

文章编号:1673-2049(2013)01-0013-06

随机地震动的概率密度演化

李 杰^{1,2}, 宋 萌¹

(1. 同济大学 建筑工程系, 上海 200092; 2. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

摘要:利用广义概率密度演化方程,研究了随机地震动加速度时程的时变概率密度分布。利用集集地震实测地震动记录建模,识别给出了Ⅱ类场地随机地震动物理模型的基本参数及其分布。引入空间伸缩变换和 Voronoi 准则,发展了多维概率空间剖分的实用算法,对比分析了随机地震动模型与真实地震动的概率密度函数。结果表明:随机地震动物理模型可以客观反映真实地震动加速度时程的精细概率结构。

关键词:随机地震动;数论方法;广义概率密度演化方程;Voronoi 准则;等效阻尼比

中图分类号:TU435

文献标志码:A

Probability Density Evolution of Stochastic Seismic Ground Motion

LI Jie^{1,2}, SONG Meng¹

(1. Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. State Key Laboratory for Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The time-varying probability density distribution of stochastic seismic ground motion acceleration time history was researched using generalized probability density evolution equation. Authors established a model by using actual acceleration records from Chi-Chi earthquake and identified basic parameters and their distributions in physical model of stochastic seismic ground motion from actual observation records in site class Ⅱ. Further, using the expansion-contraction transformation and Voronoi norm, authors developed a practical algorithm which realized the division of multi-dimension probability space. The probability density function of stochastic seismic ground motion model and actual acceleration records were compared and analyzed. The results show that the physical model of stochastic seismic ground motion can objectively reflect refined probability characteristic of actual seismic acceleration processes.

Key words: stochastic seismic ground motion; number theoretical method; generalized probability density evolution equation; Voronoi norm; equivalent damping ratio

0 引 言

地震动具有显著的随机性。经典随机振动理论将地震动抽象为平稳随机过程,并据此建立功率谱经验模型。在本质上,这类模型属于随机过程的二阶矩描述,难以反映地震动过程的丰富概率信息。

由此,也给结构地震反应分析预设了一系列难题,结构的非线性反应分析和可靠度评价即是其中 2 个与实际工程应用联系密切的问题。

为了克服经典模型的缺点,文献[1]中首次提出了地震动物理随机函数模型的概念,并以随机介质场地物理模型为基础,建立了地震动的随机 Fourier

收稿日期:2013-01-19

基金项目:国家自然科学基金创新研究群体基金项目(50621062)

作者简介:李 杰(1957-),男,河南开封人,教授,博士研究生导师,工学博士,E-mail:lijie@tongji.edu.cn。

谱模型。在此基础上,文献[2],[3]中进一步深入研究了地震动时程的随机累积相位谱。目前,文献[4],[5]中进一步考虑了震源物理机制和传播途径对地震动的影响,建立了地震动物理随机函数模型,并进行了基本随机变量的统计分析。

在上述研究基础上,本文中笔者试图利用概率密度演化理论^[6-8]研究地震动加速度时程的概率密度分布。首先利用集集地震中所收集到的地震动记录进行统计建模,进而运用广义概率密度演化方程,分析获得了随机地震动加速度的时变概率密度函数。通过对比模型预测地震动与真实地震动加速度记录的时变概率密度函数,验证了地震动物理随机函数模型的正确性。

1 地震动物理随机函数模型

考虑“震源-传播途径-局部场地”物理机制,文献[4]中提出了较为完善的工程地震动物理随机函数模型,其具体表达式为

$$a_R(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_R(\xi, \eta, \omega) \cdot \cos[\omega t + \Phi_R(\xi, \eta, \omega)] d\omega \quad (1)$$

$$A_R(\xi, \eta, \omega) = \frac{A_0 \omega e^{-K\omega R}}{\sqrt{\omega^2 + (1/\tau)^2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 4\xi_g^2(\omega/\omega_g)^2}{[1 - (\omega/\omega_g)^2]^2 + 4\xi_g^2(\omega/\omega_g)^2}} \quad (2)$$

$$\Phi_R(\xi, \eta, \omega) = \arctan\left(\frac{1}{\tau\omega}\right) - R d \ln[(a' + 0.5)\omega + b + \frac{1}{4c} \sin(2c\omega)] \quad (3)$$

