

文章编号:1673-2049(2011)02-0119-08

# 拓扑优化中水平集方法的局限性及改进方法

王超逸<sup>1,2</sup>, 封建湖<sup>1</sup>

(1. 长安大学 理学院, 陕西 西安 710064; 2. 鞍山钢铁集团公司, 辽宁 鞍山 114009)

**摘要:**提出了一种基于拓扑导数的水平集方法,利用拓扑导数在材料的内部生成新的孔,再运用水平集方法移动和融合新生成的孔,克服了传统水平集方法的缺点并保留其优点;通过数值算例展示了传统水平集方法的缺点和新方法拓扑优化问题的改进效果。结果表明:提出的拓扑导数水平集算法简单有效,可以进行连续体结构的拓扑优化设计。

**关键词:**拓扑优化;水平集方法;拓扑导数;有限元法

**中图分类号:**TU311

**文献标志码:**A

## Weakness of Level Set Method in Topology Optimization and Its Improvement

WANG Chao-yi<sup>1,2</sup>, FENG Jian-hu<sup>1</sup>

(1. School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China;

2. Anshan Iron & Steel Group Corporation, Anshan 114009, Liaoning, China)

**Abstract:** Structural topology optimization has been identified as one of the most challenging tasks in structural design. Level set method has many merits on topological optimization problems. But it also has some defects. For example, the higher dependence on initial topology of complex structures, in which proper number and position of holes are included, cannot be determined in advance. Furthermore, in order to greatly improve computational efficiency, another topology optimization method, we called it topology derivative-level set algorithm, was proposed by unifying topology derivative theory with the level set method. Numerical experiments illustrated the weakness of the traditional level set method and the improvement of the topology derivative-level set algorithm. The numerical results show that the topology derivative-level set algorithm can be used for topology optimization of continuum structures.

**Key words:** topology optimization; level set method; topology derivative; finite element method

## 0 引言

水平集方法(Level Set Method)是国外学者Osher和Sethian于1988年提出的一种用于追踪运动界面的数值方法,它在流体力学、图像处理、材料科学等领域得到了广泛的应用<sup>[1-3]</sup>。与基于单元描述方法相比,基于节点描述方法最大的一个特点就是

是能够更直接地描述结构的几何拓扑形状,在结构演化过程中,所有边界的几何信息都隐含于水平集函数当中,这样对拓扑相关荷载和边界条件的处理将变得比较容易。正是由于水平集方法的这些优点,近年来,该方法在连续体结构拓扑优化设计方面的研究取得了长足进步<sup>[4-7]</sup>。然而,这种方法也有其局限性,即传统的水平集方法只能移动和融合已存

在的孔,不能生成新的孔,而且过分依赖初始拓扑形状,如果初始拓扑形状不够合理,就很难得到最优解<sup>[8]</sup>。

本文中笔者针对传统水平集方法过分依赖初始拓扑形状的缺点,利用拓扑导数的概念<sup>[9-11]</sup>,提出了一个基于拓扑导数的水平集算法,用来克服传统水平集方法的不足。

拓扑导数的思想首先是由 Eschenauer 等提出来的:假设在定义域中产生一个小孔,用传统的拓扑优化方法改变小孔,从而考察定义域上目标函数的变化。Sokolowski 和 Zochowski 首先界定了拓扑导数对任意形状的函数表达,提出了一种通过形状敏度分析推导拓扑导数的方法,并推导出了针对椭圆方程的计算公式。Garreau 等<sup>[12]</sup>将拓扑导数发展到更一般的情况,即在弹性体内对任意形状的裂纹进行计算。而在 Allaire 等<sup>[13]</sup>的论文中,作者就拓扑优化问题,讨论了形状导数和拓扑导数与水平集的联系,取得了很好的效果。

## 1 拓扑优化中的传统水平集方法

考虑小变形弹性体结构拓扑优化问题。给定一个设计域  $\Omega_{\text{des}}$ ,所有可能的设计都限制在  $\Omega_{\text{des}}$  内,目标就是寻求一个边界为  $\Gamma$  的结构体  $D$  的最优设计。结构的拓扑形状是由隐式水平集函数  $\varphi(x)$  来描述的,2000 年 Sethian 和 Wiegmann 首次把水平集函数引入结构优化领域,采用如下的方式对结构的拓扑形式加以描述

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) > 0 & \quad x \in D \\ \varphi(x) = 0 & \quad x \in \Gamma \\ \varphi(x) < 0 & \quad x \in \Omega_{\text{des}} \setminus D \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

初始水平集函数通常选择为一个符号距离函数,这里水平集函数  $\varphi(x)$  的取值被限定在  $[-\alpha, \alpha]$  之间,  $\alpha$  为参数,  $\alpha > 0$ , 即如果  $|\varphi(x)| > \alpha$ , 则  $\varphi(x) = \alpha \operatorname{sgn}[\varphi(x)]$ 。

本文中考虑连续体结构的柔度最小化(即应变能最小或刚度最大)问题,以结构的整体体积约束作为优化的约束条件,在给定的荷载和位移边界条件下,寻求结构的最优布局,也就是在设计域  $\Omega_{\text{des}}$  上找出满足式(1)条件的水平集函数  $\varphi(x)$  的值。

