

文章编号:1673-2049(2016)02-0056-07

移动车辆荷载过桥耦合振动精细积分算法

桂水荣^{1,2}, 万 水¹, 陈水生²

(1. 东南大学 交通学院, 江苏 南京 210096; 2. 华东交通大学 土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

摘要:根据模态综合叠加技术的优势,提出基于精细积分算法(PIM)的车桥耦合振动模型新算法。考虑积分步长内荷载协调分解,通过插值函数将移动车辆荷载等效到单元节点,利用科茨积分格式求解 Duhamel 非齐次项荷载。以移动常量力作用于简支梁桥为例,将解析解和多种迭代格式数值解进行对比,校验精细积分法结合科茨积分格式求解车桥耦合振动模型算法的准确性。以移动弹簧质量车模型作用于简支梁桥为例,分析积分步长、计算时间对 Rung-Kutta 法、Newmark- β 法及 PIM 法计算结果的影响。结果表明:基于模态综合叠加法并结合精细积分格式求解车桥耦合振动问题不受积分步长限制,具有快速收敛的优势。

关键词:车桥耦合振动;移动弹簧质量;数值迭代格式;精细积分算法;模态综合叠加法

中图分类号:U443

文献标志码:A

Precise Integration Method for Bridge Subjected to Moving Vehicle Load

GUI Shui-rong^{1,2}, WAN Shui¹, CHEN Shui-sheng²

(1. School of Transportation, Southeast University, Nanjing 210096, Jiangsu, China; 2. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, Jiangxi, China)

Abstract: According to the superiority of the modal superposition method, a new numerical algorithm based on precise integration method (PIM) was proposed to solve the problem of vehicle-bridge coupling vibration. The load decomposition coordination in an integration step was considered, and moving vehicle load was equivalent to element point through interpolating function, then Cotes integral format was introduced to solve Duhamel nonhomogeneous load. Taking a moving constant force on simply supported beam as an example, the veracity of Cotes integral format was verified through comparing the analytical solution with several numerical integral results. Taking a moving spring mass vehicle model on simply supported beam as an example, the effects of integral time step and computing time on computing results using Rung-Kutta method, Newmark- β method and PIM were analyzed. The results show that the PIM lies in unlimited by integral step length, and has superiority of quick convergence in solving the problem of vehicle-bridge coupling vibration.

Key words: vehicle-bridge coupling vibration; moving spring mass; numerical iterative scheme; precise integration method; modal superposition method

0 引言

移动车辆荷载与桥梁相互作用的数值模拟能高

效准确地计算二者动力响应,可以用来研究车辆行驶过程中的行车舒适性及桥梁振动特性,对桥梁及车辆设计提供理论依据。通常考虑车桥耦合振动的

收稿日期:2015-09-17

基金项目:国家自然科学基金项目(51268013,51468018);江西省教育厅科研项目(GJJ14384,GJJ14352);

教育部工程研究中心建设项目(13TM02)

作者简介:桂水荣(1979-),女,江西九江人,华东交通大学副教授,东南大学工学博士研究生,E-mail:guishuirong@163.com。

数值模拟有 2 种方法:一种方法是直接建立桥梁全自由度的车桥耦合振动方程进行同步求解,这种方法称为全自由度耦合振动法^[1];另一种方法则是利用结构模态正交特性,使用振型叠加技术,分别建立车辆与桥梁振动方程,使桥梁各阶模态广义坐标与车辆自由度位移协调,进行耦合求解,这种方法称为模态综合法^[2]。求解车桥耦合振动问题的数值积分格式常用的有 Newmark- β 法^[1]、Runge-Kutta 法^[3]、翟婉明的显式积分法^[4]、乔宏等^[5]基于 Duhamel 法积分求解,张楠等^[6]运用全积分法求解,施颖等^[7]运用 ANSYS 二次开发进行求解,张亚辉等^[8-9]首先将精细积分法运用于求解车桥耦合振动方程。常规的逐步积分法计算移动车辆荷载与桥梁相互作用,在每一个积分步长内,荷载的大小及作用点位不变,导致从一个积分点到另一个积分点的“突变”,因而积分步长将影响数值计算精度。钟万勰^[10-11]提出的结构动力方程精细时程积分方法考虑荷载在积分步长内的连续变化。结合精细积分方法,研究移动荷载过桥问题,各学者研究了积分步长内荷载变化关系^[7-10]、非齐次项荷载特解的求解问题^[12]及将二者同时改进的算法^[13-14]。杜宪亭等^[15-16]运用精细积分法进行优化来求解车桥耦合振动问题。上述文献采用精细积分法求解移动荷载过桥问题均采用全自由度耦合振动法^[7-9,12-14]或解析方法来进行求解,这些方法在计算公路桥梁车桥耦合振动问题时,因车辆在桥梁上行驶的横向、纵向位置的改变,桥梁有限元模型自由度将成倍增大,导致车桥耦合振动问题求解难以精确完成。

