

文章编号:1673-2049(2010)03-0035-06

考虑抗弯刚度的缆索线形研究

王 涛¹, 沈锐利¹, 郭 健²

(1. 西南交通大学 桥梁工程系, 四川 成都 610031; 2. 浙江省舟山连岛工程建设指挥部, 浙江 舟山 316000)

摘要:根据实际悬挂缆索的受力情况推导了缆索悬挂曲线满足的微分方程;采用数值方法分别计算了在不同情况下考虑抗弯刚度时缆索的悬挂线形,并与采用悬链线理论计算的结果进行了对比。结果表明:在确定的物理特性下,缆索的悬挂线形与缆索的抗弯刚度和无应力长度有关;无应力长度越长时,缆索的悬挂线形越接近悬链线理论的计算结果。所得的计算结果可以为实际缆索结构精确计算模型的建立提供参考。

关键词:缆索;抗弯刚度;线形;悬链线;数值方法

中图分类号:U448.25 **文献标志码:**A

Research on Suspended Curve-shape of Cables Considering Flexural Rigidity

WANG Tao¹, SHEN Rui-li¹, GUO Jian²

(1. Department of Bridge Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, Sichuan, China;
2. Zhejiang Provincial Construction Headquarters of Zhoushan Islands Link Project,
Zhoushan 316000, Zhejiang, China)

Abstract: Authors derived a set of differential equations for real suspended cables according to the force conditions. Then, authors calculated the suspended curve-shape of cables by using numerical method under different conditions and compared them with the calculation results of catenarian theory. Results show that suspended curve-shape of cable is related to flexural rigidity and unstressed length of cable in determined physical characteristic, when unstressed length of cable is longer, the suspended curve-shape of cable and the catenarian curve are more similar. The calculation result can provide reference for building accurate calculation model of real cable structures.

Key words: cable; flexural rigidity; curve-shape; catenarian; numerical method

0 引 言

在现代桥梁中,采用缆索体系的桥梁,如斜拉桥、悬索桥以其跨越能力大且造型优美而著称。对于一根确定了材料特性和几何特性的细长缆索,缆索张力决定了缆索的线形。当假定缆索是完全柔性(即不考虑缆索的抗弯刚度)时,可以采用悬链线理

论求解出缆索的精确线形,求解方法可以采用直角坐标系方程^[1]或者参数方程^[2-3]。

在现代缆索支承桥梁中所有缆索的基本元件都是由具有比普通钢材抗拉强度大得多的钢丝通过一定的方式紧密排列在一起后组成的,因此实际上是具有一定抗弯刚度的^[4]。当一根细长缆索的张力很大、垂度很小时,索曲线的曲率很小,相对于缆索张

收稿日期:2010-06-10

基金项目:“十一五”国家科技支撑计划项目(2008BAG07B05)

作者简介:王 涛(1983-),男,四川南充人,工学博士研究生,E-mail:7015294@qq.com。

力来说,抗弯刚度对索曲线的线形影响很小。但当缆索的垂度较大时,索曲线的曲率相对较大,则抗弯刚度对索曲线的线形是有一定的影响的。Knudson^[5]与 Irvine^[6]研究了缆索抗弯刚度对悬挂线形的影响,他们假定悬索的自重是沿弦长分布而不是沿弧长分布,得到了考虑抗弯刚度时缆索的曲线微分方程,并给出了解析解,但在这种情况下只有当缆索的垂跨比很小时得到的结果才是接近于缆索的真实线形的^[7-10]。

本文中笔者研究了考虑抗弯刚度且缆索自重沿弧长分布的实际缆索结构,根据缆索微段上的力学平衡条件推导了缆索曲线满足的微分方程组;建立起的微分方程组无解析解,采用数值积分方法求解出了考虑抗弯刚度时缆索在不同状态下的线形;通过与悬链线理论计算曲线线形的对比,得出了一些有意义的结论。本文的研究结果可以为缆索体系结构桥梁精细化模型的建立提供参考。

1 计算原理

本文的分析计算中对于缆索采用的假设如下:

①缆索材料为线弹性,本身无塑性变形且满足虎克定律;②不考虑缆索横截面在变形前后的变化;③主缆的自重沿弧长分布,但变形前后满足质量守恒定律;④缆索微段的力学特性与欧拉-柏努利梁的力学特性相同。

已知1根缆索无应力长度为 s_0 ,沿弧长每延米的自重为 q ,弹性模量为 E ,截面面积为 A ,截面抗弯惯性矩为 I 。缆索两端点水平高度相同且铰接悬挂时在自重和水平张力 H 的作用下形成1条曲线 AB 。为了能方便地描述这条曲线,取缆索跨中上的一点作为坐标原点 O (图1),根据缆索上力的平衡可知在 O 点处时竖向剪力 V 为0,在 B 点处时 $V=q s_0/2$ 。

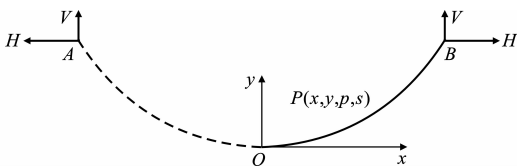


图1 悬挂缆索

Fig. 1 Suspended Cable

在图1坐标系下,设缆索上任意一点 P 在变形前的拉格朗日坐标为 s ,变形后坐标为 p 。因此由微段上的应力-应变关系有

$$\frac{dp - ds}{ds} = \frac{T(p)}{EA} \quad (1)$$

式中: $T(p)$ 为缆索变形后的轴向拉力。

图2为缆索微段力学模型。在变形前的拉格朗日坐标系下,根据缆索整体的力学平衡可知,在直角坐标系下任意截面上的竖向剪力 $V(s)$ 为

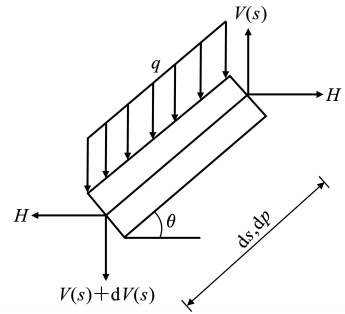


图2 缆索微段力学模型

Fig. 2 Mechanical Model of Cable in Microscale

$$V(s) = q s \quad (2)$$

设 θ 为变形后拉格朗日坐标系下缆索曲线上任意一点的切线相对于直角坐标系 x 轴的倾角。因此,变形后任意截面的轴向拉力 $T(p)$ 为

$$T(p) = H \cos \theta + q s \sin \theta \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)可得

$$\frac{dp}{ds} = (H \cos \theta + q s \sin \theta) / (EA) + 1 \quad (4)$$

根据图2中缆索微段上的几何关系可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{dx}{dp} \frac{dp}{ds} = \cos \theta \frac{dp}{ds} \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{dy}{dp} \frac{dp}{ds} = \sin \theta \frac{dp}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

设缆索曲线曲率关于拉格朗日坐标 p 的函数为 $k(p)$,则根据曲率的定义可得

$$\frac{d\theta}{dp} = k(p) \quad (6)$$

根据材料力学原理可得

$$-EI k(p) = M(p) \quad (7)$$

式中: EI 为缆索截面抗弯刚度; $M(p)$ 为缆索变形后任意截面的弯矩。

将式(7)对 p 求导可得

$$-EI \frac{dk(p)}{dp} = \frac{dM(p)}{dp} = Q(p) \quad (8)$$

式中: $Q(p)$ 为曲线任意微段上垂直于该微段的剪力。

根据微段法向上的力学平衡原理可得

$$Q(p) = V(s) \cos \theta - H \sin \theta \quad (9)$$

将式(2)代入式(9)再代入式(8)可得

$$\frac{dk}{dp} = -(q s \cos \theta - H \sin \theta) / (EI) \quad (10)$$

将式(4)代入式(5)并联立式(6)、(10)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{dx dp}{dp ds} = \cos \theta \cdot \left(\frac{H \cos \theta + q s \sin \theta}{EA} + 1 \right) \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{dy dp}{dp ds} = \sin \theta \cdot \left(\frac{H \cos \theta + q s \sin \theta}{EA} + 1 \right) \\ \frac{d\theta}{dp} &= k(p) \\ \frac{dk}{dp} &= -(q s \cos \theta - H \sin \theta) / (EI) \end{aligned} \right\} (11)$$

