

一量级的情况),位移对结构平衡方程的影响不能忽略,需要基于荷载态构形建立结构非线性平衡方程,且需要采用非线性求解方法来求解。桁架大位移问题非线性分析涉及以下 3 方面的问题:①用何变量作为结构非线性平衡方程的未知量;②采用何种方法建立结构非线性平衡方程;③利用何种方法求解结构非线性平衡方程。

结构非线性平衡方程的未知量常用的有 2 种:节点位移和节点坐标。传统上,人们通常取节点位移为未知量建立

根据矩阵微分理论, 方程式(8)中 $\frac{df(c)}{dc}$ 的求导结果为

$$\frac{df(c)}{dc} = \frac{EA}{(c^T I_{66} c)^{3/2}} I_{66} c c^T I_{66} + EA \left(\frac{1}{l_z} - \frac{1}{\sqrt{c^T I_{66} c}} \right) I_{66} \quad (9)$$

根据 Newton 切线法原理, 结构非线性平衡方程的线性逼近方程式为

$$F(C^{(k)}) = F(C^{(k-1)}) + F_C(C^{(k-1)}) \cdot (C^{(k)} - C^{(k-1)}) = 0 \quad (10)$$

根据节点坐标约束条件, C 可分为非约束节点坐标 C_f 和约束节点坐标 C_r 。设有一元素为 0 或 1 的正交变换矩阵 I_t 可完成以下变换

$$\begin{bmatrix} C_f \\ C_r \end{bmatrix} = I_t C \text{ 或 } C = I_t^T \begin{bmatrix} C_f \\ C_r \end{bmatrix} \quad (11)$$

将式(11)代入式(10), 然后方程两边再左乘 I_t , 有

$$I_t F(C^{(k-1)}) + I_t F_C(C^{(k-1)}) I_t^T \cdot \left(\begin{bmatrix} C_f \\ C_r \end{bmatrix}^{(k)} - \begin{bmatrix} C_f \\ C_r \end{bmatrix}^{(k-1)} \right) = 0 \quad (12)$$

令 $P = I_t F(C^{(k-1)})$, $K = I_t F_C(C^{(k-1)}) I_t^T$, 则式(12)可简写为

$$P + K \left(\begin{bmatrix} C_f \\ C_r \end{bmatrix}^{(k)} - \begin{bmatrix} C_f \\ C_r \end{bmatrix}^{(k-1)} \right) = 0 \quad (13)$$

对应 C_f 和 C_r 的分块, P 和 K 也进行相应分块, 对于约束节点坐标向量, 有 $C_r^{(k)} - C_r^{(k-1)} = 0$, 则式(13)可写为

$$\begin{bmatrix} P_f \\ P_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fr} \\ K_{rf} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_f^{(k)} - C_f^{(k-1)} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

按矩阵乘法展开式(14), 得到节点坐标向量的迭代公式为

$$C_f^{(k)} = C_f^{(k-1)} - (K_{ff})^{-1} P_f \quad (15)$$

3

一平面扁桁架及其节点、杆件编号与节点荷载 P 见图 1。扁桁架杆件截面均为圆形, 杆件截面直径见表 1, 弹性模量 $E=200$ GPa。扁桁架零态构形节点 x, y 坐标见表 2, 取右半部的结构进行分析。

采用本文方法对 1.0P 荷载系(图 1)进行分析, 节点位移计算结果见表 3, 杆件轴力计算结果见表 4。为便于比较, 文献[7]和 ANSYS 的计算结果也列于表 3, 4。通过比较可以看出, 本文结果与文献[7]及 ANSYS 计算结果是一致的。

1.0P 荷载系节点 y 方向位移和杆件轴力迭代

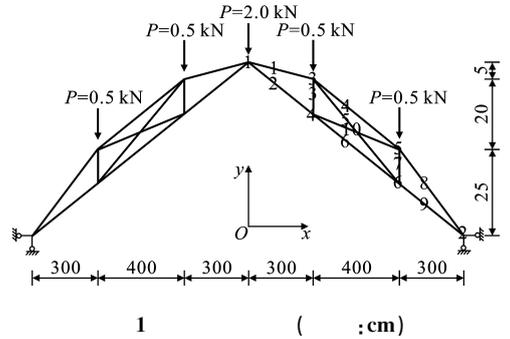


Fig. 1 Planar Flat Truss (Unit: cm)