根据模态综合叠加法优势,结合精细积分格式,本文提出基于精细积分格式的车桥耦合振动模型的求解算法。考虑积分步长内外荷载按线性变化,运用插值函数将移动车辆荷载等效到单元节点,并利用指数矩阵及科茨积分格式求解非齐次项荷载。以移动弹簧质量车桥耦合模型为例,对比分析积分步长及计算时间对不同结果的影响,提出基于模态综合叠加法并结合精细积分格式求解车桥耦合振动问题的优势。

1 移动弹簧质量车桥耦合振动模型

将车辆模型简化为由 2 个质量体系组成的移动弹簧质量车模型。假定车辆与桥梁始终保持接触,车辆模型质量由车轮质量 m_1 及车体的簧载质量 m_2 组成,车轮和悬架系统的弹簧刚度及阻尼分别等效为刚度 k_1 、阻尼 c_1 的弹簧-阻尼系统。假设简支梁

桥静止时为平衡位置,车辆以速度 v 行驶,梁的动挠度为 $y(x,t)$,簧载质量 m_2 的动位移为 $z(t)$,车轮始终与梁体保持接触不脱离,移动弹簧质量车模型如图 1 所示。

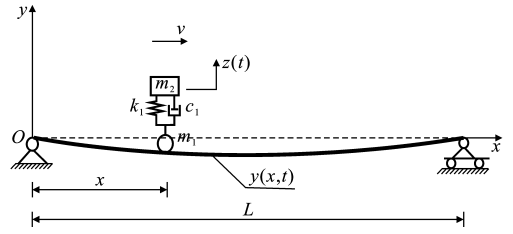


图 1 移动弹簧质量车桥耦合模型

Fig. 1 Vehicle-bridge Coupling Model of Moving Spring Mass System

根据达朗贝尔原理,移动弹簧质量车模型振动方程为

$$m_2 \ddot{z}(t) + c_1 [\dot{z}(t) - \dot{y}(x,t)] + k_1 [z(t) - y(x,t)] = 0 \quad (1)$$

根据模态综合叠加法,式(1)可以改写为

$$m_2 \ddot{z}(t) - c_1 \mathbf{N} \Phi \mathbf{q}(t) + c_1 \dot{z}(t) - (c_1 v \mathbf{N}_{,x} \Phi + k_1 \mathbf{N} \Phi) \mathbf{q}(t) + k_1 z(t) = 0 \quad (2)$$

式中: \mathbf{N} 为单元插值函数; $\mathbf{N}_{,x}$ 为插值函数对 x 的导数; Φ 为梁单元节点振型向量矩阵; $\mathbf{q}(t)$ 为节点位移振型向量广义坐标。

车辆振动过程中,作用于桥梁的竖向荷载向量 $\mathbf{F}_v^{\text{int}}$ 为

$$\mathbf{F}_v^{\text{int}} = \mathbf{N}^T (m_1 + m_2) g - c_1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \Phi \dot{\mathbf{q}}(t) + c_1 \mathbf{N}^T \dot{z}(t) - \mathbf{N}^T (c_1 v \mathbf{N}_{,x} + k_1 \mathbf{N}) \Phi \mathbf{q}(t) + \mathbf{N}^T k_1 z(t) \quad (3)$$

运用有限元方法将桥梁离散成欧拉梁单元时,桥梁振动方程可以表示成

$$\mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_b \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_b \mathbf{u} = -\mathbf{F}_b \quad (4)$$

式中: \mathbf{M}_b 、 \mathbf{C}_b 、 \mathbf{K}_b 分别为桥梁系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; \mathbf{u} 为桥梁单元节点向量; \mathbf{F}_b 为作用于桥梁上的外荷载。

采用 Rayleigh 阻尼计算阻尼矩阵 $\mathbf{C}_b = \alpha \mathbf{M}_b + \beta \mathbf{K}_b$,其中 α 和 β 可以表示为

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \beta = \frac{2(\xi_2\omega_2 - \xi_1\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$$

式中: ω_1 、 ω_2 分别为结构的第 1 阶、第 2 阶自振频率; ξ_1 、 ξ_2 分别为结构的第 1 阶、第 2 阶模态阻尼比。

桥梁模态空间取 r 阶模态,根据振型的正交性,不考虑各阶模态的相干性,根据振型分解法,式(4)可以改写为

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{X}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{q} = -\mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}_{bv} \quad (5)$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{r \times r}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2\xi_i\omega_i & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2\xi_r\omega_r \end{bmatrix}_{r \times r}$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \omega_i^2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega_r^2 \end{bmatrix}_{r \times r}$$