式(11)即为考虑抗弯刚度时悬挂缆索在自重和水平张力 H 作用下形成的曲线在微段上必然满足的微分方程组。由于 θ 不显含 p , 同时 p 也是 s 的函数。因此式(11)不能采用积分求解的方法得到 x 与 y 关于 s 的显式解, 但可用数值方法求解。由式(11)可知, 若不计抗弯刚度的影响, 那么 $q s \cos \theta - H \sin \theta = 0$, 这便是相同坐标系下悬链线索段上的受力平衡方程。对于式(11), 只要找到正确的边界条件便可以通过数值积分方法得到缆索的实际线形。

2 计算方法

要根据式(11)采用数值积分求解出实际缆索的线形, 必须要知道微分方程组的边界值, 本文中采用基于二分法的打靶法来求解。对于如第 1 节所述的 1 条已知无应力长度的缆索, 两端铰接悬挂时在自重和水平张力的作用下形成的 1 条曲线(图 1), 可知在 O 点处, 初始坐标为 $x=0, y=0$, 初始切线倾角 $\theta=0^\circ$, 未知的是初始弯矩对应的初始曲率 $k(p)$ 。这里根据右端点的边界条件可知曲线右端点处的弯矩必然为 $0 \text{ N} \cdot \text{m}$, 那么在打靶法求解过程中可以把端点的曲率 $k[p(s_0/2)]$ 作为目标条件。缆索线形的计算过程如下:

(1) 估算跨中弯矩初值。

(2) 根据弯矩估算的初值采用龙格库塔法对方程式(11)和缆索的长度坐标 s 进行数值积分, 积分区间为 $[0, s_0/2]$ 。

(3) 数值积分完成后, 提取缆索右端的曲率 $k[p(s_0/2)]$, 如果 $k[p(s_0/2)] \neq 0$, 则返回第 1 步调整初始弯矩, 再次进行数值积分计算直到满足 $k[p(s_0/2)]$; 最后在满足精度要求的情况下可以得到考虑抗弯刚度时钢缆的悬挂线形。

3 缆索线形

本文中对实际缆索结构悬索桥的主缆采用上述方法进行研究。实际悬索桥的主缆通常是由 $\Phi 5$ 高强钢丝组成的, 由于主缆在施工过程中是逐根钢丝

(AS法)或索股(PPWS法)架设而成的, 因此可以认为主缆悬挂的线形与单独 1 根缆索(或索股)的线形是相同的。已知主缆材料的物理特性为: 材料重量 $\rho = 78\ 500 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$; 弹性模量 $E = 2.05 \times 10^2 \text{ GPa}$ 。以下讨论缆索在不同几何特性时的悬挂线形与悬链线理论计算结果的差别。

3.1 固定无应力长度时不同水平张力下的缆索线形

通过数值计算可以得到, 1 根无应力长度为 20 m 、圆截面直径为 5 mm 钢丝在不同水平张力作用下的悬挂线形与具有相同端点高度和无应力长度的悬链线线形对比, 如图 3 所示。从图 3 可以看出, 当水平张力较小时, 由于抗弯刚度的影响缆索的线形与悬链线明显是不同的, 而当水平张力较大时两者差别较小。从图 4 可以看出, 随着水平张力的增加, 缆索跨中高差、缆索 $1/4$ 点高差、缆索与悬链线跨度差及缆索跨中弯矩都变得很小, 它们的最小值分别为 $1.9, 1.89, 0.438 \text{ mm}$ 及 $0.138 3 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

