

文章编号:1673-2049(2018)05-0054-06

# 基于模态区间分析的结构不确定性损伤评估

方圣恩<sup>1,2</sup>, 黄继源<sup>1</sup>, 张 宝<sup>1</sup>

(1. 福州大学 土木工程学院, 福建 福州 350116;

2. 福州大学 土木工程防震减灾信息化国家地方联合工程研究中心, 福建 福州 350116)

**摘要:**针对实际工程结构中难以避免的不确定性因素,如材料非均质、边界条件不清晰、测试误差、模型误差等,提出利用模态区间分析求解包含不确定性参数的梁损伤评估方法。首先建立钢箱梁和钢筋混凝土梁的计算模型,以区间形式定义梁几何、材料参数的不确定性,体现各参数的可能波动范围;然后将结构静力学方程扩展成区间方程,通过模态逻辑对区间方程进行重新释义;最后在梁上施加集中荷载,计算得到梁关键应变点的区间工作状态。分析中通过降低梁单元的弹性模量来模拟损伤,再比较确定性方法、经典区间算法和模态区间分析的计算结果。结果表明:与确定性损伤评估方法不同,区间算法允许结构包含不确定性参数,认为落在区间包络线内的应变值是合理的,而当某荷载下应变值超出包络范围时说明梁发生了损伤;模态区间分析计算得到的区间包络范围要明显小于经典区间算法,能够有效避免计算过程的参数区间扩张,而且可以及时发现梁的损伤和损伤时所对应的外荷载,避免结构损伤进一步的恶化。

**关键词:**损伤评估;不确定性;模态区间分析;区间扩张;梁结构

**中图分类号:** TU311.1

**文献标志码:** A

## Damage Assessment of Structures with Uncertainties Using Modal Interval Analysis

FANG Sheng-en<sup>1,2</sup>, HUANG Ji-yuan<sup>1</sup>, ZHANG Bao<sup>2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350116, Fujian, China; 2. National and Local United Research Center for Seismic and Disaster Informatization of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350116, Fujian, China)

**Abstract:** In view of uncertain factors difficult to avoid in real-world engineering structures, such as inhomogeneous materials, unclear boundary conditions, testing and modeling errors, a method based on modal interval analysis was developed to solve the damage assessment problems of beams with uncertain parameters. Firstly, the calculation models of a steel box beam and a reinforced concrete beam were established in which the uncertainties of the geometric and material parameters were defined by intervals. The intervals reflected the possible fluctuation ranges of the parameters. Then the beam statics equations were extended to their interval forms, which were further interpreted and expressed by the modal logic. After that, the interval working states of the critical strain points of the beam were calculated under certain concentrated loads. In the analysis the damage was simulated by decreasing elastic modulus of the beam elements. The analysis results given by the deterministic method, the classical interval algorithm and the modal

收稿日期:2018-07-04

基金项目:国家自然科学基金项目(51578158);福州大学“旗山学者”奖励支持计划项目(GXRC-1688)

作者简介:方圣恩(1980-),男,福建福清人,教授,博士研究生导师,工学博士,E-mail:shengen.fang@fzu.edu.cn。

interval analysis were compared to find the difference. The results show that different to the deterministic method, interval analysis allows the involvement of uncertain parameters and the strains within the intervals are regarded as rational values. On the contrary, the strains beyond the interval envelope imply the damage occurrence of the beams under the specific loads. Meanwhile, the interval envelope given by the modal interval analysis is obviously smaller than that given by the classical interval algorithm, which means that the former can effectively avoid the interval expansion during the calculation process. Furthermore, the modal interval analysis can early detect the beam damage, as well as the corresponding external load, which can avoid the further deterioration of the damage.

