

文章编号:1673-2049(2009)04-0044-05

悬索桥主缆成桥线形的计算方法

逢焕平, 王建国

(合肥工业大学 土木与水利工程学院, 安徽 合肥 230009)

摘要:为了准确地计算悬索桥主缆的成桥线形和无应力索长,采用悬链线单元建立了确定悬索桥主缆线形和无应力索长的计算公式;对计算悬索桥主缆线形的非线性方程组采用 Newton-Raphson 方法求解,并详细地讨论了吊杆力的计算及悬索桥主缆线形和无应力索长的计算过程;最后通过算例验证了该方法的有效性、计算精度和稳定性,并将计算结果与其他文献方法的计算结果进行了比较。分析结果表明:该方法具有计算过程简洁和计算精度高的优点。

关键词:悬索桥;主缆线形;悬链线;无应力索长;Newton-Raphson 方法

中图分类号:U448.25

文献标志码:A

Calculation Method for Target Configuration of Main Cable of Suspension Bridge

PANG Huan-ping, WANG Jian-guo

(School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, Anhui, China)

Abstract: In order to accurately calculate the target configuration of main cable and the unstressed element length, the analytical solution of an elastic catenary cable element was utilized to establish the computing formulas for finding the target configuration of main cable and the unstressed element length. The presented nonlinear equations were analyzed by Newton-Raphson method. Meanwhile, the calculation of suspender force, the solution for the target configuration of main cable of suspension bridge, and the calculation procedures of unstressed element length were discussed in detail. Finally, the efficiency and the accuracy of the proposed method were demonstrated through an example, and the calculation results were compared with the other literature method results. The analytical results show that the presented methods have the advantages of simple procedure and high accuracy.

Key words: suspension bridge; target configuration of main cable; catenary element cable; unstressed element length; Newton-Raphson method

0 引言

悬索桥主缆成桥状态线形和主缆无应力索长的精确计算是保证悬索桥结构成桥后几何线形满足设计要求和施工控制的关键。传统的抛物线法假定恒载在全桥范围内均匀分布,主缆的成桥线形呈抛物

线形。但由于主缆的自重沿索长均匀分布,抛物线法只能作为成桥状态线形的近似计算。有学者提出了组合索法,即假定主缆的自重是沿索长均匀分布的,而加劲梁以及二期恒载看作是沿跨长均匀分布的,吊杆的自重较小,可以忽略或者看作是沿跨长均匀分布的。实际上,加劲梁和二期恒载给予主缆的

收稿日期:2009-07-17

基金项目:国家自然科学基金项目(10572046);土木工程防灾减灾安徽省工程技术中心项目(2008)

作者简介:逢焕平(1981-),男,山东胶南人,工学博士研究生,E-mail:hf_php@qq.com。

作用力并不是均布力,而是通过吊杆传递的集中力,在全桥恒载作用下主缆的曲线就是抛物线和悬链线组成的一种组合曲线。

悬索桥由主缆、吊杆、塔和加劲梁4个部分组成,加劲梁上的荷载通过吊杆传到主缆。对主缆而言,所受荷载为沿索长均匀分布的主缆自重和通过吊杆传到主缆加劲梁上的荷载,后一部分作为集中荷载处理。笔者在前人研究成果^[1-15]的基础上提出了一种确定主缆成桥线形的迭代方法。采用悬链线单元建立确定主缆线形和无应力索长的计算公式;对计算主缆线形的非线性方程组采用 Newton-Raphson 方法求解,并详细讨论了求解主缆线形和无应力索长的计算过程,最后通过算例验证了该方法的有效性、计算精度和稳定性。

1 主缆成桥线形的 Newton-Raphson 法迭代求解

笔者在分析过程中,遵循下面的基本假定:①索是完全柔性的,既不能受压也不能受弯;②索的材料符合虎克定律,即应力-应变符合线性关系;③悬索桥主缆的截面面积及自重在外荷载作用下的变化十分微小,可以忽略不计;④在计算过程中假定主缆的变形已经完成,并不再发生变化。