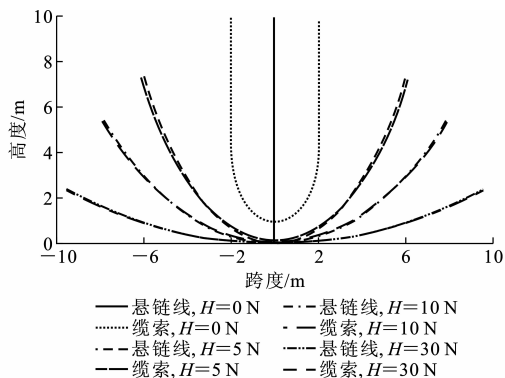


图 3 不同水平张力下的缆索线形

Fig. 3 Curve-shapes of Cables Under Different Horizontal Tensions

对于一根具有确定几何特性和物理特性、两端等高悬挂的缆索, 当 $H=0 \text{ N}$ 时, 考虑抗弯刚度的缆索是一条具有一定跨度的曲线, 而理论悬链线是一条完全垂直的直线。实际缆索在 $H=0 \text{ N}$ 时具有的跨度为缆索的极限支承跨度, 实际缆索的极限支承跨度对应一个极限支承无应力长度, 可以认为在极限支承跨度内缆索的抗弯刚度使缆索不受水平张力的作用。本文中通过计算得到截面直径 5 mm 的缆索的极限支承跨度为 4.068 m , 极限支承长度为 11.354 m , 对应的极限支承弯矩为 $4.315 4 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。当 H 较大时缆索的垂跨比变小, 缆索的线形逐渐接近悬链线。

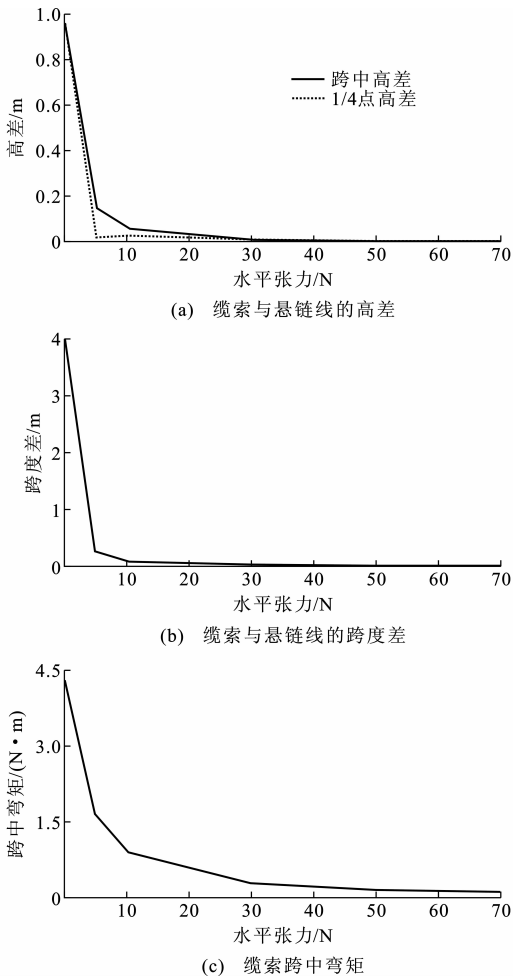


图4 固定无应力长度时不同水平张力下的缆索计算结果

Fig. 4 Calculation Results of Cables with Certain

Unstressed Lengths Under Different Horizontal Tensions

3.2 固定无应力长度与跨度时不同截面尺寸下的缆索线形

现假设缆索的跨度为 19.5 m, 无应力长度为 20 m, 讨论在不同圆截面直径时缆索的悬挂线形与每延米质量相同的悬链线的线形差别。数值计算结果表明, 在相同的无应力长度与跨度下, 随着截面面积的增加, 缆索线形与悬链线的差别越来越大。如图 5 所示, 经计算可知当截面直径为 5 mm 时缆索的水平张力为 38.21 N, 悬链线水平张力为 38.38 N; 缆索与悬链线跨中高差为 -2.3 mm, 1/4 点高差为 0.4 mm。当缆索截面直径为 78.085 mm 时缆索的水平张力为 0 N。截面直径为 78.085 mm 的缆索在两端铰接悬挂时在自重作用下缆索的跨度刚好为 19.5 m。这表明缆索截面有足够的抗弯惯性矩, 在相同跨度下缆索上承受的弯矩与自重相平衡而没有水平张力, 而每延米质量相同的悬链线水平张力为 9 377.9 N。当截面直径取为 100 mm 时, 需要