**Key words:** damage assessment; uncertainty; modal interval analysis; interval expansion; beam structures

## 0 引言

损伤评估作为结构健康监测的核心内容,应用于实际工程结构时必须要考虑不确定性因素,如材料非均质、边界条件不清晰、测试误差、模型误差等<sup>[1-2]</sup>,这就要求损伤识别问题的求解需要结合概率或非概率理论。可以采用概率可靠度理论<sup>[3-4]</sup>、模糊理论评估方法等<sup>[5]</sup>,一定程度上都能对结构损伤情况做出合理的评价,但要求准确给出不确定参数的概率密度函数或隶属度函数<sup>[6]</sup>。由于测试数据的缺乏和实际工程的复杂性,不确定性参数的分布类型经常难以描述或者不明确,导致计算误差较大。为了弥补这一不足,使用区间分析的非概率评估方法开始受到重视。Ben-Haim 等<sup>[7]</sup>首次提出了基于凸集合模型的非概率可靠性概念;Qiu 等<sup>[8]</sup>基于区间方法,认为非概率可靠性同不确定参量一样,应该是一个区间而非一个确定值;郭书祥等<sup>[9]</sup>将结构的不确定性参数扩展为区间变量,并基于区间分析提出了一种非概率可靠度分析方法。上述方法使用经典区间分析(Classical Interval Analysis, CIA),能够在一定程度上解决不确定性因素问题,但是存在区间扩张问题,这往往会导致结果不收敛或错误的结论。

模态区间分析(Modal Interval Analysis, MIA)是在经典区间分析的基础上发展起来的一种非概率分析方法<sup>[10-11]</sup>,可以避免经典区间算法容易发生的扩张问题。在事先确定变量波动区间的基础上,模态区间分析将普通方程扩展成区间方程,并通过逻辑语义扩张重新释义区间方程,计算得到目标区间。该区间包括了在合理范围内产生的所有可能结果,涵盖了系统工作的所有可能状态<sup>[12-13]</sup>。

本文基于模态区间分析理论提出一种考虑结构

不确定性参数的损伤评估方法,认为参数为具有上下限的区间数,从而将结构静力学方程扩展成区间方程,再根据模态区间释义和计算法则得到结构响应的区间包络线,最后通过对比模态区间包络线和确定值曲线的相交关系来判定结构是否损伤。同时对比了模态区间分析和经典区间算法、确定性方法的损伤评估结果。

## 1 经典与模态区间分析

### 1.1 经典区间分析

经典区间分析理论中,区间被定义成一组实数 $\{x|a \leq x \leq b\}$ ,表示成 $X=[a, b]$ ,可以看作由上下限 $a$ 和 $b$ 组成的一对有序实数,称为区间数。实数域 $\mathbf{R}$ 内的闭区间集合 $I(\mathbf{R})$ 表示为

$$I(\mathbf{R}) = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbf{R}, a \leq b\} \quad (1)$$

若 $\text{op}$ 表示实数的算法运算符,则相应的区间算法公式为

$$Z = X \text{op} Y = \{x \text{op} y \mid x \in X, y \in Y\} \quad (2)$$

区间 $Z$ 是区间运算 $X \text{op} Y$ 的结果,由 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 在运算中所有可能值组成。

若 $f$ 为在域 $X=(X_1, \dots, X_n)$ 上 $n$ 维变量 $x=(x_1, \dots, x_n)$ 的连续函数,其联合扩张函数 $R_f$ 的值域为

$$R_f(X_1, \dots, X_n) = [\min(x, X)f(x_1, \dots, x_n), \max(x, X)f(x_1, \dots, x_n)] \quad (3)$$