式中: ξ_i 为桥梁各阶频率阻尼比; ω_i 为桥梁各阶自振频率。

车辆振动过程中, 作用于桥梁的竖向荷载 F_v^{int} 和桥梁所受到的竖向荷载 F_{bv} 相等, 即 $F_v^{\text{int}} = F_{bv}$, 则可得

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{X} - c_1 \mathbf{\Phi}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{\Phi}) \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Phi}^T \mathbf{N}^T (c_1 \cdot \\ v \mathbf{N}_{,x} + k_1 \mathbf{N}) \mathbf{\Phi}] \mathbf{q} + c_1 \mathbf{\Phi}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{z}} + \\ k_1 \mathbf{\Phi}^T \mathbf{N}^T \mathbf{z} = -\mathbf{\Phi}^T \mathbf{N}^T (m_1 + m_2) \mathbf{g} \end{aligned} \quad (6)$$

将车辆振动方程与桥梁振动方程联立, 建立车桥耦合振动方程, 即

$$\mathbf{M}_{bv} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_{bv} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_{bv} \mathbf{y} = \mathbf{F}_{bv} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_{bv} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_v \end{bmatrix}_{(r+1) \times (r+1)} \\ \mathbf{C}_{bv} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{Q} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{C}_v \end{bmatrix}_{(r+1) \times (r+1)} \\ \mathbf{K}_{bv} &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} + \mathbf{S} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{K}_v \end{bmatrix}_{(r+1) \times (r+1)} \\ \mathbf{F}_{bv} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{\Phi}^T \mathbf{N}^T (m_1 + m_2) \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}_{(r+1) \times 1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q} &= -\mathbf{\Phi}^T c_1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{S} &= -\mathbf{\Phi}^T \mathbf{N} (c_1 v \mathbf{N}_{,x} + k_1 \mathbf{N}) \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{A}_1 &= (\phi_1 \mathbf{N}^T c_1, \phi_2 \mathbf{N}^T c_1, \dots, \phi_r \mathbf{N}^T c_1)^T \\ \mathbf{A}_2 &= -\mathbf{A}_1^T \\ \mathbf{B}_1 &= (\phi_1 \mathbf{N}^T k_1, \phi_2 \mathbf{N}^T k_1, \dots, \phi_r \mathbf{N}^T k_1)^T \\ \mathbf{B}_2 &= -\mathbf{B}_1^T - v(c_1 \mathbf{N}_{,x} \phi_1, c_1 \mathbf{N}_{,x} \phi_2, \dots, c_1 \mathbf{N}_{,x} \phi_r) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: \mathbf{M}_{bv} , \mathbf{C}_{bv} , \mathbf{K}_{bv} 分别为车桥耦合振动系统刚度矩阵、阻尼矩阵和质量矩阵; \mathbf{y} 为坐标向量, $\mathbf{y} = (q_1, q_2, \dots, q_r, z)^T$; \mathbf{M}_v , \mathbf{C}_v , \mathbf{K}_v 分别为移动弹簧质量车模

型的质量矩阵、阻尼矩阵及刚度矩阵; \mathbf{Q} , \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{S} , \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 均为车桥耦合振动引起的阻尼和刚度矩阵的修改系数矩阵; ϕ_i 为第 i 阶频率各节点模态向量。

2 车桥耦合振动模型节点荷载的等效分解

移动弹簧质量车模型作用于如图 2 所示的简支梁上。假设梁单元某一单元 e 长度为 l_i , 在单元 e 内, 移动弹簧质量作用于简支梁, 自节点 i 向节点 j 以速度 v 匀速行驶。在某一积分步长 Δt 内, 弹簧质量系统由 A 点移动到 B 点, 此时 A, B 两点均在单元 e 内。数值迭代时, t_k 时刻作用于 A 点, 而 t_{k+1} 时刻移动到 B 点, A 点和 B 点距节点 i 的距离分别为 x_1, x_2 。假设任意 t 时刻移动弹簧质量系统所在节点 i 距桥梁起点距离为 x_k , 则任意 t 时刻移动弹簧质量车模型距节点 i 的距离 x 和阻尼比 ξ 分别为

$$\left. \begin{aligned} x &= vt - x_k \\ \xi &= \frac{x}{l_i} = \frac{vt}{l_i} - \frac{x_k}{l_i} = \xi_1 t - \xi_2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