不考虑结构的体积力,结构的整体柔度  $C$  可以表示为

$$C = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \boldsymbol{\tau} d\Gamma \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{u}$  为结构的位移场;  $\boldsymbol{\tau}$  为作用在边界  $\Gamma$  上的分

布荷载,假定荷载大小及作用位置固定。

根据虚功原理,设计域中的实际应力场  $\boldsymbol{\sigma}$  对于虚位移场  $\delta \mathbf{u}$  产生的虚变形  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  所产生的虚变形能  $\delta U$  和外荷载  $\boldsymbol{\tau}$  对虚位移  $\delta \mathbf{u}$  所做的虚功  $\delta W$  相等,即对任意的位移场  $\mathbf{u} \in U$ , 有

$$\delta U = \int_{\Omega_{\text{des}}} H[\varphi(x)] \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \delta W = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\tau} d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \in U \quad (3)$$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $U$  为位移场容许空间;  $H(x)$  为 Heaviside 阶跃函数;  $\Omega$  为给定的设计域。

这样,最小柔度问题的优化模型可以写成如下形式

$$\begin{aligned} \min C(\varphi) &= \min \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \boldsymbol{\tau} d\Gamma = \\ &\min \int_{\Omega_{\text{des}}} H(\varphi) \mathbf{E}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{u}) d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

s. t.

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega_{\text{des}}} H(\varphi) \mathbf{E}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{v}) d\Omega &= \\ \int_{\Omega_{\text{des}}} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\delta}(\varphi) |\nabla \varphi| d\Omega \mathbf{u}|_{\Gamma_d} &= \mathbf{u}_0 \quad \forall \mathbf{v} \in U \\ g = \int_{\Omega_{\text{des}}} H(\varphi) d\Omega - V_0 &\leq 0 \\ -\alpha &\leq \varphi(x) \leq \alpha \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{u}_0$  为边界  $\Gamma$  的  $\Gamma_d$  部分的指定位移;  $\mathbf{v}$  为位移;  $V_0$  为体积约束条件  $g$  中结构实体部分所占的体积;  $\mathbf{E}_{ijkl}$  为弹性张量;  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{u})$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{v})$  为应力张量的分量,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ 。

上述最优化问题,可通过有限元法来求解,可参见文献[8]。

为了证明传统水平集方法的有效性,给出下面算例。

算例 1: 悬臂梁拓扑优化。

悬臂梁左端固定,右端为自由端,右端中间受竖直向下的集中力,大小为 1 kN,梁的尺寸为 80 cm × 40 cm,设实体材料的弹性模量和泊松比分别为  $E = 200$  GPa 和  $\nu = 0.3$ ,体积比限制为 0.35,计算网格为 80 × 40,四边形单元,按平面应力问题计算。悬臂梁模型 I 见图 1,用传统水平集方法计算的结果见图 2。

该计算结果与各向同性材料密度惩罚法(Solid

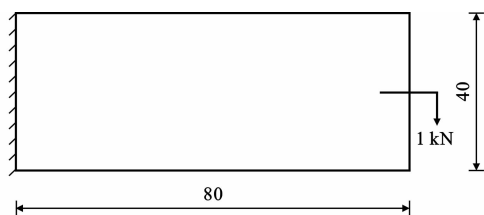


图 1 悬臂梁模型 I (单位:cm)

Fig. 1 Cantilever Beam Model I (Unit:cm)

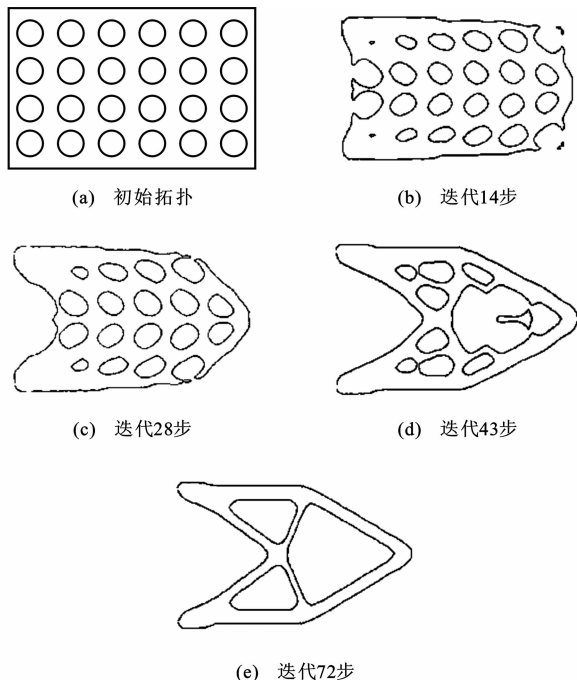


图 2 传统水平集优化计算结果

Fig. 2 Optimization Calculation Results of Traditional Level Set

Isotropic Material with Penalization, SIMP 方法)<sup>[14]</sup>

所得的拓扑图像基本一致,由此证明传统水平集方法是有效的。

## 2 传统水平集方法的局限性

传统水平集方法虽然有诸多优点,但也存在如下一些缺点:

(1) 由于传统水平集方法本质上是边界演化算法,只能进行孔的移动和融合,不能产生新的孔,从而要求初始设计必须预先给出多个孔。如果初始拓扑给出的孔太少,即初始拓扑过于简单,则不能得到最优拓扑。

(2) 如果初始拓扑任意性太大,给出孔的布局不合理,则会严重影响水平集方法的收敛速度,甚至导致不收敛。

(3) 由于受计算稳定性条件的限制,水平集方法

的计算效率比较低。

由上述可知,要合理地选择初始结构拓扑,必须满足:①孔的个数要多;②孔的位置分布要合理。对于一个全新的拓扑优化设计,要精确做到这一点,是十分困难的。事实上,给出的初始设计结构往往受限于数值算法(如有限元算法的网格划分)和初始插入孔的多少,这都限制了水平集拓扑优化算法的寻优空间。

为了说明传统水平集拓扑优化方法的局限性,仍然针对算例 1 的悬臂梁优化问题进行计算,以更好地说明问题。

情形 1: 初始拓扑无孔。初始拓扑与传统水平集方法计算的结果见图 3。显然计算初始无孔的拓扑计算不能得到最优解。

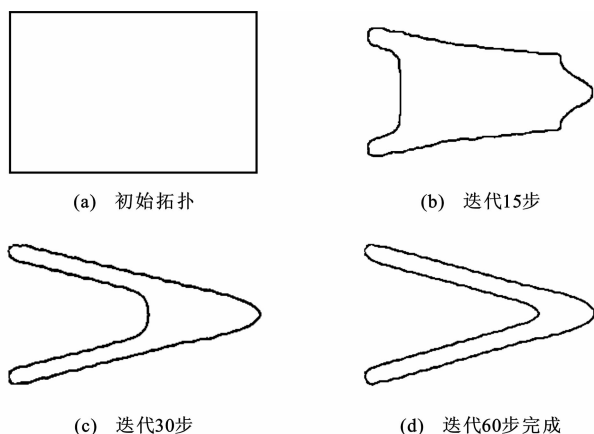


图 3 初始拓扑无孔时传统水平集方法的计算结果

Fig. 3 Calculation Results of Initial Topology Without Hole by Traditional Level Set Method

情形 2: 初始拓扑 1 个孔。初始拓扑与传统水平集方法计算的结果见图 4。可以看出,优化 1 个孔的初始拓扑也不能得到最优解。

情形 3: 初始拓扑 2 个孔布局 1。初始拓扑与传统水平集方法计算的结果见图 5。与算例 1 的结果对比,此时也得不到正确结果。

情形 4: 初始拓扑 2 个孔布局 2。初始拓扑与传统水平集方法计算的结果见图 6。与算例 1 的结果对比,此时也得不到正确结果。可以看出,优化有 2 个孔的初始拓扑也得不到最优解,而且初始孔的布局对计算结果有影响。

情形 5: 初始拓扑 3 个孔。初始拓扑与传统水平集方法计算的结果见图 7,此时也得不到正确结果。

情形 6: 初始拓扑 4 个孔布局 1。初始拓扑与传统水平集方法计算的结果见图 8。可以看出,此时

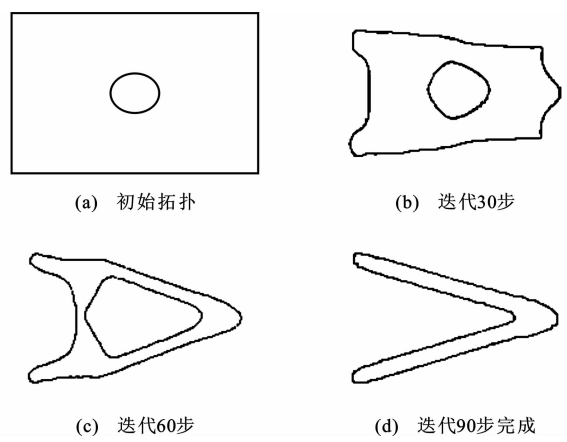


图 4 初始拓扑 1 个孔时传统水平集方法的计算结果

Fig. 4 Calculation Results of Initial Topology with One Hole by Traditional Level Set Method

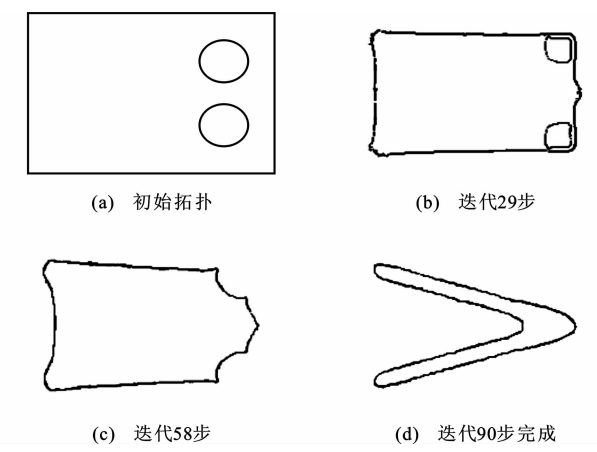


图 6 初始拓扑 2 个孔布局 2 时传统水平集方法的计算结果

Fig. 6 Calculation Results of Initial Topology with Two Holes Distribution 2 by Traditional Level Set Method