式中: $a_R(t)$ 为地震动加速度时程; t 为时间; ω 为角频率; A_0 为震源幅值系数; τ 为 Brune 震源系数; ξ_g 为场地等效阻尼比; ω_g 为场地等效卓越角频率; $A_R(\xi, \eta, \omega)$, $\Phi_R(\xi, \eta, \omega)$ 分别为 Fourier 幅值谱和 Fourier 相位谱, ξ 为随机参数向量,考虑到物理背景的可控性,取 $\xi = (A_0, \tau, \xi_g, \omega_g)$; η 为确定性向量,取 $\eta = (K, a', b, c, d)$,用其反映传播途径的平均影响, K 为传播衰减系数,通常取经验值为 $1 \times 10^{-5} \text{ s} \cdot \text{km}^{-1}$; a', b, c, d 均为地震波传播波数-频率关系函数中的经验系数^[9-10],分别取经验系数 $a' = 1.02$, $b = 403 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $c = 1.89 \text{ s} \cdot \text{rad}^{-1}$, $d = 0.13 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$; R 为震中距。

随机参数向量 ξ 的概率分布可以由实际地震动记录识别给出。为此,利用太平洋地震工程研究中心(PEER)的强震记录数据库,收集整理了集集地震动记录 573 条(余震,最大震级 Ms5.9)。由于这

些地震动记录中关于场地的分类指标仅提供了台站场地地表下 30 m 处的等效剪切波速 V_{s30} ,故根据文献[11]中的建议,将收集到的地震动记录按照《建筑抗震设计规范》(GB 50011—2010)中规定的场地类型进行分类,分类结果如表 1 所示。

表 1 集集地震动信息统计

Tab. 1 Information Statistics of Chi-Chi Earthquake

场地类型	$V_{s30}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	地震动数目
I 类	>550	98
II 类	$265 \sim 550$	343
III 类	$165 \sim 265$	126
IV 类	<165	6
总计		573

选取 II 类场地的地震动记录进行基本随机参数识别。先将地震动记录峰值归一化为 $0.1g$ (g 为重力加速度),再利用 Fourier 变换给出各样本地震动的 Fourier 幅值谱。图 1 为 1 条实测地震动加速度时程记录,图 2 为实测地震动的 Fourier 幅值谱。

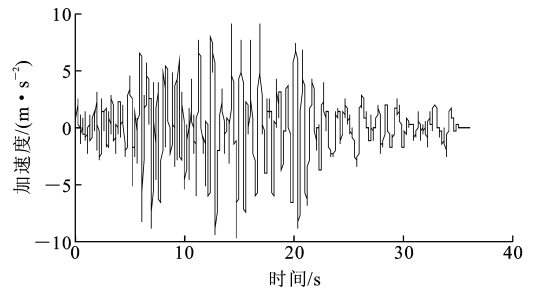


图 1 集集地震动的加速度时程曲线

Fig. 1 Acceleration Time History Curve of Chi-Chi Seismic Ground Motion

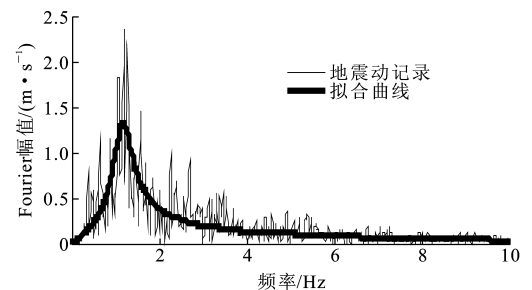


图 2 集集地震动的 Fourier 幅值谱拟合曲线

Fig. 2 Fourier Amplitude Spectrum Fitting Curve of Chi-Chi Seismic Ground Motion

记样本观测值为 $\tilde{f}(\omega)$,模型 Fourier 幅值谱为 $f(\xi, \omega)$,则利用下述识别准则

$$J = \min \sum [\tilde{f}(\omega) - f(\xi, \omega)]^2 \quad (4)$$

由式(4)可以识别出每条地震动所对应的样本实现值 $\xi = (A_0, \tau, \xi_g, \omega_g)$ 。

由于上述物理随机变量是相互独立的,故可依据上述参数识别结果(共 343 组)分别对随机参数进行直方图统计。研究表明,震源幅值系数 A_0 和 Brune 震源系数 τ 满足对数正态分布,即