悬索桥主缆受力可简化为承受沿弧长均匀分布的荷载和在吊杆处作用集中荷载的柔性索。各吊点之间的主缆线形为仅受主缆自重作用的悬链线,即整个主缆可以视为按吊点划分的多段悬链线的组合,吊杆力所影响的仅仅是每段悬链线两端的位置,如图1所示。

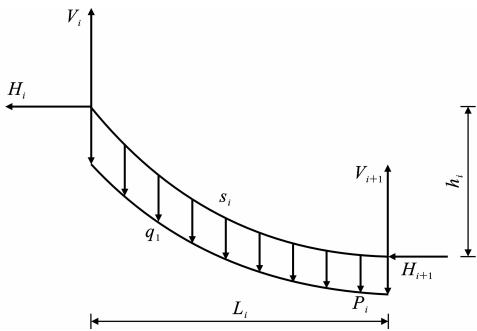


图1 第*i*段主缆的受力

Fig. 1 Force of the *i* Section Main Cable

由于吊杆的水平间距是已知的,假设第*i*段主缆的水平间距为 L_i ,该段主缆的左右高差为 h_i ,其有应力索长为 s_i ,边界条件为

$$\begin{cases} x_i(s_i) = L_i \\ y_i(s_i) = h_i \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x_i(s_i)$ 、 $y_i(s_i)$ 分别为主缆拉氏坐标 s_i 处的水平投影长度和竖向投影长度。

吊杆间任一段索都必须满足

$$\begin{cases} L_i = x_i(s_i) = \frac{H}{q_1} (\text{sh}^{-1} \frac{V_i}{H} - \text{sh}^{-1} \frac{V_i - q_1 s_i}{H}) \\ h_i = y_i(s_i) = \frac{H}{q_1} [\sqrt{1 + (\frac{V_i}{H})^2} - \sqrt{1 + (\frac{V_i - q_1 s_i}{H})^2}] \end{cases} \quad (2)$$

式中: H 为主缆的水平拉力; q_1 为主缆的荷载集度; V_i 为第*i*段主缆左端点拉力的竖向分量。

此处仅考虑吊杆垂直的情况,所以 H 在各段内均相同,如果吊杆是斜的,那么应该为 H_i 。下面考虑吊杆力的影响,本文中取如图1所示的一段作为隔离体,则由竖向力的平衡有

$$V_i = V_{i-1} - (q_1 s_{i-1} + P_{i-1}) \quad (3)$$

从式(2)可以看出, h_i 是关于 H 、 V_i 的函数。第*i*段主缆 h_i 对于 H 、 V_i 的偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial H} &= \left\{ -\sqrt{1 + (V_i/H)^2} + \frac{\sqrt{1 + [(V_i - q_1 s_i)/H]^2}}{q_1 \sqrt{1 + (V_i/H)^2} \sqrt{1 + [(V_i - q_1 s_i)/H]^2}} \right\} \\ \frac{\partial h_i}{\partial V_i} &= \left\{ \frac{V_i}{\sqrt{1 + (V_i/H)^2}} + \frac{q_1 s_i - V_i}{\sqrt{1 + [(V_i - q_1 s_i)/H]^2}} \right\} / (H q_1) \end{aligned} \quad (4)$$

各吊杆的拉力是已知的,并且假定在计算过程中主缆不伸长(因为主缆的变形已经完成),在求偏导数的过程中认为有应力索长 s_i 为常量,则 $V_i = V_1 - \sum_{n=1}^{i-1} (q_1 s_n + P_n)$ 。

通过式(2)、(3)可以计算出主缆的水平拉力 H 、对应吊杆处的竖向坐标 y 和各段的有应力索长 s_i 。式(2)是一非线性方程,需要采用迭代的方法进行求解,其具体迭代过程如下:

(1)假定第1段主缆左端点的水平拉力和竖向拉力分别为 H 、 V_1 。为了尽快得到收敛解,假定 $H = \frac{(q_1 + q_2)L^2}{8f}$, $V_1 = \frac{(q_1 + q_2)L}{2}$,其中, q_2 为加劲梁的自重, f 为主缆的矢高, L 为主缆的总长。

(2)将 H 、 V_1 代入式(2),并求解其方程,解出第1段的有应力索长 s_1 ;将求得的 s_1 以及 H 、 V_1 代入式(2),计算第1段主缆左右两端的高差 h_1 ;将求得的 s_1 以及 H 、 V_1 代入式(4),计算第1段主缆的偏导数 $\frac{\partial h_1}{\partial H}$ 、 $\frac{\partial h_1}{\partial V_i}$ 。

(3)利用式(3)计算下一段的主缆左端点主缆拉

力的竖向分量 $V_i = V_{i-1} - (q_1 s_{i-1} + P_{i-1})$, $i = 2, 3, 4, \dots$ 。

(4) 利用式(2)计算第 i 段主缆的有应力索长 s_i , 并利用式(2)计算第 i 段所对应主缆的左右高差 h_i ; 将求得的 s_i 以及 H, V_i 代入式(4), 计算第 i 段主缆的偏导数 $\frac{\partial h_i}{\partial H}, \frac{\partial h_i}{\partial V_i}$, $i = 2, 3, 4, \dots$ 。

(5) 计算 $\sum_{i=1}^{n/2} h_i, \sum_{i=1}^n h_i$, 将其计算结果与主缆在 $x = L/2$ 时的矢高 f 和 $x = L$ 时的左右高差 h 进行比较, 并计算各自的误差: $f_{\text{err}} = \sum_{i=1}^{n/2} h_i - f, y_{\text{err}} = \sum_{i=1}^n h_i - \Delta y$ 。

(6) 如果 $\|f_{\text{err}}\|_2 \leq \xi$ 并且 $\|y_{\text{err}}\|_2 \leq \xi$, 即主缆在已知点的竖向坐标满足给定的限值, 那么此次计算采用的 H, V_1 即为真实值; 如果 $\|f_{\text{err}}\|_2 \leq \xi$ 但不满足 $\|y_{\text{err}}\|_2 \leq \xi$, 那么需要对初值进行修正, 修正公式为

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{\text{err}} \\ -y_{\text{err}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{\partial h_i}{\partial V_1} & \sum_{i=1}^{n/2} \frac{\partial h_i}{\partial H} \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial V_1} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial H} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: \mathbf{C} 为影响系数矩阵。

(7) 由式(5)解出 $\Delta H, \Delta V_1$, 然后令 $H = H + \Delta H, V_1 = V_1 + \Delta V_1$, 继续步骤(4)~(6), 直到计算结果满足精度要求为止。

通过上述迭代过程可以计算得到主缆拉力的水平分量、竖向分量以及主缆在各吊杆位置的坐标, 但必须注意的是通过上述方法计算得到的 s_i 为有应力索长。

2 吊杆力的计算

图2为地锚式悬索桥。移去所有吊杆, 以作用在主缆和加劲梁上的集中力代之(图3)。该集中力是维持加劲梁在吊杆锚固点处没有垂直位移的等效集中力, 因此有吊杆等效集中力的加劲梁在吊点处可用滚轴支座来代替(图4), 滚轴支座的反力即为吊杆的拉力。具有滚轴支座的连续梁的支座反力可用结构力学方法和有限元方法求解。