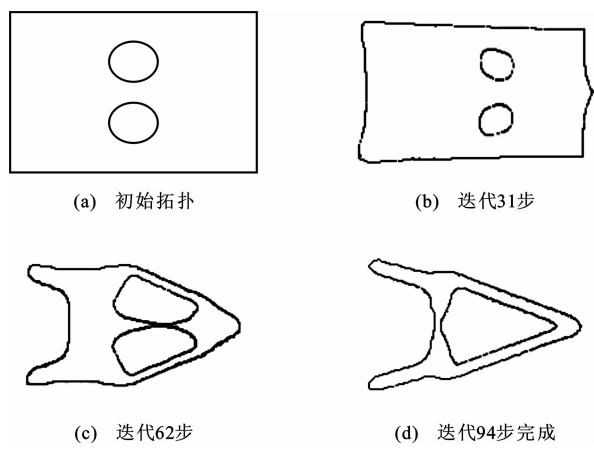


图 5 初始拓扑 2 个孔布局 1 时传统水平集方法的计算结果

Fig. 5 Calculation Results of Initial Topology with Two Holes Distribution 1 by Traditional Level Set Method

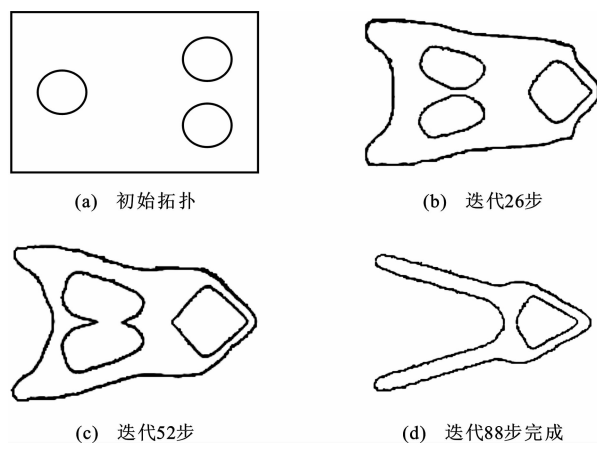


图 7 初始拓扑 3 个孔时传统水平集方法的计算结果

Fig. 7 Calculation Results of Initial Topology with Three Holes by Traditional Level Set Method

也得不到正确结果。

情形 7: 初始拓扑 4 个孔布局 2。初始拓扑与传统水平集方法计算的结果见图 9。可以看出, 通过计算布局合理的 4 个孔的初始拓扑可以得到比较好的解, 可看做最优解。

根据上述 7 种初始孔布局的计算, 可以看出, 用传统水平集方法进行连续体拓扑结构优化计算时, 初始孔的多少、孔的位置对计算结果影响甚大, 这一缺陷必须加以克服。

### 3 拓扑导数理论

第 2 节中的计算已证明, 用传统水平集方法优化拓扑结构, 要求初始设计包含足够多的布局合理的孔, 优化过程通过孔的移动和融合来改变结构的拓扑, 但是不能生成新的孔, 所以如果初始拓扑没有

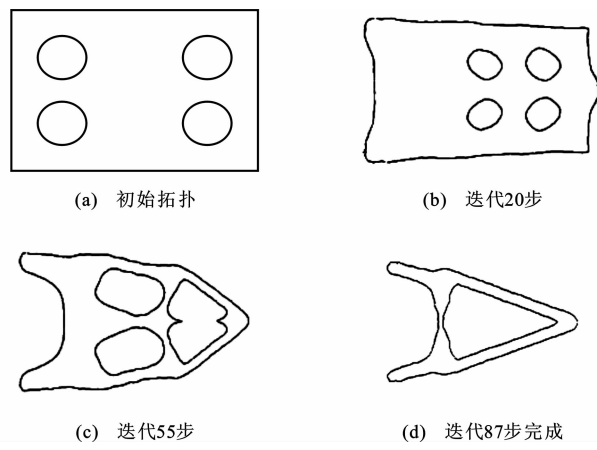


图 8 初始拓扑 4 个孔布局 1 时传统水平集方法的计算结果

Fig. 8 Calculation Results of Initial Topology with Four Holes Distribution 1 by Traditional Level Set Method

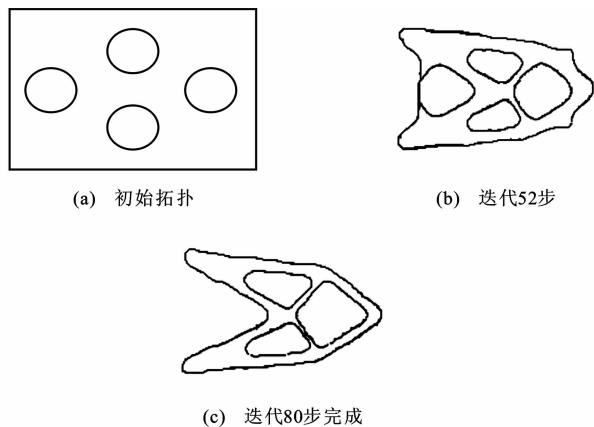


图 9 初始拓扑 4 个孔布局 2 时传统水平集方法的计算结果

Fig. 9 Calculation Results of Initial Topology with Four Holes Distribution 2 by Traditional Level Set Method

