

文章编号:1673-2049(2011)04-0030-05

# 移动荷载作用下弹性半空间土体的动力响应

颜可珍<sup>1,2</sup>, 吴罗成<sup>2</sup>, 朱向平<sup>2</sup>

(1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092;  
2. 湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

**摘要:**基于弹性体激振下的运动方程以及入射波与反射波的叠加理论,结合坐标变换和傅里叶变换,建立了分析移动荷载作用下弹性半空间土体动力响应的谱元法。对某实际算例中路面的各力学性能指标进行动力响应分析,得出了由于荷载速度、荷载频率以及土体阻尼比不同而导致的土体表面各点竖向位移的变化,并与其他方法计算结果进行对比。结果表明:该方法合理、可行。

**关键词:**移动荷载;弹性半空间土体;傅里叶变换;动力响应;谱元法

中图分类号:TU435 文献标志码:A

## Dynamic Response of Elastic Half-space Soil Under Moving Loads

YAN Ke-zhen<sup>1,2</sup>, WU Luo-cheng<sup>2</sup>, ZHU Xiang-ping<sup>2</sup>

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering, Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, Hunan, China)

**Abstract:** Based on the equation of motion under the elastomeric excitation and the superposition theory of incident and reflected wave, combined with the coordinate transformation and Fourier transformation, a spectral element method of analyzing the dynamic response of elastic half-space soil under moving loads was established. The dynamic responses of various mechanical property indexes in the road of the practical examples were analyzed and the vertical displacements of the point change relationships due to different load speeds, load frequencies as well as damping ratios of soil were gained. The calculation results were compared with the other methods. The results show that spectral element method has feasibility and rationality.

**Key words:** moving load; elastic half-space soil; Fourier transform; dynamic response; spectral element method

## 0 引言

随着中国轨道交通速度的大幅提升,移动荷载作用下的路基土动力响应日趋复杂。蒋建群等<sup>[1]</sup>通过傅里叶积分变换法,算得了移动荷载作用下弹性半空间体内部质点的响应及其表面位移;谢伟平等<sup>[2]</sup>将轨道-地基系统简化为 Winkle 梁模型,研究

了高速移动荷载作用下轨道与地表动力响应;聂志红等<sup>[3]</sup>基于层状梁和粘弹性半空间体理论建立了轨道路基耦合动力模型,得到了移动荷载下路基稳态响应;左迎辉等<sup>[4]</sup>采用半解析法分析了饱和半空间在移动荷载作用下的动力响应;张昀青<sup>[5]</sup>推导出了移动荷载作用下半无限土体中任一点的动力响应在时域、频域和频率或波数域内的表达式。但仍有不

收稿日期:2011-10-15

基金项目:国家自然科学基金项目(50808077);中央高校基本科研业务费专项资金项目(1053210097);

岩土及地下工程教育部重点实验室开放基金项目(KLE-TJGE-0804)

作者简介:颜可珍(1975-),男,湖南桃江人,湖南大学副教授,工学博士,博士后,E-mail:yankz2004@163.com。

足之处:①土层厚度较大时可能出现数值失真或发生数值溢出问题;②复杂的积分变换和含奇点的无穷积分,数值实现上仍有不少困难;③需要对地基进行人工细分层,计算量较大<sup>[6-10]</sup>。

本文中笔者运用弹性体激振下的运动方程以及入射波与反射波的叠加理论,推导出了求解移动荷载作用下弹性半空间土体动力响应的谱元法,此方法将行波方程的解作为位移形函数,大大提高了运算速度,结果准确且效率高,通过实际算例分析,表明了该方法的合理性。

## 1 几何模型

本文中研究的是长度为 $2b$ ( $b$ 为半荷载长),匀速移动的线性荷载(荷载移动速度为 $c$ )作用在半无限空间上的动力响应。在垂直 $x-z$ 平面方向上,土体视为无限分布,则问题可以简化为半平面问题,如图1所示。