$f_R(X_1, \dots, X_n)$ 为 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的有理区间扩张函数,即 $f(x_1, \dots, x_n)$ 中的 $x_1, \dots, x_n$ 用 $X_1, \dots, X_n$ 代替,此时算子变成区间算子。

$$R_f(X_1, \dots, X_n) \subseteq f_R(X_1, \dots, X_n) \quad (4)$$

由式(4)可见, $f_R$ 计算的是区间的超界。由于在 $f_R$ 中丢失了 $R_f$ 中的许多信息,使得 $f_R$ 的计算结果边界变大,甚至是发散的。

## 1.2 模态区间分析

模态区间分析是区间数学和模态逻辑的结合,利用模态逻辑理论中的模态谓词逻辑对区间进行语义学解释,从而得到符合模态逻辑语义解释的区间分析方法<sup>[14]</sup>,即 MIA。为了避免混淆,用 $[a, b]'$ 表示经典区间, $[a, b]$ 表示模态区间。

假设实数域  $\mathbf{R}$  的闭区间集合  $I(\mathbf{R}) = \{[a, b]' \mid a, b \in \mathbf{R}, a \leq b\}$ , 以及存在量词  $E$  和全局量词  $U$ , 则模态区间定义为

$$X := (X', QX) \quad (5)$$

式中:  $X' \in I(\mathbf{R})$  称作逻辑扩张;  $QX \in (E, U)$  称作模态。

不同的实数可以有相同的绝对值,同时符号却相反。模态区间也有类似的性质,即每一个模态区间在实数轴上可以有相同的闭区间,但同时又有相反的选择模态,即  $E$ (存在)或  $U$ (全局)。模态区间集合  $I^*(\mathbf{R})$  表示为

$$I^*(\mathbf{R}) := \{(X', \{E, U\}) \mid X' \in I(\mathbf{R})\} \quad (6)$$

模态区间按照上下限大小关系可分为 2 类:  $\text{Prop}(A', QA) := (A', E) = ([a, b]', E) \in I^*(\mathbf{R})$ , 称作存在区间或规范区间;  $\text{Impr}(A', QA) := (A', U) = ([a, b]', U) \in I^*(\mathbf{R})$ , 称作全局区间或不规范区间。

在模态区间运算中,连续函数可以得到 2 个语义扩张函数  $f^*$  和  $f^{**}$ , 即若函数  $f$  在  $\mathbf{R}^n$  到  $\mathbf{R}$  上是连续函数,  $A \in I^*(\mathbf{R}^n)$ , 则

$$\begin{aligned} f^*(A) &= \bigvee (a_p, A'_p) \wedge (a_i, A'_i) [f(a_p, a_i), f(a_p, a_i)] = \\ &[\min(a_p, A'_p) \max(a_i, A'_i) f(a_p, a_i), \\ &\max(a_p, A'_p) \min(a_i, A'_i) f(a_p, a_i)] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f^{**}(A) &= \bigwedge (a_i, A'_i) \vee (a_p, A'_p) [f(a_p, a_i), f(a_p, a_i)] = \\ &[\max(a_i, A'_i) \min(a_p, A'_p) f(a_p, a_i), \\ &\min(a_i, A'_i) \max(a_p, A'_p) f(a_p, a_i)] \end{aligned} \quad (8)$$

式中:  $[f(a_p, a_i), f(a_p, a_i)]$  为点区间;  $(a_p, a_i)$  为模态区间  $A = (A_p, A_i)$  相应的划分部分, 其中  $A_p$  为  $A$  中包含规范子区间的子矢量,  $A_i$  为  $A$  中包含不规范子区间的子矢量。

对  $f^*$  定义的解释为: ① 下限求法, 将规范区间和不规范区间均划分为  $n$  份, 各产生  $n+1$  个值, 按顺序在规范区间中选定一个值, 对应不规范区间  $A_i$  中的  $n+1$  个值, 共有  $n+1$  组数据, 每组有  $n+1$  个数据, 在每组  $n+1$  个数据中选取最大值, 共得到  $n+1$  个最大值, 然后在这些最大值中选出最小值, 即为区间的下限; ② 模态区间的上限求法, 将规范区间和不规范区间均划分为  $n$  份, 各产生  $n+1$  个值, 按