1

(: cm)

1

杆件编号	1, 2, 4, 8, 9	3, 5, 7, 10	6
截面直径/cm	3.8	2.0	5.2

2

x, y

节点编号	x 坐标	y 坐标
1	0.000 000 00	50.000 000 00
2	1 000.000 000 00	0.000 000 00
3	300.166 574 15	44.997 224 54
4	299.833 425 85	35.002 435 47
5	700.166 574 15	24.997 224 54
6	699.833 425 85	15.002 775 41

cm

2

x, y

节点编号	x 坐标	y 坐标
1	0.000 000 00	50.000 000 00
2	1 000.000 000 00	0.000 000 00
3	300.166 574 15	44.997 224 54
4	299.833 425 85	35.002 435 47
5	700.166 574 15	24.997 224 54
6	699.833 425 85	15.002 775 41

cm

曲线分别如图 2, 3 所示。从图 2, 3 可以看出, 迭代仅 4 次就满足了节点坐标容差 $\epsilon=10^{-7}$ 的要求, 文献[7]中迭代 20 次达到相同结果, 本文方法收敛速度较快。

由图 2, 3 还可以看出, 迭代收敛前的曲线为较长一段水平线, 说明迭代收敛解是稳定和可靠的。

对 2.5P 荷载系进行分析, 通过对比可以看出, 本文结果与文献[7]及 ANSYS 计算结果基本是一致的, 只是在小数点后 3 位后有一些差别, 这是由于方法不同产生的误差。

2.5P 荷载系节点 y 方向位移和杆件轴力迭代变化曲线分别如图 4, 5 所示。迭代 8 次就满足了节点坐标容差 $\epsilon=10^{-7}$ 的要求, 文献[7]中迭代 20 次达到相同结果, 本文方法收敛速度较快。由图 4, 5 可以看出, 迭代收敛前的曲线为较长一段水平线, 说明迭代收敛解是稳定和可靠的。

对 2.6P 荷载系进行分析, 对于 2.6P 荷载系, 文献[7]方法和 ANSYS 均不能求解。本文 2.6P 荷载系下节点位移和杆件轴力迭代曲线如图 6 所示。迭代 20 次满足了节点坐标容差 $\epsilon=10^{-7}$ 的要求。由图 6 可以看出, 迭代收敛前的曲线为较长一

3

Tab. 3 Node Displacements

cm

1.0P 荷载系				2.5P 荷载系			2.6P 荷载系
节点位移	本文方法	文献[7]方法	ANSYS	本文方法	文献[7]方法	ANSYS	本文方法
v_1	-1.046 800	-1.047 400	-1.047	-1.620 90	-1.619	-1.619	-103.900 0
u_3	-0.018 554	-0.018 563	-0.019	-0.149 12	-0.150	-0.150	-0.739 2
v_3	-0.920 740	-0.921 225	-0.921	-4.583 30	-4.607	-4.606	-77.410 0
u_4	-0.013 704	-0.013 711	-0.014	-0.180 38	-0.182	-0.182	0.255 5
v_4	-0.920 910	-0.921 390	-0.921	-4.582 30	-4.605	-4.605	-77.390 0
u_5	-0.020 650	-0.020 660	-0.021	-0.218 67	-0.220	-0.220	-0.837 6
v_5	-0.502 240	-0.150 250	-0.503	-3.973 10	-3.998	-3.998	-35.840 0
u_6	-0.004 703	-0.004 705	-0.005	-0.155 15	-0.156	-0.156	0.243 5
v_6	-0.502 780	-0.503 030	-0.503	-3.975 00	-4.000	-4.000	-35.820 0