给出布局合理且大量的孔,水平集函数是不能有效地计算出结构的最优拓扑形状的。为了解决这个问题,把拓扑导数引入水平集方法,利用拓扑导数生成新的孔,再用水平集方法移动和融合新生成的孔。

对于一般的拓扑结构,只要结构的拓扑改变就会产生相应的拓扑导数。设欲求问题的目标函数  $J(\mathbf{u})$  可表示为

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} F(\mathbf{u}) d\Omega \quad (7)$$

式中:  $F(\mathbf{u})$  为与优化问题有关的函数表达式。

$F(\mathbf{u})$  是位移  $\mathbf{u}$  的函数,其位移解  $\mathbf{u}$  满足下面的弱平衡方程

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{p} \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau} \mathbf{v} d\Gamma \quad \mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{u}_0, \forall \mathbf{v} \in U \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{p}$  为体积力。

在定义域  $\Omega$  内  $x$  点开一半径为  $e$  的小孔  $B_e$ ,用  $\Gamma$  表示开孔前边界,  $\Gamma_e$  表示开孔后边界。这样定义拓扑导数  $D_T(x)$  为

$$\left. \begin{aligned} D_T(x) &= \lim_{e \rightarrow 0} \frac{J(\mathbf{u}_e) - J(\mathbf{u})}{\text{meas}(B_e)} \\ J(\mathbf{u}_e) &= \int_{\Omega_e} F(\mathbf{u}) d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中:  $\text{meas}(B_e)$  为孔的测度;  $\Omega_e$  为开孔后的定义域。

式(9)描述了定义域内某一点拓扑性质改变后目标函数的相对变化率,如图 10 所示。

一个拓扑在内部一点处开孔后其目标函数就会发生相应的变化,即产生拓扑导数,因此,通过计算拓扑中该点的拓扑导数信息,也就可以在拓扑中确定开孔的位置。通过计算拓扑导数来确定在拓扑形

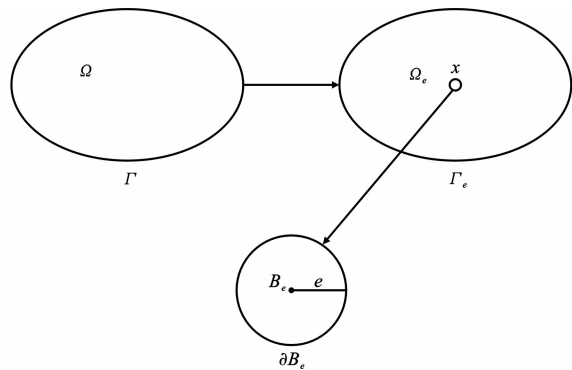


图 10 定义域

Fig. 10 Domain

状中开孔的点,并利用结构拓扑优化的水平集方法融合或移动这些孔,最终收敛于满足约束函数的最优解。

既然通过计算拓扑导数可以在合适的位置开孔,那么也就可以对无孔的、简单的初始拓扑进行拓扑预测,即在合适的点上开孔,以此来优化无孔的、简单的初始拓扑,然后运用结构拓扑优化的水平集方法对已经有孔的拓扑结构进行优化,融合或移动这些孔。这样就得到一个拓扑导数与水平集方法结合的新方法,它实质是借助拓扑导数来预测结构的拓扑,在材料内部开孔,同时应用水平集方法来进一步优化拓扑导数的预测结果,对已开的孔进行移动或融合,对材料界面进行光滑处理。

考虑到在此过程中,结构的拓扑在不断变化,最好让拓扑导数的计算与结构拓扑优化的水平集方法交替进行,也就是说,在实现算法时,进行一步拓扑导数计算,接着运行拓扑优化的水平集方法若干步,不宜太多也不宜太少。拓扑优化的水平集方法计算次数过多可能导致得到不正确的收敛解,如第 2 节中的情形 1;而过少可能无法使已开的孔完全融合或移动。

现在的问题是如何确定应该开孔的位置,即如何计算某点的拓扑导数值,文献[6]中给出了平面情况下拓扑导数的结果。

拓扑导数  $D_T(x)$  为

$$D_T(x) = -F(\mathbf{u}) - \mathbf{p} + \mathbf{E}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{w}) - \frac{3 - \nu}{E} \boldsymbol{\sigma}^u \boldsymbol{\sigma}^w - \frac{1 - \nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^u) \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^w) \quad (10)$$

式中:  $\text{Tr}(\cdot)$  表示张量的迹;  $\mathbf{w}$  为共轭位移场;  $\boldsymbol{\sigma}^u$ 、 $\boldsymbol{\sigma}^w$  分别为由位移场  $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{w}$  产生的应力张量。

计算完拓扑导数后,在拓扑导数负向最大的点

上,也就是在目标函数下降率最大的点上开孔,这样可以在较少的开孔数情况下,加快收敛速度。事实上,这些点往往不只一个,如文献[11]中所述,它们往往分布在一些闭合的等值线上。