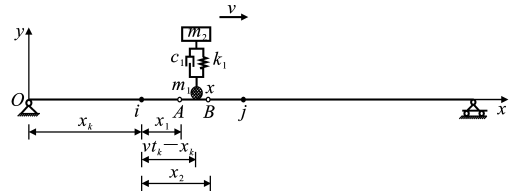


图 2 移动弹簧质量在单元 e 内移动示意

Fig. 2 Moving Spring Mass System Moving in Element e

通过插值函数 N 将单元 e 内部荷载等效分解到节点 i 和节点 j (图 3)。在任意时刻 $t = t_k + \tau$, τ 为时间步长, F_v^{int} 在节点 i 和节点 j 产生的等效节点荷载 $f_i(t)$ 为

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= N_1(\xi) F_v^{\text{int}} \\ f_2(t) &= N_2(\xi) F_v^{\text{int}} \\ f_3(t) &= N_3(\xi) F_v^{\text{int}} \\ f_4(t) &= N_4(\xi) F_v^{\text{int}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_2 &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)l \\ N_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_4 &= (-\xi^2 + \xi^3)l \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中: $N_i(\xi)$ ($i=1, 2, 3, 4$) 为梁单元的插值函数。

将式(10)代入式(12)中可以得到

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= b_{11} + b_{12}t + b_{13}t^2 + b_{14}t^3 \\ N_2 &= b_{21} + b_{22}t + b_{23}t^2 + b_{24}t^3 \\ N_3 &= b_{31} + b_{32}t + b_{33}t^2 + b_{34}t^3 \\ N_4 &= b_{41} + b_{42}t + b_{43}t^2 + b_{44}t^3 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中: b_{ij} 为系数。

此时作用于桥梁上的外荷载向量等效到单元节点可以表示成

$$\mathbf{F}(t) = (0, 0, \dots, f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t), \dots, 0, 0)^T \quad (15)$$

将式(9), (12), (14)代入式(15), 整理可得

$$\mathbf{F}(t) = (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 t + \mathbf{r}_2 t^2 + \mathbf{r}_3 t^3) \cdot [-\boldsymbol{\Phi}^T(m_1 + m_2)g] \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= (0, 0, \dots, b_{11}, b_{21}, b_{31}, b_{41}, \dots, 0, 0)^T \\ \mathbf{r}_1 &= (0, 0, \dots, b_{12}, b_{22}, b_{32}, b_{42}, \dots, 0, 0)^T \\ \mathbf{r}_2 &= (0, 0, \dots, b_{13}, b_{23}, b_{33}, b_{43}, \dots, 0, 0)^T \\ \mathbf{r}_3 &= (0, 0, \dots, b_{14}, b_{24}, b_{34}, b_{44}, \dots, 0, 0)^T \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$b_{11} = 1 - 3\xi_2^2 - \xi_2^3$$

$$b_{12} = 6\xi_1\xi_2 + 6\xi_1\xi_2^2$$

$$b_{13} = -3\xi_1^2 - 6\xi_1^2\xi_2$$

$$b_{14} = 2\xi_1^3$$

$$b_{21} = -(\xi_2 + 2\xi_2^2 + \xi_2^3)l_i$$

$$b_{22} = (\xi_1 + 4\xi_1\xi_2 + 3\xi_1\xi_2^2)l_i$$

$$b_{23} = (-2\xi_1^3 - 3\xi_1^2\xi_2)l_i$$

$$b_{24} = \xi_1^3 l_i$$

$$b_{31} = 3\xi_2^2 + 2\xi_2^3$$

$$b_{32} = -6\xi_1\xi_2 - 6\xi_1\xi_2^2$$

$$b_{33} = 3\xi_1^2 + 6\xi_1^2\xi_2$$

$$b_{34} = -2\xi_1^3$$

$$b_{41} = (-\xi_2^2 - \xi_2^3)l_i$$

$$b_{42} = (2\xi_1\xi_2 + 3\xi_1\xi_2^2)l_i$$

$$b_{43} = (-\xi_1^2 - 3\xi_1^2\xi_2)l_i$$

$$b_{44} = \xi_1^3 l_i$$

式中: \mathbf{r}_i 为常数向量, $i=0, 1, 2, 3$ 。

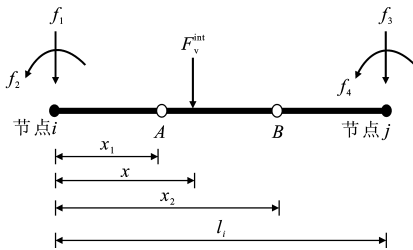


图3 单元内荷载节点等效分解

Fig. 3 Equivalent Decomposition of Load Nodes in Element

3 车桥耦合振动模型精细算法分析

3.1 精细积分法分析

作用于桥梁上的荷载积分步长内按线性分解后, 将车桥耦合振动方程式(7)转化到状态空间, 有

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{H}\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{B} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= -\mathbf{M}_{bv}^{-1} \mathbf{K}_{bv} \\ \mathbf{G} &= -\mathbf{M}_{bv}^{-1} \mathbf{C}_{bv} \\ \mathbf{v}^T(t) &= (\mathbf{y}^T, \dot{\mathbf{y}}^T) \\ \mathbf{f}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{bv}^{-1} \mathbf{F}(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{N}^T (m_1 + m_2) g \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