顺序在规范区间中选定一个值, 对应不规范区间  $A_i$  中的  $n+1$  个值, 即共有  $n+1$  组数据, 每组有  $n+1$  个数据, 在每组  $n+1$  个数据中选取最小值, 共  $n+1$  个最小值, 然后在这些最小值中选出最大值, 即为区间的上限。

概念上  $f^{**}$  与  $f^*$  具有相似性, 主要区别在于选取最大值和最小值的顺序不一样。

## 1.3 函数算例

求解函数  $f = x_1^2 x_2 - 2x_1^2 + 2x_2^2$  在  $X_1 = [0, 1]$ ,  $X_2 = [2, 3]$  上的区间范围, 精确解为  $[8, 19]$ 。

首先运用 CIA 进行计算

$$\begin{aligned} f_R(X) &= X_1^2 X_2 - 2X_1^2 + 2X_2^2 = \\ &[0, 1][2, 3] - 2[0, 1] + 2[4, 9] = \\ &[0, 3] - [0, 2] + [8, 18] = \\ &[6, 21] \end{aligned}$$

由此可见, 采用 CIA 运算法则得到的区间范围大于精确解, 计算结果发生了区间扩张现象。采用 MIA 计算得到的函数值区间为  $[8, 19]$ , 与精确解相同。

## 2 钢箱梁算例

本文首先采用一根钢箱梁验证所提出的方法。简支单跨钢箱梁全长  $l = 1.8$  m, 计算简图和截面尺寸如图 1 所示,  $F$  为荷载。梁受到 2 个竖向集中力作用, 加载位置到左侧支点距离为  $a = 0.45$  m,  $b = 0.9$  m, 梁截面下缘抵抗矩  $W = 15.1 \times 10^{-6}$  m<sup>3</sup>, 弹性模量  $E = 200$  GPa。以跨中应变值作为损伤指标进行损伤识别, 计算公式

$$\sigma = E\epsilon = \frac{M}{W} \quad (9)$$

式中:  $\sigma$  为梁截面下缘点处应力;  $\epsilon$  为对应的应变;  $M$  为截面弯矩。

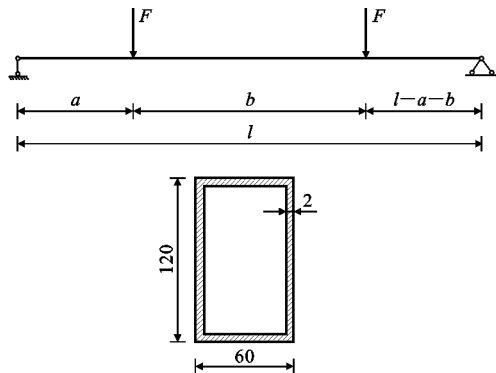


图 1 简支钢箱梁示意 (单位: mm)

Fig. 1 Schematic Diagram of Steel Box Beam (Unit: mm)

跨中应变  $\epsilon_{1/2}$  为

$$\epsilon_{1/2} = \frac{M_{1/2}}{WE} = \frac{F(l-a-b) + F(b+l-a-b) - Fb}{2WE} \tag{10}$$

式中:  $M_{1/2}$  为跨中弯矩。

将式(10)写成区间表达式

$$\epsilon_{1/2} = \frac{M_{1/2}}{WE} = \frac{F(L-A-B) + F(B+L-A-B) - FB}{2WE} \tag{11}$$

式中:假定  $L=[1.78, 1.82]$  m,  $A=[0.43, 0.47]$  m,  $B=[0.88, 0.92]$  m,  $W=[1.46, 1.56] \times 10^{-5}$  m<sup>3</sup>,  $E=[190, 210]$  GPa。

CIA 和 MIA 计算得到的应变结果区间列于表 1,同时采用各参数区间中值作为确定值,计算跨中确定性应变  $\epsilon$ 。第 6 个荷载步起,每荷载步  $E$  下降 10 GPa 来模拟损伤,在第 12 个荷载步时,  $E$  降为 130 GPa。