3 无应力索长的计算

上述迭代计算过程可以得到有应力索长, 但在

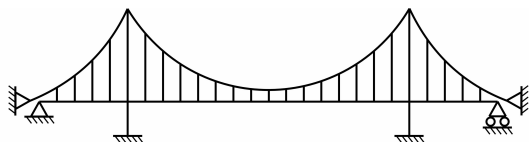


图2 地锚式悬索桥

Fig. 2 Earth-anchored Suspension Bridge

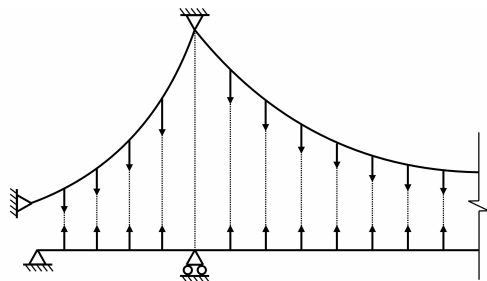


图3 悬索桥缆索体系的计算

Fig. 3 Calculation of Cable System of Suspension Bridge

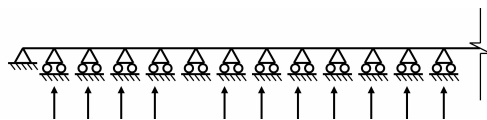


图4 悬索桥加劲梁的计算

Fig. 4 Calculation of Girder of Suspension Bridge

施工时更加关心的是无应力索长。为计算得到无应力索长, 首先要计算第 i 段主缆的弹性伸长量 Δs_i 。

第 i 段主缆的弹性伸长量 Δs_i 为

$$\Delta s_i = \int_0^{s_i} \frac{H}{EA} \frac{ds_i}{dx_i} ds_i \quad (7)$$

$$\frac{ds_i}{dx_i} = \sqrt{1 + \left(\frac{V_i - q_1 s_i}{H} \right)^2} \quad (8)$$

$$\Delta s_i = \frac{1}{EAq_1} \left[\frac{V_i}{2} \sqrt{H^2 + V_i^2} - \frac{V_i - q_1 s_i}{2} \cdot \sqrt{H^2 + (V_i - q_1 s_i)^2} - \frac{H^2}{2} \cdot (\text{sh}^{-1} \frac{V_i - q_1 s_i}{H} - \text{sh}^{-1} \frac{V_i}{H}) \right] \quad (9)$$

式中: E 为索材料弹性模量; A 为索的截面积。

第 i 段主缆的无应力索长 s_{0i} 的计算公式为

$$s_{0i} = s_i - \Delta s_i \quad (10)$$

4 精度的比较

两支座等高的悬索桥跨度 $l = 888.0$ m, 主缆恒载集度为 $54.0 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$, 加劲梁恒载集度分别为 $50, 100, 200 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$, 吊索间距为 12 m, 跨中矢高分别为 $60, 70, 80, 90, 100$ m, 索材料弹性模量为 $2.0 \times 10^5 \text{ MPa}$, 面积为 0.6 m^2 。用本文方法计算的索力水平分量 H 、无应力索长 s_{0i} 及 $y(x)|_{x=216}$ 的值见表1, 并与文献[6]中的结果进行了对比。