方程式(18)的通解为

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_h(t) + \mathbf{v}_p(t) \quad (20)$$

假设 t_k 时刻式(18)的通解为 $\mathbf{v}(t_k)$, 则在 $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ 时刻, 通解向量 $\mathbf{v}(t_{k+1})$ 为

$$\mathbf{v}(t_{k+1}) = \mathbf{T}(\Delta t) [\mathbf{v}(t_k) - \mathbf{v}_p(t_k)] + \mathbf{v}_p(t_{k+1}) \quad (21)$$

式中: $\mathbf{T}(\Delta t)$ 为指数矩阵; $\mathbf{v}_p(t_k)$ 为特解向量。

在某一积分步 $t \in (t_k, t_{k+1})$ 中, 齐次解为^[10]

$$\mathbf{v}_h(t) = \mathbf{T}(\tau) \mathbf{c} \quad (22)$$

式中: $\mathbf{T}(\tau) = \exp(\mathbf{H}\tau)$, $\exp(\mathbf{H}\tau) = [\exp(\mathbf{H}\tau/m)]^m$, $\tau = t - t_k$, $m = 2^N$, 当 $N = 20$ 时, $m = 1\,048\,576$; \mathbf{c} 为由初始状态 $t = t_k$ 所决定的积分常量。

在 τ 并不是很大的时间区段时, $\Delta t = \tau/m$ 将是一个非常小的时间区段。因此, 对于非常小的积分区段 Δt , 有 $\exp(\mathbf{H}\Delta t) = \mathbf{I} + \mathbf{T}_a$, 其中

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I} + \mathbf{T}_a)^{2^N} = (\mathbf{I} + \mathbf{T}_a)^{2^{(N-1)}} \times (\mathbf{I} + \mathbf{T}_a)^{2^{(N-1)}} \quad (23)$$

$$\mathbf{T}_a \approx \mathbf{H}\Delta t + (\mathbf{H}\Delta t)^2 [\mathbf{I} + \mathbf{H}\Delta t/3 + (\mathbf{H}\Delta t)^2/12]/2 \quad (24)$$

式中: \mathbf{I} 为单位矩阵。

将式(23)执行 N 次循环, 循环结束后, $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_a$, 有

$$\mathbf{v}(t_k) = \mathbf{T}\Delta \mathbf{v}(t_{k-1}), \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{T}\mathbf{v}_0 \quad (25)$$

3.2 科茨积分格式求非齐次方程特解

采用科茨积分格式对式(18)进行求解, 其非齐次方程组的解可以表示为

$$\mathbf{v}(t) = e^{\mathbf{H}t} \mathbf{v}_0 + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\tau) e^{\mathbf{H}(t_{k+1}-\tau)} d\tau \quad (26)$$

对式(26)进行离散化得

$$\tau = t_{k+1} - t_k$$

$$\mathbf{v}_{k+1}(t) = e^{\mathbf{H}_{k+1}} \mathbf{v}_0 + \int_0^{t_{k+1}} e^{\mathbf{H}(t_{k+1}-\tau)} \mathbf{f}(\tau) d\tau =$$

$$e^{\mathbf{H}_k} e^{\mathbf{H}_k} \mathbf{v}_0 + \int_0^{t_k} e^{\mathbf{H}(t_k-\tau)} e^{\mathbf{H}_k} \mathbf{f}(\tau) d\tau +$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{H}(t_{k+1}-\tau)} \mathbf{f}(\tau) d\tau =$$

$$T v_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{H(t_{k+1}-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (27)$$
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{H(t_{k+1}-\tau)} f(\tau) d\tau = [7 e^{\tau} f(t_k) + 32 e^{\frac{3}{4}\tau} f(t_k + \frac{1}{4}\tau) + 12 e^{\frac{1}{2}\tau} f(t_k + \frac{1}{2}\tau) + 32 e^{\frac{1}{4}\tau} f(t_k + \frac{3}{4}\tau) + 7 f(t_{k+1})] \frac{\tau}{90} \quad (28)$$