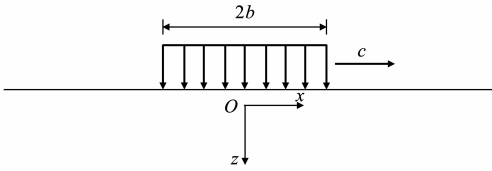


图1 几何模型

Fig. 1 Geometric Model

## 2 基本方程

### 2.1 动力控制方程

各向同性均质弹性体在受到动力荷载时,会产生P波和S波。运动微分方程为<sup>[11]</sup>

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + \mu \nabla^2 u = \rho \ddot{u} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E(1+i\eta)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E(1+i\eta)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $\nabla$ 表示求散度; $u$ 为位移分量; $\ddot{u}$ 为位移对时间的二阶导数; $\rho$ 为土体密度; $\lambda, \mu$ 为Lame常数; $E$ 为弹性模量; $\nu$ 为泊松比; $\eta$ 为阻尼比。

### 2.2 势函数

二维波动方程为

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \Phi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \Psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: $\Phi$ 为等容波势函数; $\Psi$ 为剪切波势函数; $t$ 为荷载作用时间; $x_1$ 表示 $x$ 方向; $x_3$ 表示 $z$ 方向; $c_1, c_2$ 为

$$\lambda, t \text{ 和 } \mu \text{ 的函数, } c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \frac{E(1-\nu)(1+i\eta)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}, c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} = \frac{E(1+i\eta)}{2\rho(1+\nu)}.$$

### 2.3 应力方程

就 Helmholtz 势函数而言,应力方程可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{33} &= \lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \tau_{13} &= 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: $\sigma_{33}, \tau_{13}$ 分别为正应力和切应力。

## 3 方程求解

### 3.1 坐标变换

对位移方程和势函数进行坐标变换得 $x = x_1 - ct$ ,将原势函数 $\Phi$ 对时间求导并代入二维波动方程式(3),可以得到新的势函数动力方程为

$$\left. \begin{aligned} \left[ 1 - \left( \frac{c}{c_1} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2i\omega \frac{c}{c_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\omega^2}{c_1^2} \Phi = 0 \\ \left[ 1 - \left( \frac{c}{c_2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2i\omega \frac{c}{c_2^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\omega^2}{c_2^2} \Psi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: $\omega$ 为荷载角频率。

方程式(4)边界条件中的 Helmholtz 势函数 $\Phi$ 和 $\Psi$ 被 $\Phi e^{i\omega t}$ 和 $\Psi e^{i\omega t}$ 取代。

### 3.2 傅里叶变换

采用傅里叶变换,定义如下

$$\bar{h}(\beta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, z) e^{-i\beta x} dx \quad (6)$$

式中: $\beta$ 为傅里叶变换参数。

对动力方程式(5)进行傅里叶变换,得

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{d^2}{dz^2} - \beta^2 + k_1^2 + \left( \frac{c}{c_1} \right)^2 \beta^2 - 2\omega \frac{c}{c_1^2} \beta \right] \bar{\Phi} = 0 \\ \left[ \frac{d^2}{dz^2} - \beta^2 + k_2^2 + \left( \frac{c}{c_2} \right)^2 \beta^2 - 2\omega \frac{c}{c_2^2} \beta \right] \bar{\Psi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: $k_n = \omega/c_n, n=1, 2$ 。

解微分方程得

$$\bar{\Phi} = A e^{-\alpha_1 z}, \bar{\Psi} = B e^{-\alpha_2 z} \quad (8)$$

式中: $\alpha_1^2 = k_1^2(1-\beta/k)^2 - \beta^2, \alpha_2^2 = k_2^2(1-\beta/k)^2 - \beta^2$ ;  $A, B$ 为系数; $z$ 为竖向深度。

