

文章编号: 1673-2049(2012)02-0074-09

# 非饱和土抗剪强度公式分类及总结

张常光, 赵均海, 朱倩

(长安大学 建筑工程学院, 陕西 西安 710061)

**摘要:** 将众多非饱和土抗剪强度公式分为结合土-水特征曲线、数学拟合、分段函数、总应力指标及其他形式 5 类, 分析了当前非饱和土抗剪强度公式的特点及研究不足。结果表明: 有效应力抗剪强度公式和双应力状态变量抗剪强度公式的力学本质不同, 吸附强度表达式的不同导致了抗剪强度公式的多样性, 急需加强非饱和土真三轴试验研究, 建立符合工程实际受力状况的非饱和土强度理论, 完善非饱和土的理论基础, 并加快非饱和土强度理论的工程实践与应用进程。

**关键词:** 非饱和土; 基质吸力; 抗剪强度公式; 真三轴试验

**中图分类号:** TU432 **文献标志码:** A

## Classification and Summary of Shear Strength Formulae for Unsaturated Soils

ZHANG Chang-guang, ZHAO Jun-hai, ZHU Qian

(School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, Shaanxi, China)

**Abstract:** The shear strength formulae for unsaturated soils were divided into five categories, such as using soil-water characteristic curve, mathematical fitting, piecewise functions, total stress indicators and other forms. Characteristics and deficiencies of the current research on shear strength formulae for unsaturated soils were analyzed. The results show that some differences in mechanical significance exist between shear strength formulae based on the effective stress and shear strength formulae based on the two-stress state variables. Different expressions of suction strength lead to diversities of the shear strength formulae. True triaxial tests of unsaturated soils are urgent need to be carried out and strength theory of unsaturated soils satisfying the actual engineering stress conditions is to be established in order to improve the theoretical basis of unsaturated soils and accelerate the process of engineering applications.

**Key words:** unsaturated soil; matric suction; shear strength formula; true triaxial test

## 0 引言

非饱和土分布十分广泛, 与工程实践密切联系的地表土几乎全都是非饱和土<sup>[1]</sup>。广义的土是指非饱和土, 饱和土是非饱和土的特例, 含水量或饱和度的变化常使非饱和土的工程特性发生巨大变化, 导致非饱和土边坡滑移失稳、地表隆起或沉降, 并给其

上的建筑物和构筑物的安全带来威胁, 每年造成的经济损失不亚于水灾、台风、地震等。非饱和土的强度是土体粒间作用力的宏观反映, 是非饱和土理论研究最主要的内容之一, 贯穿于非饱和土土力学发展的整个过程, 在侧向土压力、地基承载力和边坡稳定分析中都具有重要作用。在 60 余年的非饱和土强度研究进程中, 众多学者对非饱和土的抗剪强度

收稿日期: 2011-12-22

基金项目: 陕西省住房和城乡建设厅科学研究项目(2012); 陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2011JM7002)

作者简介: 张常光(1982-), 男, 山东菏泽人, 讲师, 工学博士, E-mail: zcg1016@163.com。

进行了大量的试验和理论研究,提出了各自的抗剪强度公式,并逐渐考虑了更多因素的影响。本文中笔者将众多非饱和土抗剪强度公式分为 5 类,分析当前抗剪强度公式的特点及研究不足。

## 1 基质吸力与吸附强度

基质吸力通常同水的表面张力引起的毛细现象有关,其大小等于孔隙气压力  $u_a$  和孔隙水压力  $u_w$  之差,即基质吸力  $(u_a - u_w)$ 。对于粘性土和砂土来说,基质吸力通常为吸力的主要组成部分,且易受外界环境的影响。基质吸力能反映以非饱和土的结构、土颗粒成分及孔隙大小和分布形态等为特征的基质对土中水分的吸持作用,是控制非饱和土力学性状的关键因素<sup>[2]</sup>。

各国学者通过试验研究与理论分析,提出了许多非饱和土的抗剪强度理论和公式,并逐步应用于岩土工程实践,其中最为著名的当属 Bishop 有效应力抗剪强度公式和 Fredlund 双应力状态变量抗剪强度公式。

Bishop 等<sup>[3]</sup>基于饱和土有效应力原理,提出的非饱和土有效应力抗剪强度公式为

$$\tau_f = c' + [\sigma - u_a + \chi(u_a - u_w)] \tan(\varphi') = c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + \chi(u_a - u_w) \tan(\varphi') \quad (1)$$

式中:  $\tau_f$  为非饱和土的抗剪强度;  $c'$ ,  $\varphi'$  分别为饱和土的有效粘聚力和有效内摩擦角,与基质吸力  $(u_a - u_w)$  无关;  $(\sigma - u_a)$  为净法向应力;  $\chi$  为有效应力参数,与饱和度及其他很多因素有关,不具有单值性,因而在工程实践中 Bishop 有效应力抗剪强度公式未能得到广泛应用。

Fredlund 等<sup>[4]</sup>在采用双应力状态变量  $(\sigma - u_a)$  和  $(u_a - u_w)$  的基础上,基于 Mohr-Coulomb 强度理论,提出的非饱和土双应力状态变量抗剪强度公式为

$$\tau_f = c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + (u_a - u_w) \tan(\varphi^b) \quad (2)$$

式中:  $\varphi^b$  为与基质吸力相关的角,  $\varphi^b$  的大小可根据给定净法向应力  $(\sigma - u_a)$  下,不同基质吸力  $(u_a - u_w)$  所对应的抗剪强度曲线的斜率确定,  $\tan(\varphi^b)$  表示基质吸力对抗剪强度贡献的速率。

由式(1)和式(2)可以看出,非饱和土的抗剪强度由有效粘聚力  $c'$ 、净法向应力  $(\sigma - u_a)$  引起的抗剪强度,以及基质吸力  $(u_a - u_w)$  引起的抗剪强度 3 个部分所组成。净法向应力引起的抗剪强度与有效内摩擦角  $\varphi'$  有关,而基质吸力引起的抗剪强度与有效应力参数  $\chi$  或角  $\varphi^b$  有关。