表 1 计算结果精度的比较

Tab.1 Accuracy Comparisons of Calculation Results

$q_1/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	f/m	H/kN		s_{0i}/m		$y(x) _{x=216}/\text{m}$	
		本文计算结果	文献[6]计算结果	本文计算结果	文献[6]计算结果	本文计算结果	文献[6]计算结果
50	60	171 386.2	171 396.6	897.407 7	897.408 2	44.214 6	44.215 5
	70	147 067.5	147 075.3	901.399 7	901.400 6	51.593 4	51.599 9
	80	128 845.9	128 855.2	905.903 7	905.904 0	58.990 5	58.991 0
	90	114 696.8	114 702.4	910.919 7	910.921 3	66.387 6	66.389 7
	100	103 390.7	103 396.3	916.446 4	916.448 0	73.795 0	73.796 8
100	60	253 529.2	253 546.8	896.780 4	896.781 2	44.202 3	44.204 1
	70	217 474.7	217 489.9	900.853 3	900.854 5	51.579 6	51.581 6
	80	190 454.4	190 468.3	905.414 1	905.415 5	58.961 7	58.963 8
	90	169 457.8	169 469.8	910.471 9	910.473 8	66.348 6	66.351 1
	100	152 675.7	152 687.3	916.026 8	916.028 9	73.741 8	73.744 1
200	60	417 801.2	417 847.0	895.532 1	895.532 4	44.193 7	44.194 7
	70	358 282.3	358 318.8	899.770 8	899.770 6	51.565 1	51.566 6
	80	313 663.4	313 693.7	904.452 5	904.453 8	58.939 4	58.941 4
	90	278 978.8	279 003.8	909.600 5	909.602 6	66.316 6	66.319 3
	100	251 245.7	251 268.1	915.223 4	915.225 9	73.697 7	73.700 8
0	60	89 246.7	89 246.0	898.043 9	898.043 7	44.248 4	44.248 1

由表 1 可以看出:本文方法计算的水平拉力 H 、竖向坐标 y 和无应力索长 s_{0i} 都与文献[6]中的计算结果十分接近,其相对误差的最大值仅为 1/360 000。

5 结 语

本文中提出了一种比较简洁明了的迭代方法,使得悬索桥在设计及架设过程中可以方便快捷地确定主缆的水平拉力、吊杆处主缆的坐标以及主缆的无应力索长,进而可以通过给定吊杆的拉力和弹性模量计算吊杆伸长前的长度。本文方法不需大规模的有限元建模,但是却可以得到与有限元计算非常接近的结果。根据本文方法编制的程序计算主缆线形和无应力索长方便快捷并且可以保证足够的精度。

参考文献:
References:

[1] 贺拴海. 桥梁结构理论与计算方法[M]. 北京:人民交通出版社,2003:384-388.
HE Shuan-hai. Structure Theory and Computing Method of the Bridge[M]. Beijing:China Communications Press,2003:384-388.

[2] 潘永仁. 悬索桥结构非线性分析理论与方法[M]. 北京:人民交通出版社,2004:14-21.
PAN Yong-ren. Non-linear Analysis Theory Method for Suspension Bridge Structures[M]. Beijing:China

Communications Press,2004:14-21.

[3] KIM H K,LEE M J,CHANG S P. Non-linear Shape-finding Analysis of a Self-anchored Suspension Bridge[J]. Engineering Structures, 2002, 24 (12): 1547-1559.

[4] KAROUMI R. Some Modeling Aspects in the Non-linear Finite Element Analysis of Cable Supported Bridges[J]. Computers and Structures,1999,71(4): 397-412.

[5] 肖海波,俞亚南,沈毅. 悬索桥主缆成桥线形精确分析[J]. 中国市政工程,2003(4):21-22.
XIAO Hai-bo, YU Ya-nan, SHEN Yi. Accurate Analysis on Bridging Shape of Main Cable in Suspension Bridge[J]. China Municipal Engineering,2003(4):21-22.

[6] 沈锐利. 悬索桥主缆系统设计与架设计算方法研究[J]. 土木工程学报,1996,29(2):3-9.
SHEN Rui-li. Calculation Methods for Design and Erection of Cable Curve of Suspension Bridge[J]. China Civil Engineering Journal,1996,29(2):3-9.

[7] 狄谨,武隽. 自锚式悬索桥主缆线形计算方法[J]. 交通运输工程学报,2004,4(3):38-43.
DI Jin,WU Jun. Calculation Methods for Cable Curve of Self-anchored Suspension Bridge[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2004, 4 (3): 38-43.