## 4 拓扑导数与水平集算法

结合拓扑导数和水平集方法,下面给出本文新的优化算法的流程。

首先,由初始化水平集函数  $\varphi(x)$  计算速度场  $V$ ,然后计算拓扑导数  $D_T(x)$ ,在拓扑导数小于 0 的点上引入一个孔,这样就得到一个新的拓扑形状,对新的拓扑重新进行水平集和拓扑导数优化,重复上述过程,直至水平集函数和拓扑导数都收敛(没有拓扑导数小于 0 的点)。在实际计算中,最好多进行水平集优化步骤而少进行拓扑导数计算,以便使新生成的孔得到充分的移动和融合(水平集演化),因此,引入一个整数  $N$  来限制拓扑导数的计算步骤与水平集演化的计算步骤的比例。如  $N=5$  时,意味着在一次拓扑导数计算前已经进行了 4 次水平集计算。

对于整数  $k=0, N=5, n$  为自然数,执行如下循环直到收敛:

(1)初始数据准备。初始化水平集函数  $\varphi(x)$  及其初始拓扑形状  $\Omega_0$ 。离散其设计域,计算各节点的拓扑导数。

(2)水平集函数演化。如果  $k \neq nN$ ,对现在的拓扑形状  $\Omega_k$  进行水平集演化,利用敏度分析,取适当的速度场  $V$ ,求解水平集函数  $\varphi(x)$  的演化方程,即 Hamilton-Jacobi 方程,得到新的拓扑形状  $\Omega_{k+1}$ ,令  $\Omega_k \leftarrow \Omega_{k+1}, k \leftarrow k+1$ 。

(3)拓扑导数计算。如果  $k = nN$ ,对现在的拓扑形状  $\Omega_k$ ,计算各节点的拓扑导数。在拓扑导数  $D_T(x) < 0$  的点上,引入新的孔,得到新的拓扑形状  $\Omega_{k+1}$ ,令  $\Omega_k \leftarrow \Omega_{k+1}, k \leftarrow k+1$ ;如果没有拓扑导数小于 0 的点,则不需要引入新的孔,不用做任何演化,仅令  $\Omega_k \leftarrow \Omega_{k+1}, k \leftarrow k+1$ 。

(4)计算约束条件,判断是否满足。如果没有满足,返回第 2 步;如果满足约束条件而且收敛,则结束迭代计算。

可以看出,这是一个循环迭代的算法。与传统水平集算法不同的是,它加入了拓扑导数的计算,可以在拓扑结构内部生成孔,因此不要求初始拓扑形状中含有孔。由于拓扑导数的计算是基于整个结构拓扑形状的,所以得到的收敛结果一定是全局最优解。在实际计算中,为了保持算法的稳定性和图像

的光滑性,所开的孔的大小不应超出一个网格。

为了证明该方法的有效性,给出下面 3 个算例:

算例 2:悬臂梁。

为了比较方便,仍用第 1 节中算例 1 的悬臂梁和所有参数、条件。图 11 为拓扑导数水平集算法计算算例 1 的优化结果。

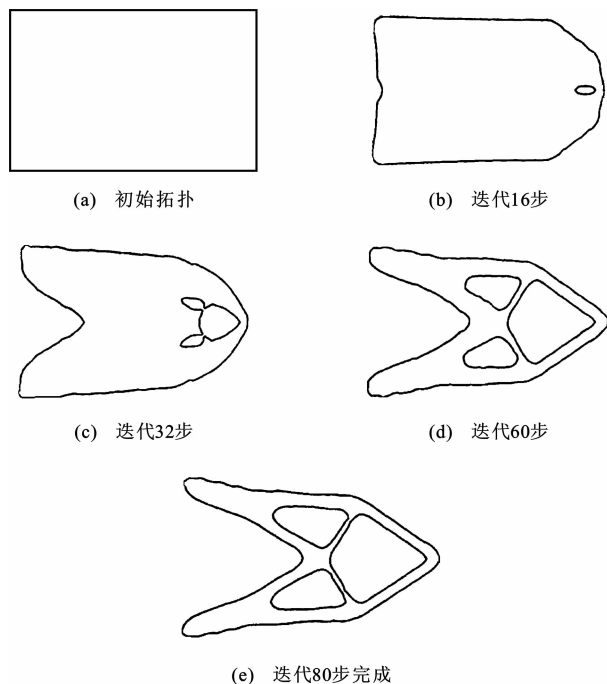


图 11 拓扑导数水平集算法计算算例 1 的优化结果

Fig. 11 Optimization Results of Calculation Example 1 for Topology Derivative-level Set Algorithm

比较图 2 和图 11 可以看出,基于拓扑导数的水平集改进优化算法,大部分步骤仍然是水平集优化,利用拓扑导数开孔的步骤并不多,得到的优化结果与用传统水平集方法得到的结果变化不大,该方法的优点在于不需要预先在初始拓扑中开孔,并且利用拓扑导数开的孔一定是可以使得目标函数下降的必要的孔。下面的算例 3 和算例 4 都是用本文中的基于拓扑导数的水平集方法计算出的结果。可以看出,所得结果与用 SIMP 方法的结果完全类似<sup>[15]</sup>。