非饱和土的抗剪强度与饱和土的抗剪强度相

比,最大的不同就在于基质吸力对抗剪强度的贡献。如果定义由基质吸力所引起的抗剪强度为吸附强度  $c_s$ ,则式(1)和式(2)的吸附强度  $c_{s1}$ ,  $c_{s2}$  分别为

$$c_{s1} = \chi(u_a - u_w) \tan(\varphi') \quad (3)$$

$$c_{s2} = (u_a - u_w) \tan(\varphi^b) \quad (4)$$

令式(3)和式(4)相等,则

$$\chi = \tan(\varphi^b) / \tan(\varphi') \text{ 或 } \tan(\varphi^b) = \chi \tan(\varphi') \quad (5)$$

可见,仅从非饱和土抗剪强度来看, Bishop 有效应力抗剪强度公式和 Fredlund 双应力状态变量抗剪强度公式的物理概念基本相同,其差异仅在于分别采用了有效应力参数  $\chi$  和角  $\varphi^b$  两种不同的参数形式。但在力学意义上却有着本质的不同,式(1)属于有效应力公式,即净法向应力和由基质吸力引起的有效法向应力能直接叠加;式(2)属于双应力状态变量公式,净法向应力和基质吸力不能叠加。

吸附强度  $c_s$  来源于基质吸力所产生的负孔隙水压力,负孔隙水压力在土骨架的内部产生有效应力,因而产生这种与外力无关的强度。由于吸附强度与外力无关,当用常规试验方法进行试验时,吸附强度与一般粘聚力的性质相似,所以又可称之为表观粘聚力。当土的含水量发生变化时,基质吸力和吸附强度都随之变化,因而吸附强度又是不稳定的。吸附强度随着含水量的增加而降低,直至接近饱和时完全消失。

## 2 抗剪强度公式的分类

在 Bishop 有效应力抗剪强度公式或 Fredlund 双应力状态变量抗剪强度公式的基础上,研究者结合饱和土的有效抗剪强度参数,着重研究吸附强度的特性,提出了不同的抗剪强度公式,大致可分为 5 类。

### 2.1 结合土-水特征曲线的抗剪强度公式

Bishop 有效应力抗剪强度公式中的有效应力参数  $\chi$  与饱和度  $S$  有关,饱和度  $S$  又和土-水特征曲线密切相关,同时角  $\varphi^b$  也与土-水特征曲线的不同区段紧密相连,因而可以在土-水特征曲线和有效应力参数  $\chi$ 、角  $\varphi^b$  之间建立某种函数关系,以达到简化试验量测,便于工程应用的目的。

Lamborn<sup>[5]</sup>基于拓展微观力学模型,提出的非饱和土抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + (u_a - u_w) \theta_w \tan(\varphi') \\ c_s &= (u_a - u_w) \theta_w \tan(\varphi') \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中:  $\theta_w$  为体积含水量。

Vanapalli 等<sup>[6]</sup>基于非饱和土的孔隙分布和土-水特征曲线的关系,提出了一个普遍适用的抗剪强

度公式,即

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + (u_a - u_w) \cdot \\ &\quad \Theta^* \tan(\varphi') \\ c_s &= (u_a - u_w) \Theta^* \tan(\varphi') \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: $\Theta$ 为相对体积含水量, $\Theta = \theta_w / \theta_s$ ;  $\theta_s$ 为饱和体积含水量; $\kappa$ 为拟合参数。

Garven等<sup>[7]</sup>以非饱和土的塑性指数 $I_p$ 为变量,拟合参数 $\kappa$ 的取值公式为

$$\kappa = -0.0016 I_p^2 + 0.0975 I_p + 1$$

同时, Vanapalli等也提出不包含参数 $\kappa$ 的抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + (u_a - u_w) \cdot \\ &\quad \frac{\theta_w - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \tan(\varphi') \\ c_s &= (u_a - u_w) \frac{\theta_w - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \tan(\varphi') \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: $\theta_r$ 为残余体积含水量,用饱和度 $S$ 替换体积含水量 $\theta$ 也可得到类似的抗剪强度公式。

Oberg等<sup>[8]</sup>提出含有饱和度 $S$ 的抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + (u_a - u_w) \text{Stan}(\varphi') \\ c_s &= (u_a - u_w) \text{Stan}(\varphi') \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)与式(1),(6)的差别仅在于用饱和度 $S$ 替代了有效应力参数 $\chi$ 和体积含水量 $\theta_w$ ,应用式(9)需要知道非饱和土破坏时的饱和度。

Khalili等<sup>[9]</sup>依据14种非饱和土常规三轴试验数据提出的抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + (u_a - u_w) \cdot \\ &\quad \left[ \frac{u_a - u_w}{(u_a - u_w)_b} \right]^{-0.55} \tan(\varphi') \\ c_s &= (u_a - u_w) \left[ \frac{u_a - u_w}{(u_a - u_w)_b} \right]^{-0.55} \tan(\varphi') \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: $(u_a - u_w)_b$ 为非饱和土的进气值。

式(10)相当于用 $[(u_a - u_w) / (u_a - u_w)_b]^{-0.55}$ 取代了有效应力参数 $\chi$ ,在一定程度上避免了Bishop有效应力抗剪强度公式的不足。

Bao等<sup>[10]</sup>针对工程实践中非饱和土土-水特征曲线的第2区段,提出的实用非饱和土抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + (u_a - u_w) \cdot \\ &\quad \frac{\lg(u_a - u_w)_r - \lg(u_a - u_w)}{\lg(u_a - u_w)_r - \lg(u_a - u_w)_b} \tan(\varphi') \\ c_s &= (u_a - u_w) \frac{\lg(u_a - u_w)_r - \lg(u_a - u_w)}{\lg(u_a - u_w)_r - \lg(u_a - u_w)_b} \cdot \\ &\quad \tan(\varphi') \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: $(u_a - u_w)_r$ 为非饱和土的残余基质吸力。