对应力方程式(4)应用傅里叶变换,并将方程式(8)代入,得出 $A$ 和 $B$ 的系数表达式为

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\lambda \alpha_1^2 - 2\mu \alpha_1^2 - \lambda \beta^2) e^{-\alpha_1 z} & 2\mu \beta \alpha_2 e^{-\alpha_2 z} \\ 2\beta \alpha_1 e^{-\alpha_1 z} & (\alpha_2^2 - \beta^2) e^{-\alpha_2 z} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中： $\sigma_z$  为  $z$  方向上的正应力； $\tau_{xz}$  为  $x-z$  平面的切应力。

将系数矩阵表达式(9)代入矩阵形式表达的位移方程,可得位移  $u, \tau$  和应力关系的表达式为

$$\begin{bmatrix} u \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\beta e^{-i\alpha_1 z} & i\alpha_2 e^{-i\alpha_2 z} \\ -i\alpha_1 e^{-i\alpha_1 z} & i\beta e^{-i\alpha_2 z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-\lambda\alpha_1^2 - 2\mu\alpha_1^2 - \lambda\beta^2)e^{-i\alpha_1 z} & 2\mu\beta\alpha_2 e^{-i\alpha_2 z} \\ 2\beta\alpha_1 e^{-i\alpha_1 z} & (\alpha_2^2 - \beta^2)e^{-i\alpha_2 z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (10)$$

时间域下的移动荷载可以通过傅里叶变换转化为频率域内的形式

$$P(t) = \begin{cases} -pe^{i\omega t}/(2b) & |x_1 - ct| \leq b \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

式中： $P(t)$  为随时间变化的简谐荷载函数； $p$  为荷载的幅值。

对荷载进行傅里叶变换

$$P(\beta) = \int_{-b}^b \frac{-p}{2b} e^{i\omega t} e^{-i\beta x} dx = \frac{-pe^{i\omega t} \sin(\beta b)}{\beta b} \quad (12)$$

### 3.3 方程求解

由方程式(4)的边界条件,可得频率域内的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{-pe^{i\omega t} \sin(\beta b)}{\beta b} \\ \tau_{xz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

将方程式(13)代入方程式(10),可得频率域内位移的波动解为

$$\begin{bmatrix} u \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\beta e^{-i\alpha_1 z} & i\alpha_2 e^{-i\alpha_2 z} \\ -i\alpha_1 e^{-i\alpha_1 z} & i\beta e^{-i\alpha_2 z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-\lambda\alpha_1^2 - 2\mu\alpha_1^2 - \lambda\beta^2)e^{-i\alpha_1 z} & 2\mu\beta\alpha_2 e^{-i\alpha_2 z} \\ 2\beta\alpha_1 e^{-i\alpha_1 z} & (\alpha_2^2 - \beta^2)e^{-i\alpha_2 z} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-pe^{i\omega t} \sin(\beta b)}{\beta b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

## 4 算例分析

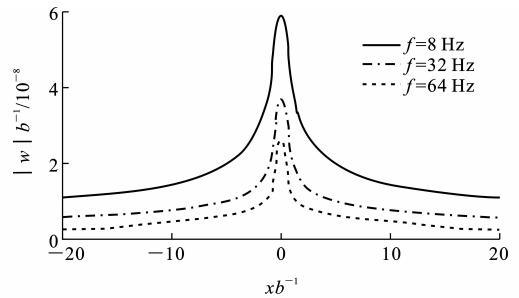
当只采用一个层厚无穷大的单节点单元时则为半无限空间结构。考察半无限空间结构施加匀速移动的均布线荷载,算例模型如图1所示,土体参数见表1。