注： u_i, v_i 分别为节点 i 在 x, y 方向的位移。

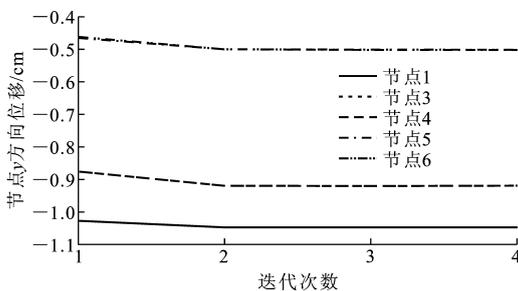
4

Tab. 4 Axial Forces of Members

N

1.0P 荷载系				2.5P 荷载系			2.6P 荷载系
杆件轴力	本文方法	文献[7]方法	ANSYS	本文方法	文献[7]方法	ANSYS	本文方法
N_1	-155 84.000	-15 584.300	-15 584.502	-64 293.400	-64 485.182	-64 484.939	-5 568.84
N_2	-150 75.000	-15 075.100	-15 074.934	-13 266.800	-13 071.182	-13 071.001	77 937.50
N_3	77.098	77.102	77.104	359.310	358.438	358.449	-1 301.68
N_4	-128 98.000	-12 898.300	-12 898.483	-56 338.500	-56 521.954	-56 521.950	-9 621.14
N_5	-2 704.200	-2 704.200	-2 704.233	-8 006.830	-8 015.200	-8 015.164	4 140.54
N_6	-123 78.000	-12 378.300	-12 378.148	-4 942.960	-4 735.709	-4 735.696	73 808.40
N_7	77.213	77.217	77.220	351.755	350.715	350.723	-1 304.25
N_8	-156 28.000	-15 627.900	-15 628.101	-64 740.200	-64 935.253	-64 935.106	-5 420.73
N_9	-150 80.000	-15 080.400	-15 080.215	-12 940.600	-12 741.762	-12 741.534	77 929.50
N_{10}	-2 696.400	-2 696.400	-2 696.384	-8 321.230	-8 332.917	-8 332.953	4 105.19

注： $N_1 \sim N_{10}$ 分别为 1~10 号杆件的轴力。



2 1.0P

y

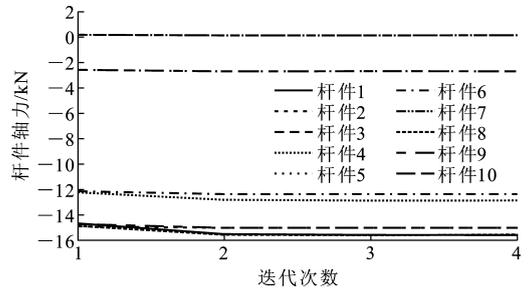
Fig. 2 Iteration Curves for Node y -direction Displacements Under 1.0P Load System

段水平线,说明迭代收敛解是稳定和可靠的。

2.6P 荷载系下结构平衡状态如图 7 所示。对大于 2.6P 荷载系也进行了分析,均能够获得稳定收敛解(分析结果略)。

4

(1)以节点坐标为未知量列出桁架大结构的非



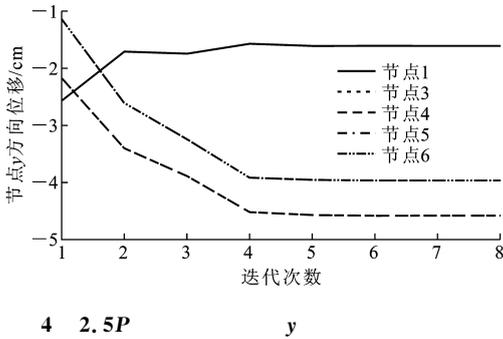
3 1.0P

Fig. 3 Iteration Curves for Axial Forces of Members Under 1.0P Load System

线性平衡方程,建立方程过程没有任何近似,所得到的非线性平衡方程是精确的列式。

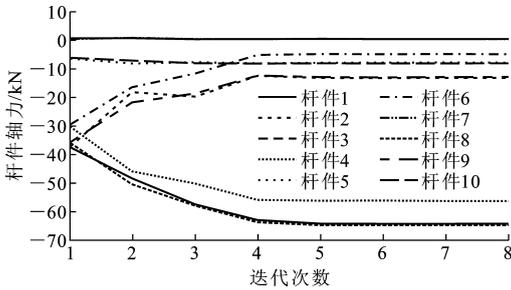
(2)基于本文的桁架结构非线性平衡方程列式,可有效利用微分线性逼近这种精确方法进行求解,所形成的求解方程很简单,易于应用。