Hossain等<sup>[11-12]</sup>考虑非饱和土的剪胀特性对抗剪强度的提高作用,在式(7)的基础上建议的非饱和土抗剪强度公式为

$$\begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi' + \Phi) + \\ &\quad (u_a - u_w) \Theta^* \tan(\varphi' + \Phi) \end{aligned} \quad (12)$$

式中: $\Phi$ 为非饱和土的剪胀角。

## 2.2 数学拟合抗剪强度公式

依据已有的试验数据,可以采用不同的数学表达式对其进行拟合,主要是对吸附强度进行数学分析,常用的函数有椭圆曲线、双曲线、幂函数和对数函数等。

Escario等<sup>[13]</sup>建议用2.5维的椭圆曲线来拟合3种不同非饱和土的抗剪强度,其公式为

$$\left[ \frac{c_1 - (u_a - u_w)}{a_1} \right]^{2.5} + \left( \frac{\tau_f - d_1}{b_1} \right)^{2.5} = 1 \quad (13)$$

式中: $a_1, b_1, c_1, d_1$ 均为拟合参数。

双曲线拟合公式在非饱和土抗剪强度中应用非常广泛,Rohm等<sup>[14]</sup>、沈珠江<sup>[15]</sup>提出的双曲线抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + \\ &\quad \frac{u_a - u_w}{1 + d_2(u_a - u_w)} \tan(\varphi') \\ c_s &= \frac{u_a - u_w}{1 + d_2(u_a - u_w)} \tan(\varphi') \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中: $d_2$ 为拟合参数。

Lee等<sup>[16]</sup>、Jiang等<sup>[17]</sup>、Vilar<sup>[18]</sup>提出的双曲线抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + (u_a - u_w) / \\ &\quad \left[ \frac{1}{\tan(\varphi')} + \frac{u_a - u_w}{c_{s\infty}} \right] \\ c_s &= (u_a - u_w) / \left[ \frac{1}{\tan(\varphi')} + \frac{u_a - u_w}{c_{s\infty}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中: $c_{s\infty}$ 为极限吸附强度。

对比式(14)和式(15),可以得出拟合参数 $d_2 = \tan(\varphi') / c_{s\infty}$ 。

Miao等<sup>[19]</sup>建议的双曲线抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + (u_a - u_w) / \\ &\quad \left[ a_2 + \frac{a_2 - 1}{p_{at}} (u_a - u_w) \right] \\ c_s &= (u_a - u_w) / \left[ a_2 + \frac{a_2 - 1}{p_{at}} (u_a - u_w) \right] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中: $a_2$ 为拟合参数; $p_{at}$ 为标准大气压。

对于式(14)~(16),可以看出:当基质吸力为0时,吸附强度 $c_s$ 亦为0;当基质吸力趋于无穷时,对

应极限吸附强度  $c_{s\infty}$ ,这在理论和概念上较合理,同时也只有一个试验参数,便于工程应用。

Rassam 等<sup>[20]</sup>建议的可加性幂函数抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + (u_a - u_w) \tan(\varphi') + \\ & b_2 [u_a - u_w - (u_a - u_w)_b]^{c_2} \\ c_s &= (u_a - u_w) \tan(\varphi') + b_2 [u_a - u_w - \\ & (u_a - u_w)_b]^{c_2} \\ b_2 &= \frac{(u_a - u_w) \tan(\varphi') - c_{sr}}{[u_a - u_w - (u_a - u_w)_b]^{c_2}} \\ c_2 &= \frac{\tan(\varphi') [u_a - u_w - (u_a - u_w)_b]}{(u_a - u_w)_r \tan(\varphi') - c_{sr}} \end{aligned} \right\} (17)$$

式中:  $b_2, c_2$  均为拟合参数。

应用式(17)需要试验确定非饱和土的进气值  $(u_a - u_w)_b$ , 残余基质吸力所产生的吸附强度  $c_{sr}$  和饱和土的有效内摩擦角  $\varphi'$ , 而且还假定残余基质吸力所对应的角  $\varphi^b$  等于 0, 可见, 式(17)的工程应用将非常困难。

党进谦等<sup>[21]</sup>针对陕西关中地区的马兰黄土建议的幂函数抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + \zeta_1 (u_a - u_w)^{\zeta_2} \\ c_2 &= \zeta_1 (u_a - u_w)^{\zeta_2} \end{aligned} \right\} (18)$$

式中:  $\zeta_1, \zeta_2$  均为拟合参数。

Xu<sup>[22]</sup>依据分形结构模型推导出的膨胀土幂函数抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + (u_a - u_w)_b^{1-\zeta} \cdot \\ & (u_a - u_w)^\zeta \tan(\varphi') \\ c_s &= (u_a - u_w)_b^{1-\zeta} (u_a - u_w)^\zeta \tan(\varphi') \end{aligned} \right\} (19)$$

式中:  $\zeta$  为参数,  $\zeta = D_s - 2$ ,  $D_s$  为非饱和土孔隙分布的分维数。

李培勇等<sup>[23]</sup>针对非饱和土总粘聚力与基质吸力的非线性关系建议的具有非线性系数  $a_3$  的幂函数抗剪强度公式为

$$\tau_f = (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + c' \left[ 1 + \frac{u_a - u_w}{c' / \tan(\varphi')} \right]^{1/a_3} \quad (20)$$

Tekinsoy 等<sup>[24]</sup>和 Kayadelen 等<sup>[25]</sup>建议的对数抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + \tan(\varphi') \cdot \\ & [(u_a - u_w)_b + p_{at}] \ln \frac{u_a - u_w + p_{at}}{p_{at}} \\ c_s &= \tan(\varphi') [(u_a - u_w)_b + p_{at}] \cdot \\ & \ln \frac{u_a - u_w + p_{at}}{p_{at}} \end{aligned} \right\} (21)$$