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x\geqslant 0 \quad (5)$$

式中: μ,σ 分别为对应正态分布的均值和标准差。

场地等效阻尼比 ξ_g 和场地等效卓越角频率 ω_g 满足伽马分布,即

$$m(x)=\frac{1}{\gamma^\eta\Gamma(\eta)}x^{\eta-1}e^{-x/\gamma} \quad x\geqslant 0 \quad (6)$$

式中: η 为形状参数; γ 为尺度参数的倒数。

对数正态分布和伽马分布的统计参数如表 2 所示。图 3~6 中给出了上述分布与直方图统计的对比结果。

表 2 物理随机变量概率分布函数参数

Tab. 2 Parameters for Probability Density Distribution Function of Physical Random Variables

参数	分布类型	μ	σ	η	γ
A_0	对数正态分布	-1.163 3	0.631 1		
τ	对数正态分布	-1.553 1	1.066 5		
ξ_g	伽马分布			8.855 3	0.042 1
ω_g	伽马分布			3.308 0	3.904 3

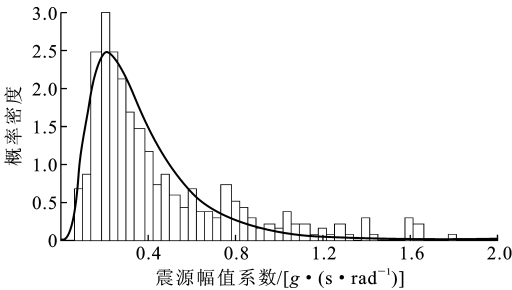


图 3 震源幅值系数 A_0 的统计结果

Fig. 3 Statistical Results of Source Amplitude Coefficient A_0

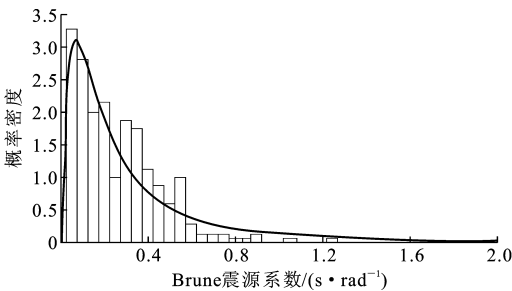


图 4 Brune 震源系数 τ 的统计结果

Fig. 4 Statistical Results of Source Coefficient τ in Brune Model

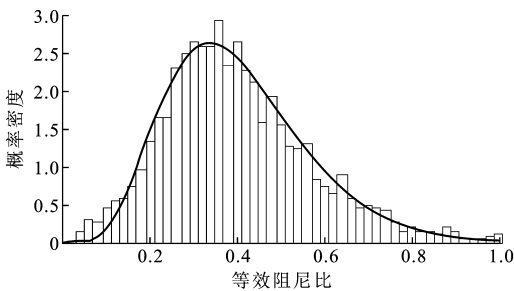


图 5 场地等效阻尼比 ξ_g 的统计结果

Fig. 5 Statistical Results of Equivalent Damping Ratio ξ_g

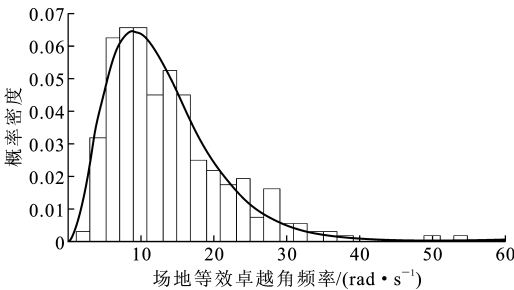


图 6 场地等效卓越角频率 ω_g 的统计结果

Fig. 6 Statistical Results of Equivalent Predominant Circular Frequency ω_g

2 概率密度演化方程

基于随机动力系统的概率守恒与密度演化思想,可以获得地震动加速度时程的概率密度函数及其演化过程。为此,引入如下广义概率密度演化方程,即

$$\frac{\partial p_{A\Theta}(a,\theta,t)}{\partial t} + \dot{\gamma}(\theta,t) \frac{\partial p_{A\Theta}(a,\theta,t)}{\partial a} = 0 \quad (7)$$