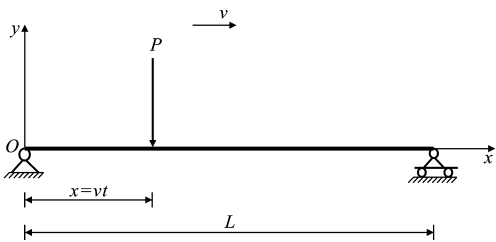


图 4 移动常量力作用于简支梁桥示意

Fig. 4 Diagram of Simple Support Beam Subjected to Moving Constant Force

表 1 简支梁结构参数及车辆参数

Tab. 1 Structure Parameters and Vehicle Parameters of Simple Support Beam

结构参数		车辆参数	
L/m	30	P/N	3.278×10^5
$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	2 600	m_1/kg	1 425
A/m^2	1.062 2	m_2/kg	32 025
I/m^4	0.509 2	$k_1/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	6.5×10^5
E/Pa	3.5×10^{10}	$c_1/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	2.1×10^4

结构阻尼)以不同 ξ 值通过简支梁的跨中位移冲击系数。

表 2 列出了采用不同数值方法计算的跨中位移冲击系数与参考文献对比结果。

表 2 不同计算方法得到的跨中位移冲击系数对比

Tab. 2 Contrast of Impact Factors of Mid-span with Different Calculating Ways

ξ	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	$(F_8 - F_1)/F_1/\%$
0.100	0.050	0.053	0.065	0.057	0.047 6	0.047 6	0.051 1	0.050 8	1.600
0.500	0.250	0.252	0.256	0.254	0.255 3	0.255 3	0.255 4	0.254 9	1.960
1.000	0.707	0.705	0.703	0.702	0.703 1	0.704 6	0.703 3	0.703 3	-0.520
1.234	0.743	0.730	0.737	0.734	0.733 8	0.731 6	0.732 6	0.732 6	-1.400
1.500	0.710	0.704	0.695	0.695	0.699 1	0.702 4	0.699 3	0.699 3	-1.510
2.000	0.550	0.550	0.549	0.551	0.550 7	0.549 8	0.549 8	0.549 8	-0.037

注： F_1 为取简支梁前10阶模态的解析解^[17]； F_2 为文献[3]得到的跨中位移冲击系数； F_3 为采用全自由度直接耦合方法计算得到的跨中位移冲击系数^[18]； F_4 为文献[17]得到的跨中位移冲击系数； F_5 为采用有限元软件ANSYS10.0进行瞬态分析计算得到的跨中位移冲击系数； F_6 为取简支梁前10阶模态解析方程式，采用Runge-Kutta法求解得到的跨中位移冲击系数^[19]； F_7 为采用ANSYS将简支梁离散成有限元模型，取其前10阶模态向量计算得到的跨中位移冲击系数^[20]； F_8 为取桥梁前10阶模态运用精细积分法计算得到的跨中位移冲击系数。

从表 2 可以看出： ξ 值越小，移动常量力运行加载周期与桥梁自振周期相差越大，桥梁振动曲线越接近静态响应曲线；当 ξ 值接近 1 时，移动常量力在桥上运行加载周期与桥梁第 1 阶自振周期接近，共振明显，跨中位移冲击系数最大。

采用模态综合叠加法计算跨中位移冲击系数，Runge-Kutta 法、Newmark- β 法和 PIM 法结果非常接近，模态综合叠加法结果比 ANSYS 瞬态分析结果、全自由度结果^[18]更接近解析解^[17]；运用模态综合叠加法分析移动常量力通过简支梁的耦合振动问

题，模态综合叠加法的 Newmark- β 解及精细积分法数值迭代解与解析方程的 Runge-Kutta 法数值解非常接近，但 Runge-Kutta 法与其他几种方法相比，波动偏差较大；精细积分法比 Newmark- β 法更接近解析解，精细积分法计算的冲击系数误差与解析解相对误差小于 2%，本文所提出的精细积分算法准确可行。

4.2 数值迭代格式结果对比分析

选取表 1 所示的简支梁结构参数及车辆模型动力特性参数，移动弹簧质量车模型分别以 5, 15, 30

$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 匀速通过简支梁,分别采用 Runge-Kutta 法、Newmark- β 法及 PIM 法研究步长对计算精度及计算时间的影响。

表 3 为运用 Runge-Kutta 法、Newmark- β 法及 PIM 法研究数值积分方法对计算跨中最大动挠度的收敛速度及计算时间的影响结果对比。Runge-