马少坤等<sup>[26]</sup>针对 Tekinsoy 对数抗剪强度公式

在高基质吸力时预测值偏高, 提出的修正对数抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + b_3 \tan(\varphi') \cdot \\ & [(u_a - u_w)_b + p_{at}] \ln \frac{u_a - u_w + p_{at}}{p_{at}} \\ c_s &= b_3 \tan(\varphi') [(u_a - u_w)_b + p_{at}] \cdot \\ & \ln \frac{u_a - u_w + p_{at}}{p_{at}} \\ b_3 &= 1 - \ln(1 + \frac{u_a - u_w}{c_3}) / \ln(1 + \frac{10^7}{c_3}) \end{aligned} \right\} (22)$$

式中:  $c_3$  为与残余含水量所对应的基质吸力相关参数, 对于粘性土, 取  $c_3 = 1500$  kPa; 对于砂土、粉土、片石或其混合物,  $c_3 = 200$  kPa。

### 2.3 分段抗剪强度公式

非饱和土分段抗剪强度公式一般是在 Fredlund 双应力状态变量抗剪强度公式的基础上, 以非饱和土的进气值  $(u_a - u_w)_b$  为界, 将抗剪强度公式分成 2 段, 第 1 段一般假设角  $\varphi^b = \varphi'$ , 第 2 段角  $\varphi^b$  按非线性规律减小。

Rassam 等<sup>[27]</sup>考虑净法向应力  $(\sigma - u_a)$  对吸附强度  $c_s$  的影响, 提出的分段吸附强度公式为

$$c_s = \begin{cases} (u_a - u_w) \tan(\varphi') \\ u_a - u_w \leq (u_a - u_w)_b \\ (u_a - u_w) \tan(\varphi') - [u_a - u_w - \\ (u_a - u_w)_b]^{\lambda_1} [\lambda_2 + \lambda_3 (\sigma - u_a)] \\ u_a - u_w > (u_a - u_w)_b \end{cases} \quad (23)$$

式中:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  均为拟合参数。

式(23)中的非饱和土的进气值  $(u_a - u_w)_b$  不再认为是一个固定值, 而设为净法向应力  $(\sigma - u_a)$  的一次函数关系, 即

$$(u_a - u_w)_b = d_0 + d_3 (\sigma - u_a)$$

式中:  $d_0, d_3$  均为拟合参数。

Lee 等<sup>[28]</sup>按照 Rassam 和 Williams 的思路, 结合土-水特征曲线并考虑净法向应力对吸附强度的影响, 提出的分段吸附强度公式为

$$c_s = \begin{cases} (u_a - u_w) \tan(\varphi') \\ u_a - u_w \leq (u_a - u_w)_b \\ (u_a - u_w)_b \tan(\varphi') + [u_a - u_w - \\ (u_a - u_w)_b]^{\lambda_4} [1 + \lambda_5 (\sigma - u_a)] \\ u_a - u_w > (u_a - u_w)_b \end{cases} \quad (24)$$

式中:  $\lambda_4, \lambda_5$  均为拟合参数。

Houston 等<sup>[29]</sup>将高基质吸力下角  $\varphi^b$  用双曲线关系拟合, 提出的分段吸附强度公式为

$$c_s = \begin{cases} (u_a - u_w) \tan(\varphi') & u_a - u_w \leq (u_a - u_w)_b \\ (u_a - u_w) \tan[\varphi' - \\ \frac{u_a - u_w - (u_a - u_w)_b}{\lambda_m + \lambda_n [u_a - u_w - (u_a - u_w)_b]}] & \\ u_a - u_w > (u_a - u_w)_b \end{cases} \quad (25)$$

式中： $\lambda_m, \lambda_n$  均为拟合参数，其物理意义分别为式(25)线性化后的截距和斜率。

Zhou 等<sup>[30]</sup>提出的分段吸附强度公式为

$$c_s = \begin{cases} (u_a - u_w) \tan(\varphi') & u_a - u_w \leq (u_a - u_w)_b \\ (u_a - u_w) \tan(\varphi') \left[ \frac{(u_a - u_w)_{sb} +}{u_a - u_w} + \right. \\ \left. \frac{(u_a - u_w)_{sb} + 1}{u_a - u_w} \ln \frac{u_a - u_w + 1}{(u_a - u_w)_{sb} + 1} \right] & \\ u_a - u_w > (u_a - u_w)_b \end{cases} \quad (26)$$

式中： $(u_a - u_w)_{sb}$  为非饱和土的饱和基质吸力，与进气值  $(u_a - u_w)_b$  稍有不同。

## 2.4 总应力抗剪强度公式

以上3类非饱和土抗剪强度公式中都包含有基质吸力，因基质吸力量测困难，费时费力，难以迅速便捷地指导工程实践。有学者以总应力强度指标来表示非饱和土的抗剪强度，其公式形式类似饱和土的抗剪强度公式，将总应力抗剪强度指标和容易量测的重力含水量  $w$  或饱和度  $S$  建立函数关系，为实际工程应用提供了一种新途径。

缪林昌等<sup>[31]</sup>提出的膨胀土总应力强度指标与重力含水量  $w$  的幂函数拟合关系式为

$$\left. \begin{aligned} c &= 10^{k_2 w} k_1 \\ \varphi &= 10^{k_4 w} k_3 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中： $k_1, k_2, k_3, k_4$  均为拟合参数，可对式(27)等号两边取对数后，直线拟合得到。

杨和平等<sup>[32-33]</sup>结合常规直剪试验，提出的宁明原状膨胀土的总应力强度指标与饱和度  $S$  的拟合关系式为

$$\left. \begin{aligned} c &= k_5 S^2 - k_6 S + k_7 \\ \varphi &= -k_8 S + k_9 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中： $k_5, k_6, k_7, k_8, k_9$  均为拟合参数。

式(28)中粘聚力  $c$  采用二次函数，内摩擦角  $\varphi$  采用一次函数，饱和度的变化对粘聚力的影响要比对内摩擦角的影响大。

凌华等<sup>[34]</sup>在改进的普通三轴仪上进行常含水量试验，引进重力含水量  $w$ ，建立的非饱和土总应力强度指标公式为

$$\left. \begin{aligned} c &= c_{50} + k_{10} (w - w_{50}) \\ \varphi &= \varphi_{50} + k_{11} (w - w_{50}) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式中： $k_{10}, k_{11}$  均为拟合参数； $w_{50}$  为饱和度恰好为