根据本文中的方法,可得出相同荷载速度、不同

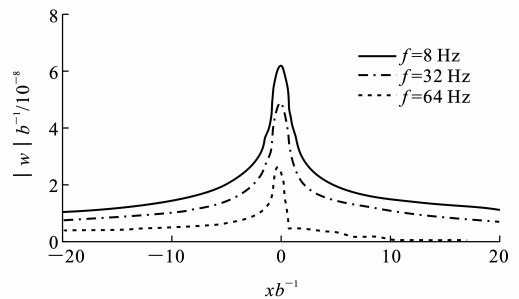
表1 土体参数  
Tab.1 Soil Parameters

参数	数值
弹性模量 $E/\text{MPa}$	269
泊松比 $\nu$	0.257
阻尼比 $\eta$	0.1
瑞利波速 $c_R/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	242
半荷载长 $b/\text{m}$	0.75
荷载 $P/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$2\pi$

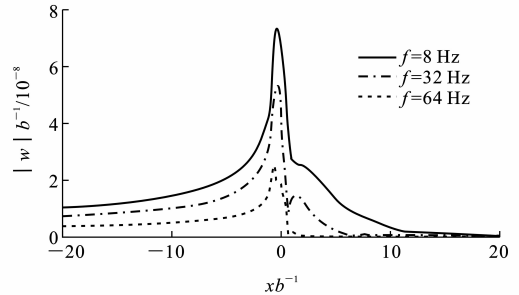
荷载频率  $f(f=2\pi/\omega)$  作用下土体表面各点与其竖向位移的关系,如图2所示,其中,  $|\tau_w|$  为竖向位移。



(a)  $c=0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$



(b)  $c=100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$



(c)  $c=200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

图2 不同荷载频率下的竖向位移

Fig.2 Vertical Displacements Under Different Load Frequencies

由图2可知:

(1)荷载速度越大,土体表面各点的竖向位移对称性越弱。

(2)当荷载速度不变时,随着荷载频率的增加,土体表面的最大竖向位移逐渐减小。

图3为相同荷载频率、不同荷载速度作用下土

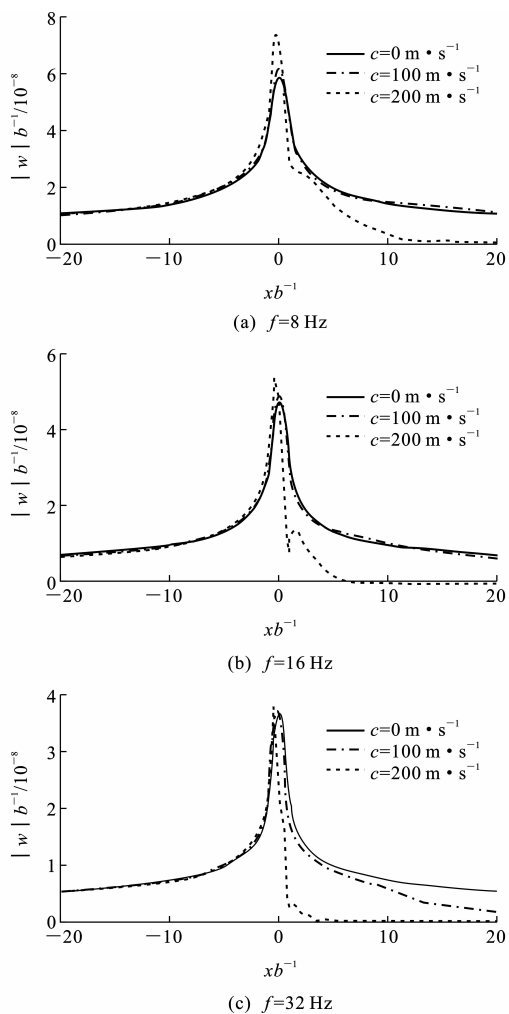


图 3 不同荷载速度下的竖向位移

Fig. 3 Vertical Displacements Under Different Load Speeds

体表面各点与其竖向位移的关系。

由图 3 可知:

(1)当荷载频率较低时,荷载速度对土体表面的最大竖向位移影响非常明显。

(2)在相同荷载频率作用下,荷载速度越高,土体表面各点的竖向位移曲线由荷载中心向两边衰减得越快。随着荷载频率的增大,土体表面各点的竖向位移递减曲线不再平滑,并且开始出现波动性。

