / (2k_t^2 \gamma^2 + \lambda k_s^2) \quad (23)$$

式中: $\gamma$ 为剪应力与最大压应力之比。

由式(23)得到组合应力状态下组合梁负弯矩区的腹板高厚比限值为

$$\frac{h_0}{t_w} \leq \sqrt{\frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2) f_y}} \quad (24)$$

## 4 算例分析

某两等跨连续组合梁,单跨度  $l_1 = 12\text{ m}$ ,构造简图及负弯矩区梁的截面尺寸如图 2 所示。组合梁全高  $h = 720\text{ mm}$ ,混凝土翼板为 C30 现浇混凝土板,混凝土板厚  $h_c = 120\text{ mm}$ ,混凝土板的有效宽度  $b_c = 800\text{ mm}$ ,钢梁高  $600\text{ mm}$ ,钢材为 Q235,剪力连接件采用直径为  $16\text{ mm}$  的圆钉柱头栓钉,混凝土翼缘板横向配筋均采用直径为  $6\text{ mm}$  的光圆钢筋,沿梁

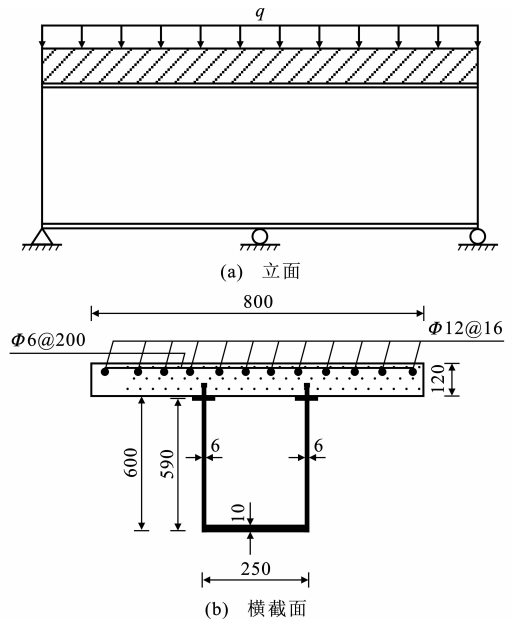


图 2 钢-混凝土连续组合梁(单位:mm)  
Fig. 2 Continuous Steel-concrete Composite Beam (Unit:mm)

纵向等间距布置,纵向钢筋采用直径为  $12\text{ mm}$  的光圆钢筋。均布荷载  $q = 5\text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ,验算负弯矩区钢梁腹板的局部稳定性。

按照文献[5]的方法计算可得:组合梁腹板下缘最大压应力  $\sigma_1 = 101.756\text{ MPa}$ ;腹板上缘拉应力  $\sigma_2 = -63.139\text{ MPa}$ ,负号表示腹板上缘受拉。腹板的弯曲应力梯度  $\alpha = (\sigma_1 - \sigma_2) / \sigma_1 = 1.6388$ ,腹板平均剪应力  $\tau = 32.33\text{ MPa}$ ,剪应力与最大压应力之比  $\gamma = 0.318$ 。

### 4.1 不同方法的验算结果

用本文方法验算时,为计算方便,令  $\chi_b = \chi$ ,  $\chi_t = \chi$ ,因此在组合梁腹板非均匀受压时翼缘对腹板的嵌固系数  $\chi$  可近似取为  $1.51$ ;在组合梁腹板纯剪时翼缘对腹板的嵌固系数  $\chi$  可近似取为  $1.23$ 。

根据式(23)可以求得屈曲系数  $k = 21.6524$ 。由式(24)可知,不设加劲肋时组合梁负弯矩区的腹板高厚比限值为

$$\frac{h_0}{t_w} = 97 \leq \sqrt{\frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2) f_y}} = 130.96$$

所以不必设加劲肋。

按照文献[6]的方法计算出腹板高厚比为

$$80 < \frac{h_0}{t_w} = 97 < 170$$

所以需设横向加劲肋。

在文献[7]中,不设加劲肋时腹板弹性屈曲系数  $k_c$  可以用下式表示

$$k_e = \frac{4.812\lambda^2 - 6.233\lambda^2\gamma + 5.012}{\lambda^{0.133}} \quad (25)$$

进而可以得到不设加劲肋时腹板弹性高厚比限值为

$$\frac{h_0}{t_w} \leq \sqrt{\frac{k_e \pi^2 E}{12(1-\nu^2)\sigma_1}} = 431.5 \sqrt{\frac{k_e}{\sigma_1}} \quad (26)$$