50%时的重力含水量； $c_{50}, \varphi_{50}$  分别为饱和度恰好为50%时的粘聚力和内摩擦角。

式(29)中的粘聚力  $c$  和内摩擦角  $\varphi$  与重力含水量  $w$  的关系均为一次函数，只适用于某一较小的饱和度范围，不能延伸至饱和阶段，同时饱和度较小时，式(29)会使  $c$  和  $\varphi$  变得非常大。

马少坤等<sup>[35]</sup>提出的不排水条件下的总应力强度指标，在一定程度上克服了式(29)的不足，其表达式为

$$\left. \begin{aligned} c &= c' \exp[k_{12} (1 - S^{k_{13}})] \\ \varphi &= \varphi' + k_{14} \ln[(S^2 + 1)/2] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式中： $k_{12}, k_{13}, k_{14}$  均为拟合参数。

另外，肖治宇等<sup>[36]</sup>依据残坡积土的普通三轴仪强度试验，得出粘聚力  $c$  随含水量  $w$  的增加呈指数衰减，内摩擦角  $\varphi$  随含水量  $w$  的增加呈线性减小；罗军等<sup>[37]</sup>针对非饱和粉土的直剪试验，拟合粘聚力  $c$  与含水量  $w$  的关系为二次曲线，内摩擦角  $\varphi$  与含水量  $w$  的关系为幂函数；边佳敏等<sup>[38]</sup>提出粘聚力  $c$  与含水量  $w$  呈二次曲线关系，内摩擦角  $\varphi$  与含水量  $w$  呈线性关系。王中文等<sup>[39]</sup>得出红粘土的粘聚力  $c$  随含水量  $w$  的增加呈1阶指数衰减，内摩擦角  $\varphi$  随含水量  $w$  的增加呈分段函数关系。

## 2.5 其他抗剪强度公式

除了以上4类有众多相关研究且目标明确的非饱和土抗剪强度公式外，有学者还结合某类非饱和土的特性<sup>[40-41]</sup>、统一强度理论<sup>[42-44]</sup>或其他吸力概念<sup>[45-48]</sup>，建立了不同于前4类的非饱和土抗剪强度理论及公式。

卢肇钧等提出的用膨胀力  $p_s$  表示的非饱和膨胀土抗剪强度公式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c' + (\sigma - u_a) \tan(\varphi') + k_{15} p_s \tan(\varphi') \\ c_s &= k_{15} p_s \tan(\varphi') \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

式中： $k_{15}$  为膨胀力的有效作用系数。

最近笔者将统一强度理论和 Fredlund 双应力状态变量相结合，利用类比方法建立了非饱和土抗剪强度统一解，并将其用于平面应变条件下非饱和土的侧向土压力、地基极限承载力和临界荷载等的计算。具体表达式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c'_t + (\sigma - u_a) \tan(\varphi'_t) + (u_a - u_w) \tan(\varphi_t^b) \\ c_{st} &= (u_a - u_w) \tan(\varphi_t^b) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(\varphi'_t) &= \frac{b(1-m) + (2+b+bm) \sin(\varphi')}{2+b(1+\sin(\varphi'))} \\ \sin(\varphi_t^b) &= \frac{2(1+b) \sin(\varphi^b)}{2+b(1+\sin(\varphi^b))} \\ c'_t &= \frac{2(1+b)c' \cos(\varphi')}{2+b(1+\sin(\varphi')) \cos(\varphi'_t)} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

式中: $c'_i$  为统一有效粘聚力; $\varphi'_i$  为统一有效内摩擦角; $\varphi_i^b$  为与基质吸力相关的统一角; $c_{st}$  为非饱和土的统一吸附强度; $m$  为中间主应力系数,反映中间主应力  $\sigma_2$  与第一主应力  $\sigma_1$ 、第三主应力  $\sigma_3$  之间的大小关系,可根据所处应力状态取值, $0 \leq m < 2$ ;  $b$  为统一强度理论参数,反映  $\sigma_2$  对材料屈服或破坏的影响程度,可通过材料强度指标确定, $0 \leq b \leq 1$ 。

参数  $m$  和  $b$  分别从中间主应力的大小和对材料屈服或破坏的影响程度 2 个不同方面,来反映中间主应力效应。

还有学者建议采用折减吸力、广义吸力、等效吸力等代替基质吸力,来推进非饱和土理论的实用化进程。汤连生通过对粒间吸力分类,建立了非饱和土抗剪强度公式,但涉及多个无法量测和确定的物理量,难以被工程实践所采用。

以上仅是对现有非饱和土抗剪强度代表性公式的一个大致分类,主要依据的是公式的形式、特点、实现方法和目的,各类之间亦存在相互交叉的情况。

### 3 抗剪强度公式的特点及不足

#### 3.1 抗剪强度公式的特点

通过对当前非饱和土抗剪强度代表性公式的分类及分析,得出非饱和土抗剪强度主要有以下特点:

(1) 非饱和土抗剪强度由有效粘聚力、净法向应力引起的抗剪强度以及基质吸力引起的吸附强度 3 个部分所组成,与饱和土的区别主要在于因基质吸力而产生的吸附强度。

(2) 抗剪强度公式的差异主要表现在吸附强度公式的不同,进而导致抗剪强度公式的多样化,同时也表明当前非饱和土抗剪强度研究的广泛性和差异性。

(3) 现有的非饱和土抗剪强度公式多是基于 Mohr-Coulomb 强度理论建立的,但 Mohr-Coulomb 强度理论因未考虑中间主应力的影响而过于保守,不能充分发挥非饱和土的强度潜能和自承载能力。

(4) 对吸附强度随基质吸力非线性变化的研究越来越深入,不管是结合土-水特征曲线,还是采用某种数学函数拟合,或者分段表示吸附强度,其实都是为了更好地表达非饱和土的强度非线性特征。