Kutta 法采用自适应步长计算,计算步长对计算结果影响较小,如 500 积分步即可获得稳定解,但计算结果存在一定偏差;从 Newmark- β 法和 PIM 法积分格式的稳定解来看,两者计算结果完全一致,相同行车速度下,Newmark- β 法需要 5 倍的积分步才可以达到 PIM 法相同的稳定解;达到相同计算精

表 3 不同计算方法得到的跨中最大动位移对比

Tab. 3 Contrast of Maximal Dynamic Displacement of Mid-span with Different Calculating Ways										
车速/ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	Runge-Kutta 法 ^[12]		Newmark- β 法 ^[8]				PIM 法			
	总积分步	最大挠度/ mm	总积分步	最大挠度/ mm	计算时间/s	相对误差/%	总积分步	最大挠度/ mm	计算时间/s	相对误差/%
5			300	11.055 6	0.132 756	-2.545				
	100	11.361 7	600	11.255 1	0.263 766	-0.787	300	11.151 7	0.504 38	-1.699
	500	11.372 0	1 200	11.323 3	0.523 485	-0.186	600	11.337 4	1.007 877	-0.062
	5 000	11.372 0	6 000	11.343 9	2.533 454	-0.004	1 200	11.345 0	1.962 170	0.005
	50 000	11.372 1	12 000	11.344 2	5.033 230	-0.002	6 000	11.344 4	9.772 095	0.000
			60 000	11.344 4	24.968 450	0.000				
15			200	10.853 9	0.097 734	-0.194				
	100	10.891 4	400	10.863 7	0.177 865	0.104	200	10.876 2	0.346 479	0.011
	500	10.891 2	2 000	10.874 4	0.848 258	-0.006	400	10.874 3	0.666 609	-0.006
	5 000	10.891 7	4 000	10.874 8	1.678 370	-0.002	2 000	10.875 0	3.364 652	0.000
	50 000	10.891 7	20 000	10.875 0	8.203 837	0.000				
30			100	11.305 5	0.055 011	0.460				
	100	11.249 6	200	11.250 0	0.101 205	-0.032	100	11.254 7	0.179 257	0.009
	500	11.257 8	1 000	11.254 5	0.434 335	0.008	200	11.258 5	0.343 887	0.043
	5 000	11.258 2	2 000	11.253 8	0.849 153	0.002	1 000	11.253 7	1.685 212	0.000
	50 000	11.258 2	10 000	11.253 6	4.234 134	0.000				

度,PIM 法计算时间也较 Newmark- β 法更短。

5 结 语

将简支梁离散成欧拉梁单元,并结合模态综合叠加法建立了移动弹簧质量车桥耦合系统振动方程,考虑荷载在积分步内的线性变化关系,引入精细积分迭代格式,提出了基于模态综合叠加法的移动弹簧质量车桥耦合振动模型的精细求解算法。研究表明,车桥耦合振动系统采用模态综合法结合精细积分迭代格式,具有较好的通用性和准确性,能不受积分步长的限制,快速收敛,后期可推广用于求解长大跨桥梁及多车耦合振动响应。

参考文献:

References:

[1] 李小珍,马文彬,强士中.车桥系统耦合振动分析的数值解法[J].振动与冲击,2002,21(3):21-25,90.
LI Xiao-zhen,MA Wen-bin,QIANG Shi-zhong. Coupling Vibration Analysis of Vehicle-bridge System by

Iterative Solution Method[J]. Journal of Vibration and Shock,2002,21(3):21-25,90.
[2] HENCHI K,FAFARD M,TALBOT M,et al. An Efficient Algorithm for Dynamic Analysis of Bridges Under Moving Vehicles Using a Coupled Modal and Physical Components Approach[J]. Journal of Sound and Vibration,1998,212(4):663-683.
[3] LIN Y H,TRETHEWEY M W. Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads[J]. Journal of Sound and Vibration,1990,136(2):323-342.
[4] ZHAI W M,WANG K Y,CAI C B. Fundamentals of Vehicle-track Coupled Dynamics[J]. Vehicle System Dynamics,2009,47(11):1349-1376.
[5] 乔宏,夏禾,杜宪亭.基于 Duhamel 积分的车桥耦合动力分析方法[J].西南交通大学学报,2014,49(5):766-771.
QIAO Hong, XIA He, DU Xian-ting. Analytical Method for Calculating Dynamic Response of Coupled Train-bridge System Based on Duhamel Integral[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2014, 49