[8] 李枝军,韩晓林,李爱群,等. 悬索桥桥塔挂缆前后动态特性分析与测试[J]. 中国公路学报,2007,20(5):

- 54-58.
- LI Zhi-jun, HAN Xiao-lin, LI Ai-qun, et al. Dynamic Analysis and Test of Bridge Tower of Suspension Bridge Before and After Cable Installed [J]. China Journal of Highway and Transport, 2007, 20(5): 54-58.
- [9] 谭冬莲. 大跨径自锚式悬索桥合理成桥状态的确定方法[J]. 中国公路学报, 2005, 18(2): 51-55.
- TAN Dong-lian. Decision Method on Reasonable Design State of Self-anchored Suspension Bridge [J]. China Journal of Highway and Transport, 2005, 18(2): 51-55.
- [10] 张志国, 张庆芳, 邹振祝. 悬索桥成桥状态计算方法[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2006, 26(1): 59-62.
- ZHANG Zhi-guo, ZHANG Qing-fang, ZOU Zhen-zhu. Analytical Methods of Suspension Bridge Geometry Under Dead Loads [J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2006, 26(1): 59-62.
- [11] 刘来君, 吴士义. 悬索桥张拉锚跨索股施工控制技术[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2008, 28(6): 36-40.
- LIU Lai-jun, WU Shi-yi. Construction Control Technique for Suspension Bridge Built by Drawing Anchorage Cable [J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2008, 28(6): 36-40.
- [12] 黄平明, 慕玉坤. 悬索桥锚跨张力控制系统[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2007, 27(4): 42-45.
- HUANG Ping-ming, MU Yu-kun. Tension Control System of Suspension Bridge Anchor Cable [J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2007, 27(4): 42-45.
- [13] 许世展, 贺拴海, 盖铁婷. 基于索鞍元预偏施工悬索桥的施工仿真[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2007, 27(1): 35-39.
- XU Shi-zhan, HE Shuan-hai, GAI Yi-ting. Construction Simulation for Suspension Bridge with Non-pre-bias of Cable Saddle [J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2007, 27(1): 35-39.
- [14] 刘来君, 贺拴海. 索鞍元预偏施工悬索桥主缆的温度效应[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2007, 27(1): 40-44.
- LIU Lai-jun, HE Shuan-hai. Temperature Effect on Suspension Bridge with Non-pre-bias of Cable-saddle [J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2007, 27(1): 40-44.
- [15] 王钧利, 贺拴海. 大跨径弯桥圆心角对其内力、位移及稳定性的影响[J]. 交通运输工程学报, 2007, 7(3): 86-70.
- WANG Jun-li, HE Shuan-hai. Central Angle Influence of Long-span Curve Bridge on Its Inner Forces, Displacements and Stability [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2007, 7(3): 86-70.

《土木工程学报》2010 年征订通知

《土木工程学报》是中华人民共和国住房和城乡建设部主管, 中国土木工程学会主办的土木工程类综合性学术期刊, 以土木工程界中高级工程技术人员为主要读者对象; 内容主要报道结构工程、土力学及基础工程、隧道及地下工程、公路桥梁工程等在科研、设计、施工等方面的重要成果及发展状况, 重视刊登结合工程实践的论著, 并报道行业综述、科技信息和动态, 促进各国土木工程界的学术交流。

《土木工程学报》创刊于 1954 年 3 月, 现为美国《工程索引》(Ei) 收录期刊、中国科技论文统计源期刊(中国科技核心期刊), 被中国科学引文数据库、中国期刊网、中国学术期刊(光盘版)全文数据库等收录。

《土木工程学报》为月刊, 大 16 开本, 每期定价 20 元, 全年共 240 元; 国内外公开发行, 国内邮发代号: 2-582, 国外发行代号: M288。《土木工程学报》2010 年征订工作已经开展, 欢迎各界有关单位及个人订阅。

地 址: 北京市三里河路 9 号建设部内 电 话: (010) 58934211 网 址: www.cces.net.cn
邮 编: 100835 传 真: (010) 58933912 E-mail: tumuxuebao@263.net