(5) 考虑的因素逐渐增多,如净法向应力对非饱和土进气值或吸附强度的影响,土体膨胀性或中间主应力对抗剪强度的影响等,这表明当前非饱和土研究的试验仪器、试验方法和量测精度都在不断地改进和提高。

(6) 非饱和土抗剪强度公式的实用化进程不断

推进,如总应力强度指标、膨胀力、广义吸力、折减吸力或结合土-水特征曲线等。国外比较注重非饱和土抗剪强度的试验和理论研究,中国则更注重非饱和土强度理论的实用化指标以及膨胀土、湿陷性黄土等特殊非饱和土的工程特性等研究。

#### 3.2 抗剪强度公式的不足

当前非饱和土抗剪强度的研究成果众多,但因非饱和土试验技术难度及非饱和土种类繁多,很多研究未能大量开展,还存在很多不足:

(1) 抗剪强度公式中的参数较多,有的甚至多达 4 个,这需要大量非饱和土试验结果的支持,才能得出较合理的拟合精度,影响了非饱和土强度理论的工程应用。

(2) 抗剪强度公式多样化的原因在于研究者多是针对自己的试验结果和新的发现来建立和推演,进而部分验证公式的合理性,这样得到的抗剪强度公式仅适用于试验的特定土或某几种土,难以进行推广应用。

(3) 现有抗剪强度公式主要针对非饱和土在脱湿或干燥过程,基质吸力逐渐增大时的强度变化规律,因非饱和土在干、湿循环中存在“滞回”现象,应加强研究非饱和土在增湿过程中的强度变化及其与脱湿时强度间的差异,体现多次干湿循环以后的强度变化。

(4) 总应力强度指标虽然便于工程实际应用,但其理论基础差,当前研究也不够深入,多数只是根据少量试验建立了各自的公式,公式形式差异较大,有待更多的室内和现场试验结果的检验。

(5) 现有试验研究多是进行非饱和土常规三轴压缩试验,根据其试验结果确定非饱和土抗剪强度参数,进而应用到其他复杂应力状态。其实这种试验所得到的抗剪强度参数只是轴对称应力特定条件下的非饱和土强度参数,不能反映非饱和土的真实应力状态和强度特性。已有的非饱和土真三轴试验结果表明,中间主应力对非饱和土强度的影响显著<sup>[49-50]</sup>,应加强非饱和土的真三轴试验研究,为非饱和土的真实强度特性提供更多的试验支持。

(6) 需要结合饱和土强度参数及其吸附强度,采用更合理的强度理论,建立符合工程实际受力状况的非饱和土真三轴强度理论,完善非饱和土的理论基础。式(32)是将统一强度理论应用于非饱和土强度预测的成功典范,应更加注重与非饱和土真三轴试验结果的对比验证,加强其在实际非饱和土工程设计和施工中的推广应用。

## 4 结 语

(1) 单从非饱和土抗剪强度来看, Bishop 有效应力抗剪强度公式和 Fredlund 双应力状态变量抗剪强度公式的差别仅在于分别采用了有效应力参数  $\chi$  和角  $\varphi^b$  两种不同的参数形式,但在力学意义上却有着本质的不同,前者属于有效应力公式,后者属于双应力状态变量公式。

(2) 将非饱和土抗剪强度公式分为结合土-水特征曲线、数学拟合、分段函数、总应力指标及其他形式 5 类,由基质吸力产生的吸附强度表达式的不同,导致了非饱和土抗剪强度公式的多样性,这都是为了更好地表达非饱和土的强度非线性特征。

(3) 抗剪强度公式中的参数较多影响了非饱和土强度理论的工程应用,考虑的因素逐渐增多,表明当前非饱和土研究的试验仪器、试验方法和量测精度都在不断地改进和提高,同时其实用化进程也不断推进,但有待更多的室内和现场试验结果的检验。

(4) 应加强非饱和土的真三轴试验研究,为非饱和土的真实强度特性提供更多的试验支持。现有的非饱和土抗剪强度公式多是基于 Mohr-Coulomb 强度理论而建立的,既不能反映非饱和土的真实应力状态和强度特性,也不能充分发挥非饱和土的强度潜能和自承载能力。应采用更合理的强度理论,结合非饱和土常规三轴压缩试验,建立符合工程实际受力状况的非饱和土真三轴强度理论,完善非饱和土的理论基础,并加快非饱和土强度理论的工程实践与应用进程。