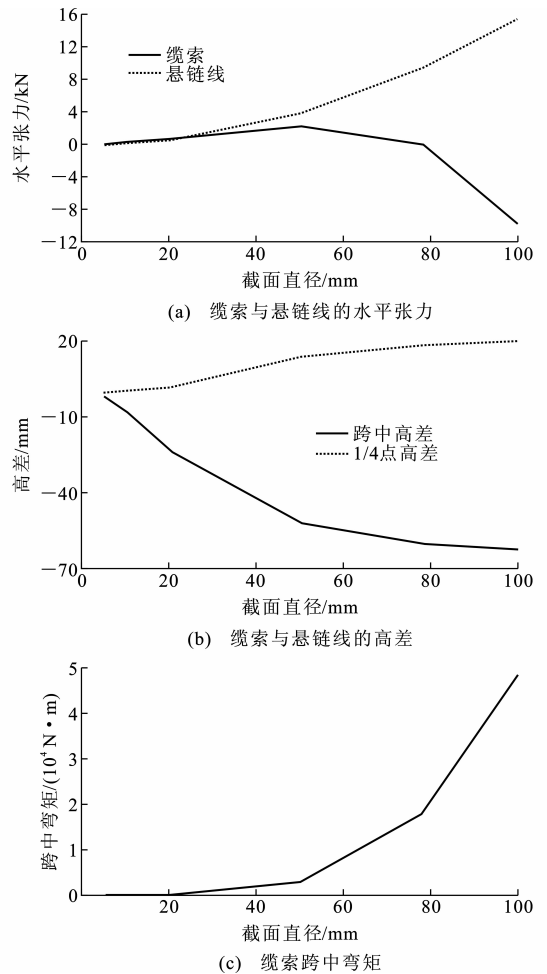


图5 固定无应力长度与跨度时不同截面

尺寸下的缆索计算结果

Fig. 5 Calculation Results of Cables with Certain

Unstressed Lengths and Spans Under

Different Sectional Dimensions

—9 784.8 N 的水平张力才能使缆索具有 19.5 m 的跨度, 这是由于缆索截面抗弯刚度较大, 缆索悬挂时已经近似为简支梁, 在水平方向的变形很小, 因此水平张力为负。由于截面直径很小时缆索与悬链线线形差别很小, 这里只给出 100 mm 直径、相同无应力长度缆索悬挂曲线线形与悬链线的对比(图 6)。

3.3 固定垂跨比时不同截面尺寸与无应力长度下的缆索线形

本文计算中发现, 在固定垂跨比下, 随着缆索无应力长度取值的增加, 缆索悬挂线形与悬链线线形会逐渐接近, 当缆索无应力长度计算取值达到一定极限长度时, 由于缆索与同截面尺寸悬链线线形非常接近而导致计算不收敛。因此, 这里取缆索垂跨比为 1:10, 当缆索的几何特性如表 1 所示时, 比较缆索线形与同垂跨比的悬链线的线形。

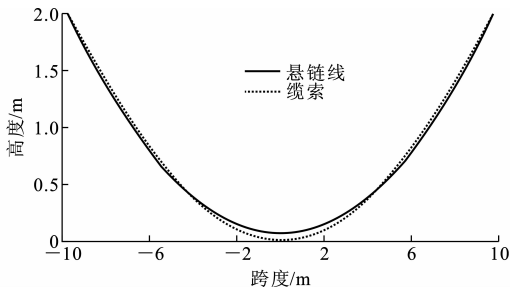


图 6 截面直径 100 mm 时的缆索线形

Fig. 6 Curve-shapes of Cable when Diameter of Section is 100 mm

表 1 缆索的几何特性

Tab. 1 Geometrical Characteristics of Cables

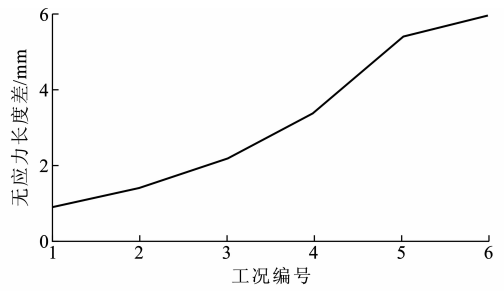
工况编号	1	2	3	4	5	6
缆索截面直径/mm	5	10	20	40	80	100
无应力长度/m	23	38	60	98	152	182