式中: $p_{A\Theta}(a,\theta,t)$ 为 $(A(t),\Theta)$ 的联合概率密度函数, $A(t)$ 为地震动随机过程, Θ 为随机参数向量, $\Theta = \xi = (A_0,\tau,\xi_g,\omega_g)$, a,θ 分别为 $A(t)$ 和 Θ 对应的样本空间自变量; $\gamma(\theta,t)$ 为代表点 θ 所对应的 t 时刻的地震动加速度实现值。

式(7)的初始条件为

$$p_{A\Theta}(a,\theta,t_0) = \delta(a-a_0) p_{\Theta}(\theta) \quad (8)$$

式中: $p_{\Theta}(\theta)$ 为 $\Theta = (A_0,\tau,\xi_g,\omega_g)$ 的联合概率密度函数; a_0 为确定性初始值; δ 为狄拉克函数。

在求解式(7),(8)后,可进一步获得 $A(t)$ 的时变概率密度函数 $p_A(a,t)$,即

$$p_A(a,t) = \int_{\Omega_{\Theta}} p_{A\Theta}(a,\theta,t) d\theta \quad (9)$$

式中: Ω_{Θ} 为 Θ 的分布空间。

3 概率空间剖分与赋得概率计算

在上述问题的求解中,首先需要对四维概率空

间进行剖分,并选取代表点,本文中采用数论方法^[12]进行这一工作。

利用数论中四维格点点集表^[13],在单位超立方体 $[0,1]^4$ 内生成功均匀散布的点,记作 $\tilde{\theta}(\tilde{\theta}_{1,k},\tilde{\theta}_{2,k},\tilde{\theta}_{3,k},\tilde{\theta}_{4,k}),k=1,2,\dots,n,n$ 为点的个数。

将代表点压缩进单位超立方体内,通过伸缩函数 $g(\cdot)$ 进行伸缩变换。伸缩函数的表达式为

$$g(r)=\begin{cases} \phi r^m + \varphi & m \geq 0, m \in \mathbf{Z} \\ \beta & r \rightarrow 0 \\ 1 & r \rightarrow \rho \end{cases} \quad (10)$$

式中: ρ 为半径覆盖域; r 为代表点到中心点的距离,中心点为原中心点(4个概率密度分布函数峰值点所对应的横坐标)经尺度变换到单位超立方体后峰值所对应的点; β 为中心点的压缩率; ϕ, φ 均为参数,可通过 m, ρ, β 值确定。

利用式(10),半径覆盖域 ρ 以内的点会向中心点集中压缩移动。半径覆盖域 ρ 以外的点会远离中心点向外扩张移动。 $g(\cdot)$ 的形式是根据概率累计分布函数 F 偏差的效果来确定的,在本文中, $m=2, \rho=1, \beta=0.5$ 。记 n_{pt} 为最终代表点个数,通过伸缩变换和尺度变换,可以得到代表点的最终位置,即 $n_{pt}=283$ 。

每个代表点有其固定的 Voronoi 区域。为计算各代表点的 Voronoi 体积和赋得概率,可采用下述方法。

(1)计算所有 Voronoi 区域外接圆直径的最大值,即

$$r_{cv} = \sup_{x \in R^4} [\inf_{\theta_q \in P} (\|x - \theta_q\|)] \quad (11)$$

式中: r_{cv} 为覆盖半径; R^4 为四维随机变量的分布空间; x 为 R^4 中的任意点; θ_q 为代表点; P 为代表点 θ_q 的集合。

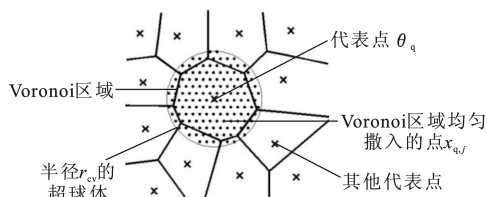


图7 利用 Voronoi 区域计算代表点的二维示意

Fig. 7 Two-dimensional Diagram for Voronoi Cell of Representative Points

以代表点 θ_q 为球心,以 r_{cv} 为半径做超球体,超球体体积记作 $v_0(v_0 = \frac{1}{2}\pi^2 r_{cv}^4)$ 。在超球体内均匀撒入 n_1 个测试点 $x_{q,j}(j=1,2,\dots,n_1)$,本文中建议测