### 参考文献:

### References:

- [1] FREDLUND D G, 杨 宁. 非饱和土的力学性能与工程应用[J]. 岩土工程学报, 1991, 13(5): 24-35.  
FREDLUND D G, YANG Ning. The Mechanical Properties and Their Engineering Applications to Unsaturated Soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1991, 13(5): 24-35.
- [2] FREDLUND D G, RAHARDJO H. Soil Mechanics for Unsaturated Soils[M]. New York: Wiley-Interscience, 1993.
- [3] BISHOP A W, BLIGHT G E. Some Aspects of Effective Stress in Saturated and Partly Saturated Soils[J]. Geotechnique, 1963, 13(3): 177-197.
- [4] FREDLUND D G, MORGENSTEM N R, WIDGER R A. The Shear Strength of Unsaturated Soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1978, 15(3): 313-321.
- [5] LAMBORN M J. A Micromechanical Approach to Modeling Partly Saturated Soils[D]. College Station: Texas A & M University, 1986.
- [6] VANAPALLI S K, FREDLUND D G, PUFAHL D E, et al. Model for the Prediction of Shear Strength with Respect to Soil Suction[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1996, 33(3): 379-392.
- [7] GARVEN E A, VANAPALLI S K. Evaluation of Empirical Procedures for Predicting the Shear Strength of Unsaturated Soils[C]//ASCE. Proceedings of the 4th International Conference on Unsaturated Soils. Carefree: ASCE, 2006: 2570-2581.
- [8] OBERG A L, SALLFORS G. Determination of Shear Strength Parameters of Unsaturated Silt and Sands Based on the Water Retention Curve[J]. Geotechnical Testing Journal, 1997, 20(1): 40-48.
- [9] KHALILI N, KHABBAZ M H. A Unique Relationship for  $\chi$  for the Determination of the Shear Strength of Unsaturated Soils[J]. Geotechnique, 1998, 48(5): 681-687.
- [10] BAO C G, GONG B W, ZHAN L T. Properties of Unsaturated Soils and Slope Stability of Expansive Soil[C]//ASCE. Proceedings of the 2nd International Conference on Unsaturated Soils. Beijing: ASCE, 1998: 71-98.
- [11] HOSSAIN M A, YIN J H. Behavior of a Compacted Completely Decomposed Granite Soil from Suction Controlled Direct Shear Tests[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2010, 136(1): 189-198.
- [12] HOSSAIN M A, YIN J H. Shear Strength and Dilative Characteristics of an Unsaturated Compacted Completely Decomposed Granite Soil[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2010, 47(10): 1112-1126.
- [13] ESCARIO V, JUCA J. Strength and Deformation of Partly Saturated Soils[C]//BOLTON M D, LAU C K. Proceedings of the 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. New York: Taylor & Francis, 1989: 43-46.
- [14] ROHM S A, VILAR O M. Shear Strength of an Unsaturated Sandy Soil[C]//ASCE. Proceedings of the 1st International Conference on Unsaturated Soils. Paris: ASCE, 1995: 189-193.
- [15] 沈珠江. 当前非饱和土力学研究中的若干问题[C]//魏道焯, 顾尧章, 洪粤辉. 区域性土的岩土工程问题学术讨论会论文集. 南京: 原子能出版社, 1996: 1-9.  
SHEN Zhu-jiang. Present Study Issues in Unsaturated Soils[C]//WEI Dao-duo, GU Yao-zhang, HONG E-hui. Proceedings of Regional Geotechnical Problems

- Symposium, Nanjing: Atomic Energy Press, 1996: 1-9.
- [16] LEE S J, LEE S R, KIM Y S. An Approach to Estimate Unsaturated Shear Strength Using Artificial Neural Network and Hyperbolic Formulation [J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30(6): 489-503.
- [17] JIANG M J, LEROUEIL S, KONRAD J M. Insight into Shear Strength Functions of Unsaturated Granulates by DEM Analyses [J]. Computers and Geotechnics, 2004, 31(6): 473-489.
- [18] VILAR O M. A Simplified Procedure to Estimate the Shear Strength Envelope of Unsaturated Soils [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2006, 43(10): 1088-1095.
- [19] MIAO L C, YIN Z Z, LIU S Y. Empirical Function Representing the Shear Strength of Unsaturated Soils [J]. Geotechnical Testing Journal, 2001, 24(2): 220-223.
- [20] RASSAM D W, COOK F. Predicting the Shear Strength Envelope of Unsaturated Soils [J]. Geotechnical Testing Journal, 2002, 25(2): 215-220.
- [21] 党进谦, 李靖. 非饱和黄土的强度特征 [J]. 岩土工程学报, 1997, 19(2): 56-61.  
DANG Jin-qian, LI Jing. Strength Characteristics of Unsaturated Loess [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(2): 56-61.
- [22] XU Y F. Fractal Approach to Unsaturated Shear Strength [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2004, 130(3): 264-273.
- [23] 李培勇, 杨庆. 非饱和土抗剪强度的非线性分析 [J]. 大连交通大学学报, 2009, 30(1): 1-4.  
LI Pei-yong, YANG Qing. Study on Nonlinearity of Shear Strength of Unsaturated Soils [J]. Journal of Dalian Jiaotong University, 2009, 30(1): 1-4.
- [24] TEKINSOY M A, KAYADELAN C, KESKIN M S, et al. An Equation for Predicting Shear Strength Envelope with Respect to Matric Suction [J]. Computers and Geotechnics, 2004, 31(7): 589-593.
- [25] KAYADELEN C, TEKINSOY M A, TASKIRAN T. Influence of Matric Suction on Shear Strength Behavior of a Residual Clayey Soil [J]. Environmental Geology, 2007, 53(4): 891-901.
- [26] 马少坤, 黄茂松, 扈萍, 等. 吸力强度修正对数模型在地基承载力中的应用 [J]. 岩土力学, 2010, 31(6): 1853-1857, 1864.  
MA Shao-kun, HUANG Mao-song, HU Ping, et al. Application of Modified Logarithmic Model for Suction Strength to Bearing Capacity of Subsoil [J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(6): 1853-1857, 1864.
- [27] RASSAM D W, WILLIAMS D J. A Relationship Describing the Shear Strength of Unsaturated Soils [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, 36(2): 363-368.
- [28] LEE I M, SUNG S G, CHO G C. Effect of Stress State on the Unsaturated Shear Strength of a Weathered Granit [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2005, 42(2): 624-631.
- [29] HOUSTON S L, PEREZ-GARCIA N, HOUSTON W N. Shear Strength and Shear-induced Volume Change Behavior of Unsaturated Soils from a Triaxial Test Program [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2008, 134(11): 1619-1632.
- [30] ZHOU A N, SHENG D C. Yield Stress, Volume Change, and Shear Strength Behaviour of Unsaturated Soils: Validation of the SFG Model [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2009, 46(9): 1034-1045.
- [31] 缪林昌, 仲晓晨, 殷宗泽. 膨胀土的强度与含水量的关系 [J]. 岩土力学, 1999, 20(2): 71-75.  
MIAO Lin-chang, ZHONG Xiao-chen, YIN Zong-ze. The Relationship Between Strength and Water Content of Expansive Soil [J]. Rock and Soil Mechanics, 1999, 20(2): 71-75.
- [32] 杨和平, 张锐. 非饱和膨胀土总应力强度的确定方法及其应用 [J]. 长沙理工大学学报: 自然科学版, 2004, 1(2): 1-6.  
YANG He-ping, ZHANG Rui. Approach to Determine the Total Shear Strength of Unsaturated Expansive Soil and Its Application [J]. Journal of Changsha University of Science and Technology: Natural Science, 2004, 1(2): 1-6.
- [33] 杨和平, 张锐, 郑健龙. 非饱和膨胀土总强度指标饱和度变化规律 [J]. 土木工程学报, 2006, 39(4): 58-62.  
YANG He-ping, ZHANG Rui, ZHENG Jian-long. Variation of the Total Shear Strength of Unsaturated Expansive Soils with Degree of Saturation [J]. China Civil Engineering Journal, 2006, 39(4): 58-62.
- [34] 凌华, 殷宗泽. 非饱和土强度随含水量的变化 [J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(7): 1499-1503.  
LING Hua, YIN Zong-ze. Variation of Unsaturated Soil Strength with Water Contents [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(7): 1499-1503.
- [35] 马少坤, 黄茂松, 范秋雁. 基于饱和土总应力强度指标的非饱和土强度理论及其应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(3): 635-640.  
MA Shao-kun, HUANG Mao-song, FAN Qiu-yan. Unsaturated Soil Strength Theory Based on Total Stress Strength Indexes of Saturated Soil and Its Ap-