(3)在相同荷载频率作用下,荷载中心点处的最大竖向位移随荷载速度的增加而增大。

不同阻尼比情况下的土体在相同荷载频率和荷载速度作用下土体表面各点与其竖向位移关系如图 4 所示。由图 4 可知:土体表面各点的竖向位移随半无限空间体的阻尼比逐渐增大而减小,阻尼比对土体表面竖向位移的衰减趋势和波动性的影响不十分明显。与文献[6]中的计算结果对比如图 5 所示。

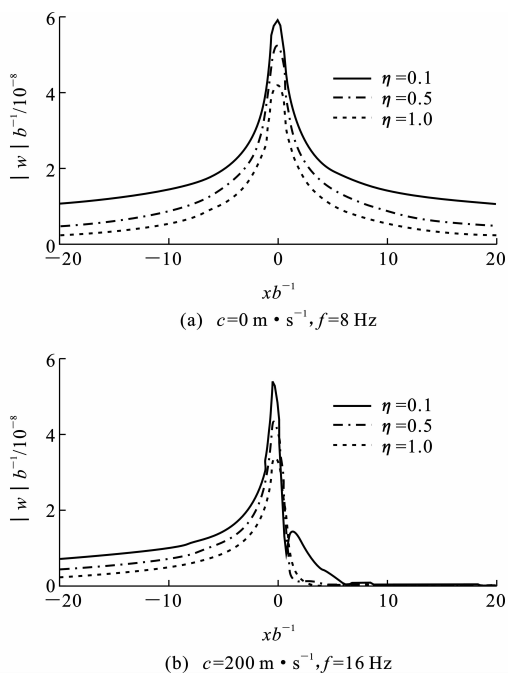


图 4 不同阻尼比下的土体竖向位移

Fig. 4 Vertical Displacements of Soil Under Different Damping Ratios

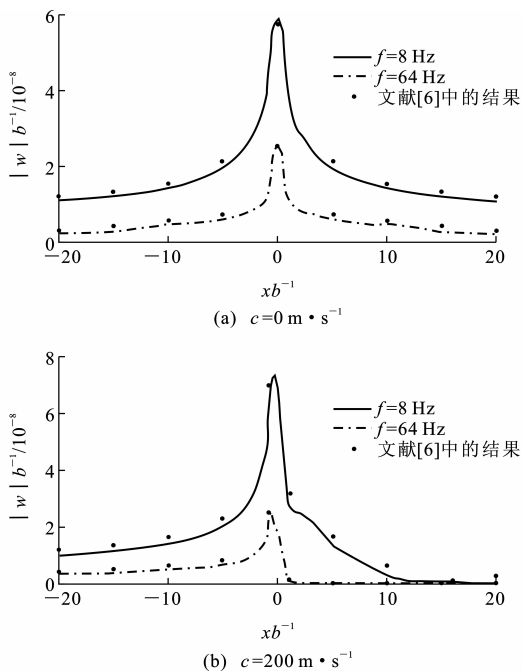


图 5 计算结果比较

Fig. 5 Comparisons of Calculation Results

由图 4,5 可以看出,谱元法的计算结果与文献[6]中的结果基本吻合,验证了该方法的正确性。

## 5 结 语

(1)当荷载速度为 0 时,土体表面各点的竖向位

移沿着荷载中心点对称,移动荷载速度越大,土体表面各点的竖向位移对称性越弱。

(2)当荷载频率较低时,荷载速度对土体表面的最大竖向位移影响非常明显;当荷载频率较高时,荷载速度对土体表面的竖向位移影响不明显,随着荷载频率的增大,土体表面各点竖向位移的递减曲线不再平滑,并且开始出现波动性。