试点个数为 10^6 量级。计算 $x_{q,j}(j=1,2,\dots,n_1)$ 与每个代表点的距离,若测试点 $x_{q,k}(j=k)$ 满足

$$\|x_{q,k} - \theta_q\| \leq \|x_{q,k} - \theta_m\| \quad m=1,2,\dots,n_{pt} \quad (12)$$

式中: θ_m 为已确定的代表点的位置。

则 $x_{q,k}$ 属于 θ_q 的 Voronoi 区域。设 v_q 为代表点 θ_q 的 Voronoi 体积,将 $x_{q,j}(j=1,2,\dots,n_1)$ 中属于 θ_q 的 Voronoi 区域的点数记作 n_2 ,则 $v_q = \frac{n_2}{n_1}v_0$ 。

(2)将属于 θ_q 的 Voronoi 区域的点 $\theta_{q,k}(k=1,2,\dots,n_2)$ 收集起来,则代表点 θ_q 的赋得概率 p_q 为

$$p_q = \sum_{k=1}^{n_2} p_{\theta}(\theta_{q,k}) v_{q,k} \quad (13)$$

$$v_{q,k} = \frac{v_q}{n_2} \quad k=1,2,\dots,n_2 \quad (14)$$

式中: $p_{\theta}(\theta_{q,k})$ 为点 $\theta_{q,k}$ 处的概率密度; $v_{q,k}$ 为点 $\theta_{q,k}$ 的 Voronoi 体积。

(3)将所有代表点的概率进行归一化处理^[14],可得到

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p}_q &= \frac{p_q}{P} \quad q=1,2,\dots,n_{pt} \\ P &= \sum_{q=1}^{n_{pt}} p_q \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中: P 为概率总和。

通过式(15)可以较为精确地求出每个代表点所赋得的概率 \tilde{p}_q 。

4 概率密度演化

利用式(1)与波群叠加法^[15],由代表点生成地震动加速度时程,可求解广义概率密度演化方程式(7)~(9),进而求得地震动加速度时程的时变概率密度函数。图8为上述随机地震动模型的概率密度演化过程,图9为典型时刻的概率密度分布情况,由此可见,随机地震动在不同时刻的概率密度分布表现出明显的差异。

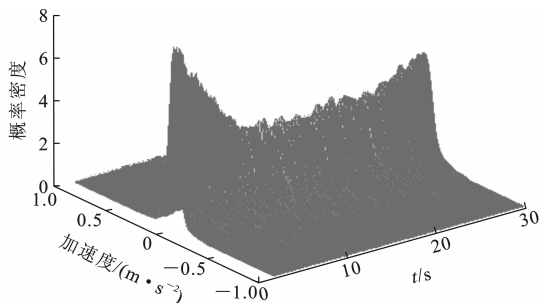


图8 随机地震动的概率密度演化

Fig. 8 Probability Density Evolution of Stochastic Earthquake Ground Motion

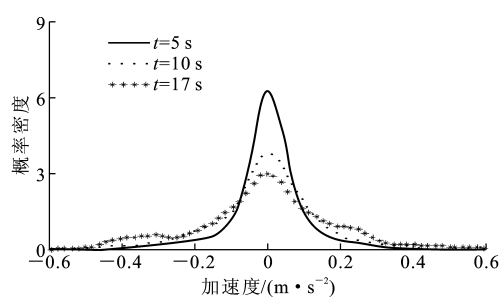


图 9 $t=5,10,17$ s 的概率密度演化
Fig. 9 Evolution of Probability Density
When $t=5,10,17$ s