- lication[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(3): 635-640.
- [36] 肖治宇, 陈昌富, 杨剑祥. 非饱和和残坡积土强度随含水量变化试验研究[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2010, 37(10): 20-24.  
XIAO Zhi-yu, CHEN Chang-fu, YANG Jian-xiang. Experimental Studies of the Strength Variation of Unsaturated Residual Soil with Different Water Contents[J]. Journal of Hunan University: Natural Sciences, 2010, 37(10): 20-24.
- [37] 罗军, 王桂尧, 匡波. 含水量对粉土强度影响的试验研究[J]. 路基工程, 2010(1): 116-118.  
LUO Jun, WANG Gui-yao, KUANG Bo. Experimental Study on Influence of Water Content on Silt Strength[J]. Subgrade Engineering, 2010(1): 116-118.
- [38] 边佳敏, 王保田. 含水量对非饱和土抗剪强度影响研究[J]. 人民黄河, 2010, 32(11): 124-125.  
BIAN Jia-min, WANG Bao-tian. Influence of Water Content on Unsaturated Soil Shear Strength[J]. Yellow River, 2010, 32(11): 124-125.
- [39] 王中文, 洪宝宁, 刘鑫, 等. 红粘土抗剪强度的水敏性研究[J]. 四川大学学报: 工程科学版, 2011, 43(1): 17-22.  
WANG Zhong-wen, HONG Bao-ning, LIU Xin, et al. Water-sensitive Properties of Shear Strength of Red Clay[J]. Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition, 2011, 43(1): 17-22.
- [40] 卢肇钧, 张惠明, 陈建华, 等. 非饱和土的抗剪强度与膨胀压力[J]. 岩土工程学报, 1992, 14(3): 1-8.  
LU Zhao-jun, ZHANG Hui-ming, CHEN Jian-hua, et al. Shear Strength and Swelling Pressure of Unsaturated Soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1992, 14(3): 1-8.
- [41] 卢肇钧, 吴肖茗, 孙玉珍, 等. 膨胀力在非饱和土强度理论中的作用[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(5): 20-27.  
LU Zhao-jun, WU Xiao-ming, SUN Yu-zhen, et al. The Role of Swelling Pressure in the Shear Strength Theory of Unsaturated Soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(5): 20-27.
- [42] 张常光, 张庆贺, 赵均海. 非饱和土抗剪强度及土压力统一解[J]. 岩土力学, 2010, 31(6): 1871-1876.  
ZHANG Chang-guang, ZHANG Qing-he, ZHAO Jun-hai. Unified Solutions of Shear Strength and Earth Pressure for Unsaturated Soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(6): 1871-1876.
- [43] 张常光, 曾开华, 赵均海. 非饱和土临界荷载和太沙基极限承载力解析解[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2010, 38(12): 1736-1740.  
ZHANG Chang-guang, ZENG Kai-hua, ZHAO Jun-hai. Analytical Solutions of Critical Load and Terzaghi's Ultimate Bearing Capacity for Unsaturated Soil[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2010, 38(12): 1736-1740.
- [44] 张常光, 胡云世, 赵均海. 平面应变条件下非饱和土抗剪强度统一解及其应用[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(1): 32-37.  
ZHANG Chang-guang, HU Yun-shi, ZHAO Jun-hai. Unified Solution of Shear Strength for Unsaturated Soil Under Plane Strain Condition and Its Application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(1): 32-37.
- [45] 沈珠江. 非饱和土力学实用化之路探索[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(2): 256-259.  
SHEN Zhu-jiang. Exploitation of Practical Use of Unsaturated Soil Mechanics[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(2): 256-259.
- [46] 陈铁林, 陈生水, 章为民, 等. 折减吸力在非饱和土土压力和膨胀量计算中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(增2): 3341-3348.  
CHEN Tie-lin, CHEN Sheng-shui, ZHANG Wei-min, et al. Application of Reduced Suction to Earth Pressure Calculation of Unsaturated Soils and Swell Increment[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(S2): 3341-3348.
- [47] 胡再强, 刘兰兰, 李宏儒, 等. 非饱和黄土等效吸力的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(9): 1901-1906.  
HU Zai-qiang, LIU Lan-lan, LI Hong-ru, et al. Study of Equivalent Suction of Unsaturated Loess[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(9): 1901-1906.
- [48] 汤连生. 从粒间吸力特性再认识非饱和土抗剪强度理论[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 412-417.  
TANG Lian-sheng. New Suggestion on Shear Strength in Unsaturated Soil Based on Suction Between Grains[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(4): 412-417.
- [49] MATSUOKA H, SUN D A, KOGANE A, et al. Stress-strain Behaviour of Unsaturated Soil in True Triaxial Tests[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2002, 39(3): 608-619.
- [50] HOYOS L R, MACARI E J. Development of a Stress/Suction-controlled True Triaxial Testing Device for Unsaturated Soils[J]. Geotechnical Testing Journal, 2001, 24(1): 5-13.