(3)土体表面各点的竖向位移随半无限空间土体的阻尼比增大而减小,阻尼比对土体表面竖向位移的衰减趋势和波动性的影响不十分明显。

### 参考文献:

### References:

- [1] 蒋建群,周华飞,张土乔.弹性半空间体在移动集中荷载作用下的稳态响应[J].岩土工程学报,2004,26(4):440-444.  
JIANG Jian-qun, ZHOU Hua-fei, ZHANG Tu-qiao. Steady-state Response of an Elastic Half-space Under a Moving Point Load[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(4): 440-444.
- [2] 谢伟平,胡建武,徐劲.高速移动荷载作用下的轨道-地基系统的动力响应[J].岩石力学与工程学报,2002,21(7):1075-1078.  
XIE Wei-ping, HU Jian-wu, XU Jin. Dynamic Response of Track-ground Systems Under High Speed Moving Load[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(7): 1075-1078.
- [3] 聂志红,刘宝琛,李亮,等.移动荷载作用下轨道路基动力响应分析[J].中国铁道科学,2006,27(2):15-19.  
NIE Zhi-hong, LIU Bao-chen, LI Liang, et al. Study on the Dynamic Response of the Track/Subgrade Under Moving Load[J]. China Railway Science, 2006, 27(2): 15-19.
- [4] 左迎辉,蔡袁强,徐长节.移动荷载下饱和半空间的动力响应[J].岩石力学与工程学报,2005,24(23):4352-4357.  
ZUO Ying-hui, CAI Yuan-qiang, XU Chang-jie. Dynamic Response of Soil in Saturated Half Space Under Moving Load[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering 2005, 24(23): 4352-4357.
- [5] 张昀青.移动荷载作用下半无限体的动力响解[J].岩

土力学,2004,25(6):955-957.

ZHANG Yun-qing. Dynamic Response of Semi-infinite Body Under Moving Loads[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(6): 955-957.

- [6] 蒋建群,周华飞,张土乔.移动荷载下粘弹性地基上无限大板的稳态响应[J].中国公路学报,2006,19(1):6-11.  
JIANG Jian-qun, ZHOU Hua-fei, ZHANG Tu-qiao. Steady State Response of Infinite Plate on Visco-elastic Foundation Subjected to Moving Load[J]. China Journal of Highway and Transport, 2006, 19(1): 6-11.
- [7] 娄平,曾庆元.移动荷载作用下连续粘弹性基础支承无限长梁的有限元分析[J].交通运输工程学报,2003,3(2):1-6.  
LOU Ping, ZENG Qing-yuan. Finite Element Analysis of Infinitely Long Beam Resting on Continuous Visco-elastic Foundation Subjected to Moving Loads[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2003, 3(2): 1-6.
- [8] 娄平,曾庆元.移动荷载作用下板式轨道的有限元分析[J].交通运输工程学报,2004,4(1):29-33.  
LOU Ping, ZENG Qing-yuan. Finite Element Analysis of Slab Track Subjected to Moving Load[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2004, 4(1): 29-33.
- [9] 郑碧玉,朱东方,尹冠生.移动荷载作用下土的力学分析[J].长安大学学报:自然科学版,2009,29(5):35-40.  
ZHENG Bi-yu, ZHU Dong-fang, YIN Guan-sheng. Mechanic Analysis of Soil Under Moving Load[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2009, 29(5): 35-40.
- [10] 赵华,陈拴发.双层钢筋混凝土路面荷载应力分析[J].筑路机械与施工机械化,2010,27(7):47-50.  
ZHAO Hua, CHEN Shuan-fa. Analysis on Load Stress of Double-layer Reinforced Concrete Pavement[J]. Road Machinery & Construction Mechanization, 2010, 27(7): 47-50.
- [11] LEFEUVE-MESGOUEZ G, LE HOUDEC D, PEPLOW A T. Ground Vibration in the Vicinity of a High-speed Moving Harmonic Strip Load[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 231(9): 1289-1309.