上述地震动概率密度演化过程分析的正确性可以由实测地震动的统计结果加以验证。为此,分别统计集集地震Ⅱ类场地上 343 条实测地震动记录在

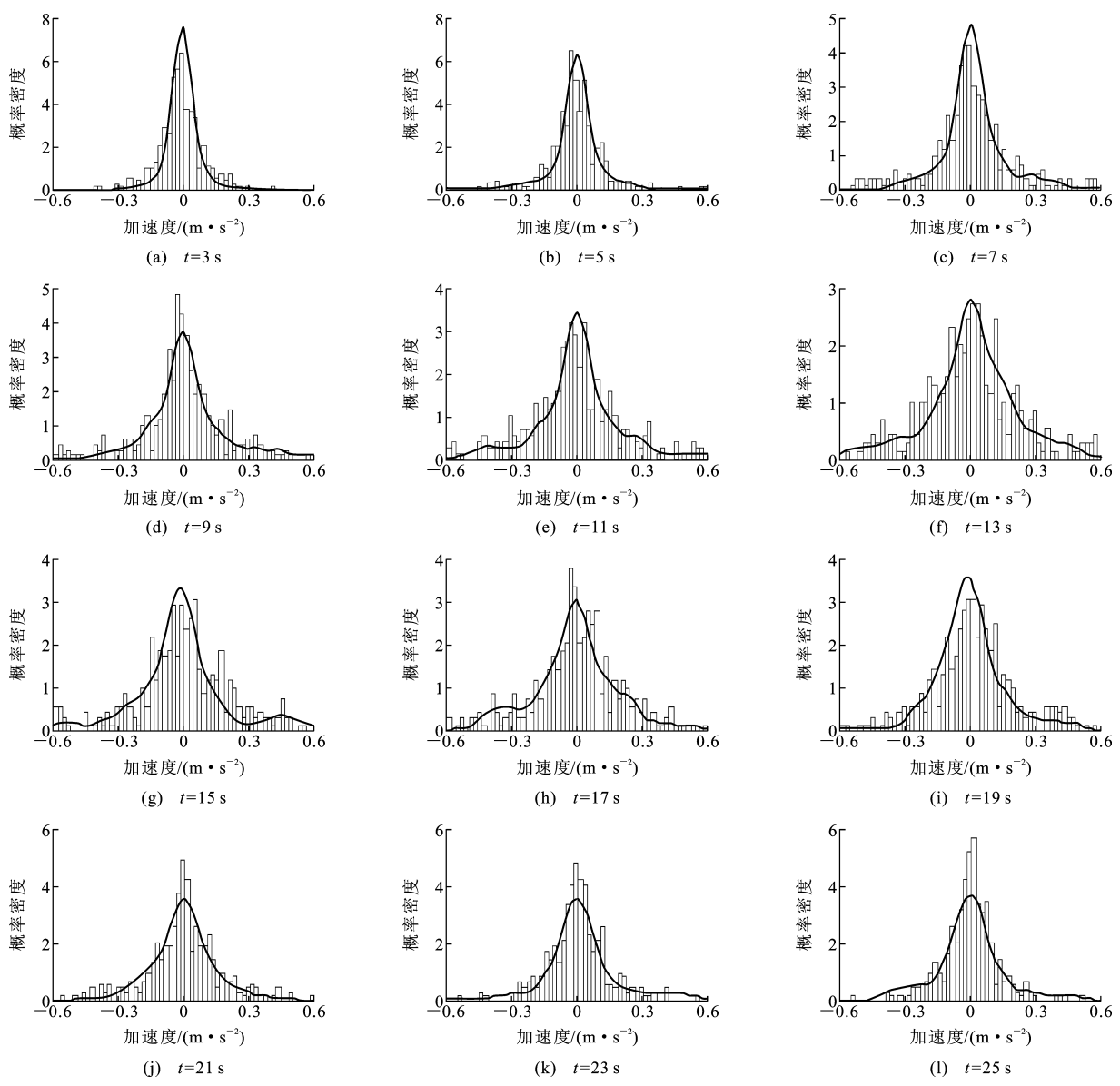


图 10 典型时刻的概率密度分布的对比

Fig. 10 Comparisons of Probability Density Distributions at Typical Time

不同记录时刻的直方图,并与本文中的理论预测结果加以比较,结果见图 10。

由此可见,典型时刻概率密度分布的理论预测结果均与实测地震动记录吻合,从而验证了地震动物理随机函数模型的正确性,进一步验证了基于物理机制考察随机系统思想的正确性。

5 结 语

(1)采用数论选点法,通过空间伸缩变换和 Voronoi 准则,可以合理地进行地震动物理随机函数中基本随机变量的概率空间剖分。笔者所建议的方法在多维随机变量空间剖分计算中具有普适性。

(2)结合地震动物理随机函数模型与广义概率

密度演化方程,可以得到随机地震动的时变概率分布,从而可以精细地反映地震动的概率结构,为进一步应用于工程结构的非线性随机地震响应分析与可靠度评价奠定了基础。

参考文献:

References:

- [1] 李 杰,艾晓秋.基于物理的随机地震动模型研究[J].地震工程与工程振动,2006,26(5):21-26.
LI Jie, AI Xiao-qiu. Study on Random Model of Earthquake Ground Motion Based on Physical Process[J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2006, 26(5): 21-26.
- [2] 安自辉,李 杰.地震动随机函数模型研究(Ⅰ)——模型建立[J].地震工程与工程振动,2009,29(5):36-45.
AN Zi-hui, LI Jie. Research on Random Function Model of Strong Ground Motion (Ⅰ): Model Constructing[J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2009, 29(5): 36-45.
- [3] 安自辉,李 杰.地震动随机函数模型研究(Ⅱ)——参数统计与模型验证[J].地震工程与工程振动,2009,29(6):40-47.
AN Zi-hui, LI Jie. Research on Random Function Model of Strong Ground Motion (Ⅱ): Parametric Statistic and Model Certification[J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2009, 29(6): 40-47.
- [4] 王 鼎,李 杰.工程地震动的物理随机函数模型[J].中国科学:技术科学,2011,41(3):356-364.
WANG Ding, LI Jie. Physical Random Function Model of Ground Motions for Engineering Purposes[J]. Scientia Sinica Technologica, 2011, 41(3): 356-364.
- [5] 王 鼎,李 杰.工程场地地震动随机场的物理模型[J].中国科学:技术科学,2012,42(7):798-807.
WANG Ding, LI Jie. A Random Physical Model of Seismic Ground Motion Field on Local Engineering Site[J]. Scientia Sinica Technologica, 2012, 42(7): 798-807.
- [6] LI Jie, CHEN Jian-bing. Stochastic Dynamics of Structures[M]. Singapore, John Wiley & Sons, 2009.
- [7] 李 杰,陈建兵.随机动力系统下的概率密度演化方程及其研究进展[J].力学进展,2010,40(2):170-188.
LI Jie, CHEN Jian-bing. Advances in the Research on Probability Density Evolution Equations of Stochastic Dynamical Systems[J]. Advances in Mechanics, 2010, 40(2): 170-188.
- [8] 李 杰,陈建兵.随机结构动力反应分析的概率密度演化方法[J].力学学报,2003,35(4):437-442.
LI Jie, CHEN Jian-bing. Probability Density Evolution Method for Analysis of Stochastic Structural Dynamic Response[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 35(4): 437-442.
- [9] WONG H L, TRIFUNAC M D. Generation of Artificial Strong Motion Accelerograms[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1979, 7(6): 509-527.
- [10] DZIEWONSKI A M, ANDERSON D L. Preliminary Reference Earth Model[J]. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 1981, 25: 297-356.
- [11] 郭 锋,吴东明,许国富,等.中外抗震设计规范场地分类对应关系[J].土木工程与管理学报,2011,28(2):63-66.
GUO Feng, WU Dong-ming, XU Guo-fu, et al. Site Classification Corresponding Relationship Between Chinese and the Overseas Seismic Design Codes[J]. Journal of Civil Engineering and Management, 2011, 28(2): 63-66.
- [12] 陈建兵,李 杰.结构随机响应概率密度演化分析的数论选点法[J].力学学报,2006,38(1):134-140.
CHEN Jian-bing, LI Jie. Strategy of Selecting Points via Number Theoretical Method in Probability Density Evolution Analysis of Stochastic Response of Structures[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2006, 38(1): 134-140.
- [13] 华罗庚,王 元.数论在近似分析中的应用[M].北京:科学出版社,1978.
HUA Luo-geng, WANG Yuan. Applications of Number Theory to Numerical Analysis[M]. Beijing: Science Press, 1978.
- [14] 方开泰,王 元.数论方法在统计中的应用[M].北京:科学出版社,1996.
FANG Kai-tai, WANG Yuan. Number-theoretic Methods in Statistics [M]. Beijing: Science Press, 1996.
- [15] 廖振鹏.工程波动理论导论[M].北京:科学出版社,2002.
LIAO Zhen-peng. Introduction to Wave Motion Theories for Engineering[J]. Beijing: Science Press, 2002.