图 7 为不同工况下同垂跨比的缆索与悬链线的计算结果。从图 7(a)~(c)可以看出,在相同垂跨比下,不同工况时悬链线与缆索线形的差别不大,无应力长度差最大为 6 mm,1/4 点高差最大为 6.3 mm。这些差别随长度的增加而增加,这主要是由于数值计算的精度限制造成的。当缆索截面几何尺寸增加时,缆索的抗弯刚度增加,但当缆索较长时缆索的自重较大,同垂跨比下缆索的悬挂线形与悬链线的差别变小。

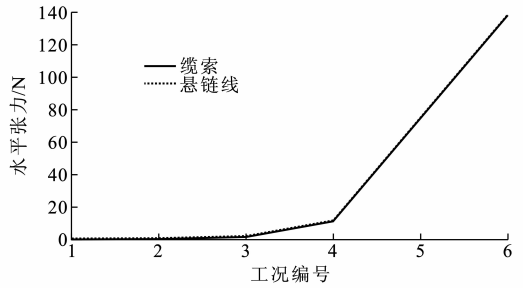
通过以上分析可知,缆索的抗弯刚度对缆索悬挂的曲线线形是有一定影响的,悬挂缆索在一定程度上可以看作是两端受拉的铰接梁。在本文的数值计算中,当缆索较长而且线形接近悬链线时采用梁理论计算不容易收敛。对于一根确定几何特性和物理特性的悬挂缆索,当两端水平张力为 0 N 时,随着缆索长度的增加,缆索在自重的作用下为大挠度梁,缆索两端的最大跨度不超过它的极限支承跨度,缆索的极限支承跨度可以通过数值计算得到。当缆索具有水平张力时,在水平张力的作用下缆索的垂跨比越小,缆索悬挂线形越接近悬链线;缆索垂跨比一定时缆索的无应力长度越长,缆索的抗弯刚度对悬挂线形的影响越小,缆索悬挂线形也越接近悬链线。

4 结 语

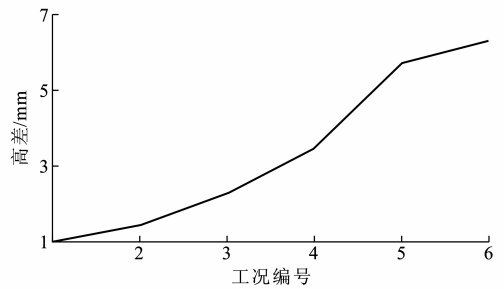
(1)缆索通常都具有一定的抗弯刚度,在抗弯刚度的作用下缆索在两端铰接等高悬挂时的曲线线形与悬链线有所区别,但这种区别在垂跨比减小、跨度增加、缆索无应力长度增加时逐渐减小。



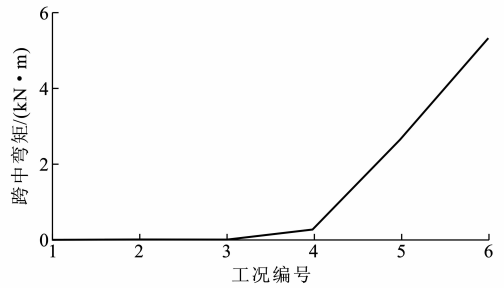
(a) 缆索与悬链线的无应力长度差



(b) 缆索与悬链线的水平张力



(c) 缆索与悬链线1/4点的高差



(d) 缆索跨中弯矩

图 7 固定垂跨比时不同工况下的缆索计算结果

Fig. 7 Calculation Results of Cables with Certain Sag Ratio Under Different Working Conditions

(2)对于确定几何特性与材料特性的悬挂缆索,当水平张力为 0 N 时,缆索具有确定的极限支承跨度和极限支承长度,在极限支承跨度内缆索靠抗弯刚度支承自重。

(3)当固定垂跨比与缆索截面尺寸时,缆索越长悬挂线形与悬链线差别越小。因此对于悬索桥的主缆初始线形,索股的抗弯刚度对主缆线形几乎没有影响,采用悬链线来计算所得线形与实际是相符的;但对于跨度相对较小的斜拉索,其线形与悬链线是有区别的。