算例 3:右端下部受力悬臂梁。

如图 12 所示,悬臂梁左端固定,右端为自由端,右端下部受竖直向下的荷载作用,荷载大小为 1 kN,梁的尺寸为 80 cm×40 cm,设实体材料的弹性模量和泊松比分别为 200 GPa 和 0.3,体积比限制为 0.35,计算网格为 80×40,四边形单元。目标函数取为结构柔度最小,运算迭代结果见图 13。

算例 4:MBB 梁。

图 14 为上部中点受集中力的 MBB 梁模型。

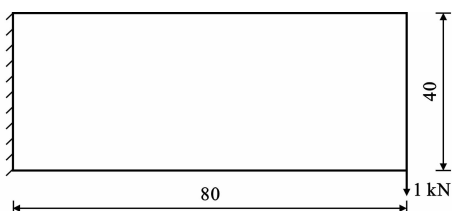


图 12 悬臂梁模型 II (单位:cm)

Fig. 12 Cantilever Beam Model II (Unit:cm)

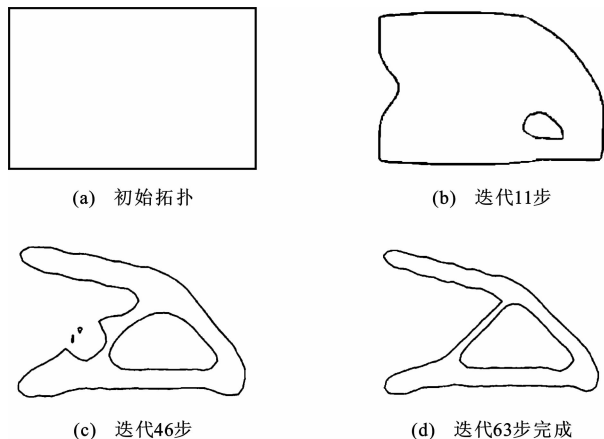


图 13 拓扑导数水平集算法计算算例 3 的优化结果

Fig. 13 Optimization Results of Calculation Example 3 for Topology Derivative-level Set Algorithm

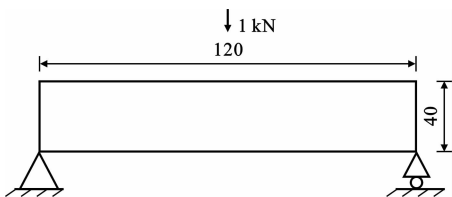


图 14 上部中点受集中力的 MBB 梁模型 (单位:cm)

Fig. 14 MBB Beam Model Under Concentrated Force at Top Midpoint (Unit:cm)

设计域为  $120\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ , 其左下角  $x$ 、 $y$  方向上都固定, 右下角只固定  $y$  方向, 在上部中点受垂直向下的集中荷载作用, 荷载大小为  $1\text{ kN}$ 。设材料的弹性模量和泊松比分别为  $200\text{ GPa}$  和  $0.3$ , 体积比限制为  $0.35$ , 计算网格为  $120 \times 40$ , 计算结果见图 15。



图 15 拓扑导数水平集算法计算算例 4 的优化结果

Fig. 15 Optimization Results of Calculation Example 4 for Topology Derivative-level Set Algorithm

算例 2~4 的结果与文献[15]中 SIMP 方法的结果对比表明, 本文方法结果与 SIMP 方法的结果完全类似, 这也证明了本文方法的有效性与正确性。

## 5 结 语

(1)通过给出的算例可以看出,传统水平集方法有很大的局限性,它只能融合和移动已经给出的孔,而不能在材料内部生成新的孔,其优化结果过于依赖初始条件,如在二维情况下,给出的初始拓扑是有很多孔的平板,并在优化过程中依靠这些孔的融合和移动来形成最终的拓扑,如果初始拓扑不够复杂,则无法得到最优的拓扑形状。这对水平集的推广和应用带来了很大不便,需要进一步改善。

(2)本文将传统的水平集方法和拓扑导数理论结合在一起,提出了一种基于拓扑导数的改进水平集方法,它不需要在初始模型中给出大量的孔,而是利用拓扑导数生成孔,运用水平集方法移动和融合生成的孔并确定下一步的拓扑模型,同时再次计算拓扑导数生成新的孔,如此循环直到收敛。该方法克服了传统水平集方法的缺点,并保留了其优点。对给出的算例进行比较,取得了令人满意的结果。

## 参考文献:

### References:

- [1] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts Propagating with Curvature-dependent Speed; Algorithm Based on Hamilton-Jacobi Formulations[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79(1): 12-49.
- [2] SETHIAN J A. Level Set Methods and Fast Marching Methods; Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Science[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [3] SETHIAN J A, WIEGMANN A. Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods [J]. Journal of Computational Physics, 2000, 163(2): 489-528.
- [4] SANTOSA S J, OSHER F. Level Set Methods for Optimization Problems Involving Geometry and Constraints I. Frequencies of a Two-density Inhomogeneous Drum[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 171(1): 272-288.
- [5] WANG M Y, WANG X M, GUO D M. A Level Set Method for Structural Topology Optimizations [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192(1/2): 227-246.
- [6] 梅玉林. 拓扑优化的水平集方法及其在刚性结构、柔性机构和材料设计中的应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2003.