(3)大位移平面扁桁架算例研究表明,本文方法对于结构非常接近失稳的稳定平衡状态能够获得精



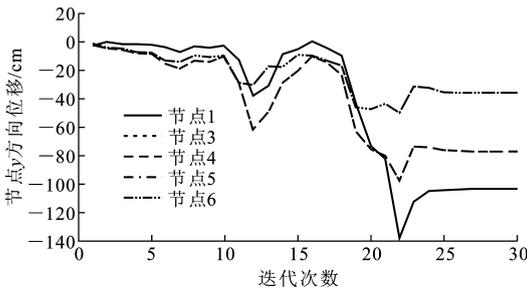
4 2.5P

Fig. 4 Iteration Curves for Node y-direction Displacements Under 2.5P Load System



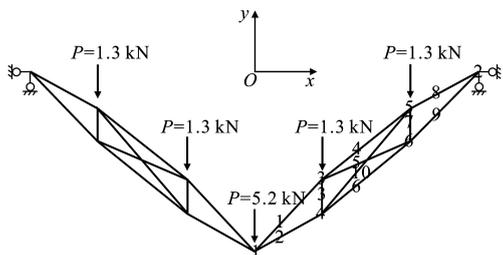
5 2.5P

Fig. 5 Iteration Curves for Axial Forces of Members Under 2.5P Load System



6 2.6P

Fig. 6 Iteration Curves for Node y-direction Displacement Under 2.6P Load System



7 2.6P

Fig. 7 Equilibrium State of Structure Under 2.6P Load System

确解,且具有很高的稳定性和很快的收敛速度。

(4)本文方法稳定性好、精度高、收敛速度快且简单易用,为求解桁架大位移问题提供了一种有效方法,具有重要理论意义和工程应用价值。

:

References:

[1] OHKUBO S, WATADA Y, FUJIWAKI T. Nonlinear Analysis of Truss by Energy Minimization[J]. Computers & Structures, 1987, 27(1): 129-145.

[2] KAZBERUK A, MIEDZIALOWSKI C Z, TRIBILLO R. Finite Element Discretization by Minimization of Elastic Strain Energy Method[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1999, 32(2): 63-70.

[3] GRECOA M, GESUALDOA F A R, VENTURINIB W S. Nonlinear Positional Formulation for Space Truss Analysis[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2007, 42(12): 1079-1086.

[4] LIU S T, LONG Q L. A New Method Tracing Load-deflection Equilibrium Path of a Doubly Nonlinear Truss[J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 166-169: 68-72.

[5] 沈世钊, 徐崇宝, 赵 臣, 等. 悬索结构设计[M]. 2 版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006.

SHEN Shi-zhao, XU Chong-bao, ZHAO Chen, et al. Design of Cable Structures[M]. 2nd ed. Beijing: China Architecture & Building Press, 2006.

[6] 熊洪允, 曾绍标, 毛云英. 应用数学基础[M]. 天津: 天津大学出版社, 1994.

XIONG Hong-yun, ZENG Shao-biao, MAO Yun-ying. Fundamentals of Applied Mathematics[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1994.

[7] 孙焕纯, 许 强, 龙武智. 桁架结构几何大变形分析的精确方法[J]. 应用力学学报, 2009, 26(1): 45-50.

SUN Huan-chun, XU Qiang, LONG Wu-zhi. Accurate Algorithm for Geometrically Large Deflection Analysis of Truss Structures[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2009, 26(1): 45-50.

[8] 许 强, 陈 庆, 孙焕纯. 大跨度桁架几何大变形结构分析的一种数值方法[J]. 土木工程学报, 2009, 42(1): 16-22.

XU Qiang, CHEN Qing, SUN Huan-chun. An Algorithm for Analysis of Large Span Truss Structures with Large Deformation[J]. China Civil Engineering Journal, 2009, 42(1): 16-22.