参考文献:

References:

- [1] 沈锐利. 悬索桥主缆系统设计与架设计算方法研究[J]. 土木工程学报, 1996, 29(2): 3-9.
SHEN Rui-li. Calculation Methods for Design and Erection of Cable Curve of Suspension Bridge[J]. China Civil Engineering Journal, 1996, 29(2): 3-9.
- [2] 唐茂林, 强士中, 沈锐利. 悬索桥成桥主缆线形计算的分段悬链线法[J]. 铁道学报, 2003, 25(1): 87-91.
TANG Mao-lin, QIANG Shi-zhong, SHEN Rui-li. Segmental Catenary Method of Calculating the Cable Curve of Suspension Bridge[J]. Journal of the China Railway Society, 2003, 25(1): 87-91.
- [3] 陈常松, 陈政清, 颜东煌. 悬索桥主缆初始位形的悬链线方程精细迭代分析法[J]. 工程力学, 2006, 23(8): 62-68.
CHEN Chang-song, CHEN Zheng-qing, YAN Dong-huang. Accurate Iteration Method to Calculate the Initial States of Main Cables of Suspension Bridges[J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(8): 62-68.
- [4] 吉姆辛 N J. 缆索支承桥梁——概念与设计[M]. 2版. 金增洪, 译. 北京: 人民交通出版社, 2002.
GIMSING N J. Cable Supported Bridges: Concept and Design[M]. 2nd ed. Translated by JIN Zeng-hong.

Beijing: China Communications Press, 2002.

- [5] KNUDSON W C. Static and Dynamic Analysis of Cable Net Structure[D]. Berkeley: University of California, 1971.
- [6] IRVINE H M. Cable Structures[M]. Cambridge: MIT Press, 1981.
- [7] 唐茂林. 大跨度悬索桥空间几何非线性分析与软件开发[D]. 成都: 西南交通大学, 2003.
TANG Mao-lin. 3D Geometric Nonlinear Analysis of Long-span Suspension Bridge and Its Software Development[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2003.
- [8] 金凯德. 数值分析[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.
JIN Kai-de. Numerical Analysis[M]. Beijing: China Machine Press, 2005.
- [9] MAGRAB E B, AZARM S, BALACHANDRAN B, et al. An Engineer's Guide to MATLAB[M]. New York: Prentice Hall, 2005.
- [10] 孙仁博, 王天明. 材料力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1995.
SUN Ren-bo, WANG Tian-ming. Mechanics of Materials[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1995.

(上接第 34 页)

参考文献:

References:

- [1] YI Chun-long, AN Yun-qi, SHEN Ya-tan, et al. Recent Ten Years Applications of Arc-spraying Technology for Corrosion Protection of Steel Bridges in China [C]//ICC. Proceeding of the 16th International Corrosion Conference. Beijing: ICC, 2005: 69-74.
- [2] 任必年, 张学峰, 陈建阳, 等. 公路钢桥腐蚀与防护[M]. 北京: 人民交通出版社, 2002.
REN Bi-nian, ZHANG Xue-feng, CHEN Jian-yang, et al. Corrosion and Protection of Highway Steel Bridges[M]. Beijing: China Communications Press,

2002.

- [3] MARANTZ D R, MARANTZ D R. State of the Arc Spray Technology[C]//BERNECHI F F, HERNECK-IH T F. Thermal Spray Research and Applications. New York: ASM International, 1991: 113-118.
- [4] 易春龙. 电弧喷涂技术[M]. 北京: 化学工业出版社, 2006.
YI Chun-long. Arc Spraying Technology[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2006.
- [5] 易春龙, 张胜利, 陈卫国. 纳米改性环氧封闭漆的研制及在西墩门大桥的应用[J]. 公路, 2009(1): 54-59.
YI Chun-long, ZHANG Sheng-li, CHEN Wei-guo. Study of Nano-modified Epoxy Sealer and Application on Xihoumen Bridge[J]. Highway, 2009(1): 54-59.