MEI Yu-lin. A Level Set Method for Topological Op-

- timization and Its Application in Stiff Structures, Compliant Mechanisms and Material Designs [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2003.
- [7] 赵 康. 基于 Level Set 方法的结构优化技术 [D]. 大连: 大连理工大学, 2005.  
ZHAO Kang. Structural Optimization Techniques Based on Level Set Methods [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2005.
- [8] 王超逸. 水平集方法在连续体结构拓扑优化问题中的运用与发展 [D]. 西安: 长安大学, 2008.  
WANG Chao-yi. Study on Level Set Method in Continuum Structures Topology Optimization [D]. Xi'an: Chang'an University, 2008.
- [9] ESCHENAUER H A, KOBELEV V V, SCHUMACHER A. Bubble Method for Topology and Shape Optimization of Structures [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 1994, 8(1): 42-51.
- [10] SOKOŁOWSKI J, ZOCHOWSKI A. On the Topological Derivative in Shape Optimization [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1999, 37(4): 1251-1272.
- [11] SOKOŁOWSKI J, ZOCHOWSKI A. Topological Derivatives for Elliptic Equations [J]. Inverse Problems, 1999, 15(1): 123-134.
- [12] GARREAU S, GUILLAUME P, MASMOUDI M. The Topological Asymptotic for PDE Systems; the Elasticity Case [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2001, 39(6): 1756-1778.
- [13] ALLAIRE G, DE GOURNAY F, JOUVE F, et al. Structural Optimization Using Topological and Shape Sensitivity and a Level Set Method [J]. Control via Cybernetics, 2005, 34(1): 59-80.
- [14] SIGMUND O. A 99 Line Topology Optimization Code Written in Matlab [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2001, 21(2): 120-127.
- [15] 任晓辉, 封建湖. 基于水平集方法的连续体结构拓扑优化 [J]. 建筑科学与工程学报, 2007, 24(1): 74-79.  
REN Xiao-hui, FENG Jian-hu. Topology Optimization of Continuum Structure Based on Level Set Method [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2007, 24(1): 74-79.

(上接第 78 页)

- [3] CHAJES M J, FINCH W W, JANUSZKA T F, et al. Bond and Force Transfer of Composite Material Plates Bonded to Concrete [J]. ACI Structural Journal, 1996, 93(2): 208-217.
- [4] MITSUI M, FUKUZAWA K, NUMAO T, et al. Relations Between Surface Roughness Indexes and Bond Strength Between CFRP Sheets and Concrete [J]. Journal of the Society of Material Science, 2000, 49(6): 685-691.
- [5] TOUTNAJI H, ORTIZ G. The Effect of Surface Preparation on the Bond Interface Between FRP Sheets and Concrete Members [J]. Composite Structures, 2001, 53(4): 457-462.
- [6] WU Y F, HUAN G Y. Hybrid Bonding of FRP to Reinforced Concrete Structures [J]. Journal of Composites for Construction, 2008, 12(3): 266-273.
- [7] 胡程鹤, 吴智敏, 宿 莹, 等. FRP 复合锚固技术试验研究 [J]. 防震减灾工程学报, 2010, 30(3): 309-314.  
HU Cheng-he, WU Zhi-min, SU Ying, et al. Experimental Study of Hybrid FRP Anchorage Technique [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2010, 30(3): 309-314.
- [8] 宿 莹, 吴智敏, 胡程鹤, 等. CFRP 布加固钢筋混凝土梁的新型复合粘结技术 [J]. 建筑科学与工程学报, 2009, 26(4): 66-72.
- SU Ying, WU Zhi-min, HU Cheng-he, et al. New Hybrid Bonding Technique of Reinforced Concrete Beams Strengthened with CFRP Sheet [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2009, 26(4): 66-72.
- [9] 蒋田勇, 方 志. CFRP 筋在活性粉末混凝土中的粘结应力分布 [J]. 中国公路学报, 2010, 23(1): 49-57.  
JIANG Tian-yong, FANG Zhi. Bond Stress Distribution of CFRP Tendon in Reactive Powder Concrete [J]. China Journal of Highway and Transport, 2010, 23(1): 49-57.
- [10] 陈小英, 李唐宁, 黄 音, 等. CFRP 体外预应力加固钢筋混凝土 T 型梁试验研究 [J]. 中国公路学报, 2010, 23(2): 56-63.  
CHEN Xiao-ying, LI Tang-ning, HUANG Yin, et al. Experiment on Reinforced Concrete T-beams Strengthened with External Prestressed CFRP Sheets [J]. China Journal of Highway and Transport, 2010, 23(2): 56-63.
- [11] 任 伟, 贺拴海, 袁旭斌. 粘贴纤维布、钢板加固钢筋混凝土 T 梁试验研究 [J]. 西安建筑科技大学学报: 自然科学版, 2008, 40(3): 323-330.  
REN Wei, HE Shuan-hai, YUAN Xu-bin. Test Study of Strengthening RC T-beam with Bonded FRP and Steel Plates [J]. Journal of Xi'an University of Architecture & Technology: Natural Science Edition, 2008, 40(3): 323-330.