将算例数据代入式(26)可以得到

$$\frac{h_0}{t_w} \leq 431.5 \sqrt{\frac{k_e}{\sigma_1}} = 146$$

## 4.2 结果分析

计算结果表明:

(1)临界屈曲系数  $k_t$ 、 $k_s$  与系数  $A_1$ 、 $A_3$ 、 $A_6$ 、 $A_7$ 、 $A_8$ 、 $P_1$ 、 $P_2$  有关,而从这些系数的表达式可以看出,  $A_1$ 、 $A_3$ 、 $A_6$ 、 $A_7$ 、 $A_8$ 、 $P_1$ 、 $P_2$  与正弦半波数  $m$  无关,所以  $k_t$ 、 $k_s$  与屈曲半波数无关,只与非加载边的约束系数  $\chi_b$ 、 $\chi_t$  有关。

(2)与文献[6]相比,用本文提出的计算方法确定腹板的高厚比更具有合理性,与实际情况更加接近,有利于减少用钢量,因此对连续组合梁不宜按照文献[6]验算腹板的局部稳定性。对于连续组合梁,若不考虑腹板的实际受力状态而按照构造要求设置加劲肋,有可能给设计和施工带来困难,降低工程的经济性,比较合理的方法是根据钢梁的实际受力状态来确定腹板的临界高厚比。

(3)本文所述方法的计算值与文献[7]较为接近,但文献[7]中弹性屈曲系数  $k_e$  的计算公式非常复杂,它是对  $0.4 < \lambda < 2.0$ 、 $0.1 < \gamma < 0.6$  的范围内的计算结果进行回归得到的简化计算公式,而且文献[7]中要求腹板的弹性屈曲应力不小于腹板的最大压应力,而本文的处理方法是要求腹板的弹性屈曲应力不小于屈服强度,与文献[6]相比,不但计算过程简单而且结果偏于安全。

(4)连续组合梁负弯矩区钢梁腹板的弹性临界高厚比主要受弯曲应力的影响,其次为剪应力。

## 5 结 语

本文中对组合钢梁腹板在非均匀压应力、纯剪应力以及复合应力作用下的局部稳定性进行了研究,分别建立了腹板局部失稳模型,得出了非均匀受压、纯剪和弯剪复合受力状态下的临界屈曲应力计算公式,分析了偏心受压与剪切共同作用下的相关方程和各种简单受力条件下的屈曲失稳,计算了钢

梁腹板在复杂应力状态下的弹性屈曲系数,并提出了组合梁在弹性受力阶段钢梁腹板不设横向加劲肋的高厚比限值。与文献[6]相比,用本文中提出的计算方法确定腹板的高厚比更具有合理性,与实际情况更加接近,有利于减少用钢量,与已有研究成果相比,本方法计算过程简单而且结果偏于安全。

## 参考文献:

## References:

- [1] 陈世鸣. 钢-混凝土连续组合梁负弯矩区的局部失稳[J]. 建筑结构学报, 1995, 16(6): 30-37.  
CHEN Shi-ming. Local Buckling of Continuous Composite Beam at Hogging Moment Region[J]. Journal of Building Structures, 1995, 16(6): 30-37.
- [2] 夏志斌, 潘有昌. 结构稳定理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988: 35-147.  
XIA Zhi-bin, PAN You-chang. Theory of Structural Stability[M]. Beijing: Higher Education Press, 1988: 35-147.
- [3] 王国周, 瞿履谦. 钢结构原理与设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 1993: 35-148.  
WANG Guo-zhou, QU Lu-qian. Principle and Design of Steel Structures [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1993: 35-148.
- [4] 陈绍蕃. 钢结构稳定设计指南[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1996: 215-322.  
CHEN Shao-fan. Guide to Stability Design of Steel Structures[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1996: 215-322.
- [5] 李廉锟. 结构力学[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2004: 31-150.  
LI Lian-kun. Structure Mechanics[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2004: 31-150.
- [6] GB 50017—2003, 钢结构设计规范[S].  
GB 50017—2003, Code for Design of Steel Structures [S].
- [7] 樊健生, 聂建国, 吴道闻. 钢-混凝土组合梁弹性屈曲的力学性能[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2004, 44(6): 786-788.  
FAN Jian-sheng, NIE Jian-guo, WU Dao-wen. Mechanical Behavior of Elastic Buckling of Composite Steel Concrete Beams[J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2004, 44(6): 786-788.