表 1 钢箱梁应变值

Tab. 1 Strain Values of Steel Box Beam							
荷载步	F/N		$\epsilon(\text{CIA})/10^{-6}$		$\epsilon(\text{MIA})/10^{-6}$		确定性 $\epsilon/10^{-6}$
	下限	上限	下限	上限	下限	上限	
1	950	1 050	933	2 165	1 131	1 930	1 490
2	1 900	2 100	1 865	4 329	2 262	3 861	2 980
3	2 850	3 150	2 798	6 494	3 393	5 791	4 470
4	3 800	4 200	3 730	8 659	4 524	7 722	5 960
5	4 750	5 250	4 663	10 824	5 655	9 652	7 450
6	5 700	6 300	5 595	12 988	6 786	11 583	9 411
7	6 650	7 350	6 528	15 153	7 917	13 513	11 590
8	7 600	8 400	7 460	17 318	9 048	15 443	14 024
9	8 550	9 450	8 393	19 483	10 179	17 374	16 763
10	9 500	10 500	9 325	21 647	11 310	19 304	19 868
11	10 450	11 550	10 258	23 812	12 441	21 235	23 415
12	11 400	12 600	11 190	25 977	13 572	23 165	27 509

由表 1 可见,CIA 计算的应变区间包络线包含了 MIA 的区间包络线,说明用 MIA 有效地避免了求解过程中参数的区间扩张现象。由图 2 可知,CIA 和 MIA 曲线(上下限)分别为方法能够容许的最大值和最小值,确定性应变曲线在 8.7 kN 和 10.5 kN 时分别与模态区间上限和经典区间上限曲线相交,可以认为在该荷载下结构出现了损伤。由之前损伤假设可知,第 6 荷载步时出现了损伤,8.7 kN 处于第 8,9 荷载步之间,说明 MIA 具有一定的识别滞后效应,这是由于此时损伤评估阈值是一个区间,不再是常规的确定值,因此确定性曲线与区间

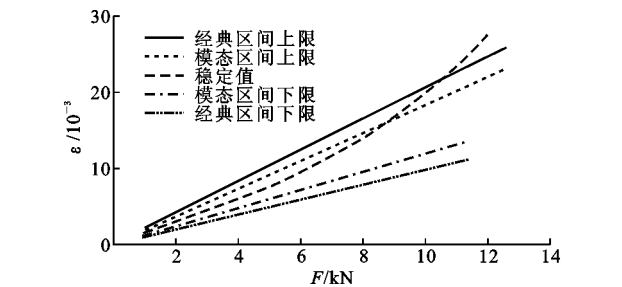


图 2 不同方法计算的应变(钢箱梁)  
Fig. 2 Strain Values Calculated by Different Methods(Steel Box Beam)

包络线相交是一个过程,从而发生了滞后。与此同时,CIA 在第 10,11 荷载步时才发现损伤,可见 MIA 能够提前于 CIA 识别到梁的损伤。总体上,由于区间算法将确定性参数扩展成区间,允许参数计算值在一定范围内波动,而确定性曲线与区间上限相交,表示其超过了区间算法容许的范围,就意味着损伤出现。

### 3 钢筋混凝土梁算例

本文进一步采用一根钢筋混凝土简支梁验证所提出的方法,如图 3 所示。该钢筋混凝土梁名义长度  $l=3$  m,于左侧三分点处受到一集中力  $F$  作用( $a=1$  m)。采用 C30 混凝土,弹性模量  $E_c=30$  GPa;纵筋为 HRB335 钢筋,弹性模量  $E_s=200$  GPa。由图 3 换算得到梁截面下缘抵抗矩  $W=1.75 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>。由式(9)求得加载点处的应变  $\epsilon_{1/3}$  为