- (5):766-771.
- [6] 张楠,夏禾.基于全过程迭代的车桥耦合动力系统分析方法[J].中国铁道科学,2013,34(5):32-38.
ZHANG Nan, XIA He. A Vehicle-bridge Interaction Dynamic System Analysis Method Based on Inter-system Iteration[J]. China Railway Science, 2013, 34(5): 32-38.
- [7] 施颖,宋一凡,孙慧,等.基于 ANSYS 的公路复杂桥梁车桥耦合动力分析方法[J].天津大学学报,2010,43(6):537-543.
SHI Ying, SONG Yi-fan, SUN Hui, et al. Dynamic Analysis Method of Vehicle-bridge Coupling for Complicated Bridges Based on ANSYS [J]. Journal of Tianjin University, 2010, 43(6): 537-543.
- [8] 张亚辉,张守云,赵岩,等.桥梁受移动荷载动力响应的一种精细积分法[J].计算力学学报,2006,23(3):290-294.
ZHANG Ya-hui, ZHANG Shou-yun, ZHAO Yan, et al. A Precise Integration Method for Bridges Subjected to Moving Loads[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006, 23(3): 290-294.
- [9] 林家浩,张守云,吕峰,等.移动简谐荷载作用下桥梁响应的高效计算[J].计算力学学报,2006,23(4):385-390.
LIN Jia-hao, ZHANG Shou-yun, LU Feng, et al. Precise Integration for Bridge Subjected to Moving Harmonic Loads[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006, 23(4): 385-390.
- [10] 钟万勰.结构动力方程的精细时程积分法[J].大连理工大学学报,1994,34(2):131-136.
ZHONG Wan-xie. On Precise Time-integration Method for Structural Dynamics[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(2): 131-136.
- [11] 钟万勰.暂态历程的精细计算方法[J].计算结构力学及其应用,1995,12(1):1-6.
ZHONG Wan-xie. Precise Computation for Transient Analysis[J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1995, 12(1): 1-6.
- [12] 余华,吴定俊. Hermite 插值在车桥耦合振动中的应用[J].振动与冲击,2006,25(2):38-40,66,182.
YU Hua, WU Ding-jun. Application of Hermite Function in Vehicle-bridge Interaction Analysis[J]. Journal of Vibration and Shock, 2006, 25(2): 38-40, 66, 182.
- [13] 余华,吴定俊,项海帆.移动荷载过桥的精细计算[J].振动与冲击,2009,28(5):17-21,201.
YU Hua, WU Ding-jun, XIANG Hai-fan. Precise Computation for Dynamic Response of Bridge Under Moving Loads[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(5): 17-21, 201.
- [14] 张健,谭述君,吴昌华.车辆-轨道非线性耦合动力学的精细积分法及其应用[J].振动与冲击,2012,31(8):5-10.
ZHANG Jian, TAN Shu-jun, WU Chang-hua. A Precise Integration Method for Vehicle-track Nonlinear Coupling Dynamics and Its Application[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(8): 5-10.
- [15] 杜宪亭,夏禾,张田,等.基于精细 Runge-Kutta 混合积分法的车桥耦合震动非迭代求解算法[J].振动与冲击,2013,32(13):39-42.
DU Xian-ting, XIA He, ZHANG Tian, et al. Non-iterative Solving Algorithm for Coupled Vibration of a Train-bridge System Based on Precise Runge-Kutta Hybrid Integration Method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(13): 39-42.
- [16] 杜宪亭,夏禾,李慧乐,等.基于改进高斯精细积分法的车桥耦合振动分析框架[J].工程力学,2013,30(9):171-176.
DU Xian-ting, XIA He, LI Hui-le, et al. Dynamic Analysis Framework of Train-bridge System Based on Improved Gauss Precise Integration Method[J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(9): 171-176.
- [17] WARBURTON G B. The Dynamic Behaviour of Structures[M]. Oxford: Pergamon Press, 1964.
- [18] 陈水生.公路车桥耦合振动响应计算方法对比研究[J].华东交通大学学报,2011,28(3):18-25.
CHEN Shui-sheng. Comparative Research on the Calculating Methods for Coupling Highway Vehicle-bridge System [J]. Journal of East China Jiaotong University, 2011, 28(3): 18-25.
- [19] 桂水荣.公路梁桥在移动荷载作用下车桥耦合振动响应研究[D].南昌:华东交通大学,2007.
GUI Shui-rong. Response Study of Road Beam Bridges Subjected to Moving Load [D]. Nanchang: East China Jiaotong University, 2007.
- [20] 王运金,桂水荣,陈水生.连续梁桥车桥耦合振动分析的数值解法[J].华东交通大学学报,2007,24(4):25-29.
WANG Yun-jin, GUI Shui-rong, CHEN Shui-sheng. An Efficient Algorithm for Coupled Vibration Analysis of Continuous Bridge Under Moving Vehicle[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2007, 24(4): 25-29.