$$\epsilon_{1/3} = \frac{M_{1/3}}{WE} = \frac{a(l-a)F}{lWE} \tag{12}$$

式中:  $M_{1/3}$  为加载点弯矩。

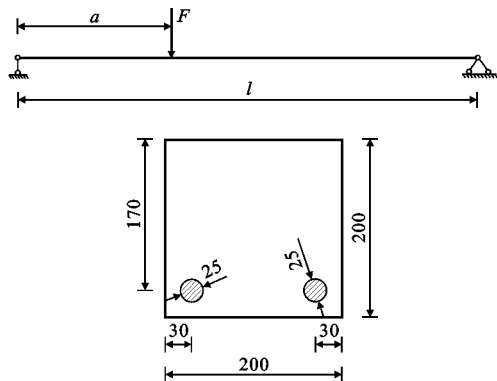


图 3 钢筋混凝土梁示意图(单位:mm)  
Fig. 3 Schematic Diagram of Reinforced Concrete Beam (Unit:mm)

将式(12)扩展为区间表达式,即

$$\epsilon_{1/3} = \frac{M_{1/3}}{WE} = \frac{A(L-A)F}{LWE} \tag{13}$$

式中:区间  $A=[0.95,1.05]$  m, $E=[28,32]$  GPa, $W=[1.7,1.8]\times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>。

重新对方程进行模态释义后,计算每个荷载步对应的应变结果,列于表 2。

表 2 钢筋混凝土梁应变值

Tab. 2 Strain Values of Reinforced Concrete Beam

荷载步	F/kN	$\epsilon(\text{MIA})/10^{-6}$		$\epsilon(\text{CIA})/10^{-6}$		确定性 $\epsilon/10^{-6}$
		下限	上限	下限	上限	
1	1	11.3	14.3	10.7	15.1	12.7
2	2	22.5	28.7	21.4	30.2	25.4
3	3	33.8	43.0	32.1	45.2	38.1
4	4	45.1	57.3	42.8	60.3	50.8
5	5	56.4	71.7	53.6	75.4	63.5
6	6	67.6	86.0	64.3	90.4	76.2
7	7	78.9	100.3	75.0	105.5	88.9
8	8	90.2	114.7	85.8	120.6	101.6
9	9	101.4	129.0	96.3	135.7	118.2
10	10	112.7	143.3	107.0	150.7	138.5
11	11	124.0	157.7	117.7	165.8	161.2
12	12	135.2	172.0	128.4	180.9	186.6
13	13	146.5	186.3	139.1	196.0	215.3

由表 2 可见,MIA 计算得到的区间包络线比 CIA 窄,说明前者能有效避免区间扩张现象。由图 4 可见: $F=10.5$  kN 时确定性应变曲线与 MIA 上限相交,即认为此时梁发生了损伤;在  $F=11.4$  kN 处确定应变曲线才与 CIA 上限相交,可见 MIA 可以比 CIA 更早识别出损伤,后者由于不可避免的区间扩张问题,导致了损伤识别的滞后。

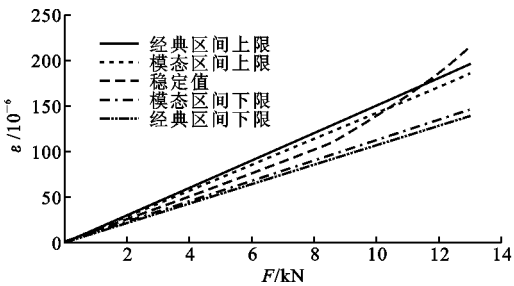


图 4 不同方法计算的应变(钢筋混凝土梁)  
Fig. 4 Strain Values Calculated by Different Methods (Reinforced Concrete Beam)

根据《水工混凝土结构设计规范》(SL 191—2008)<sup>[15]</sup>中开裂荷载计算公式,有

$$M_{cr}=\frac{\gamma_m f_{tk} I_0}{h-y_0} \tag{14}$$

$$I_0=(0.083+0.19\alpha_E\rho)bh^2 \tag{15}$$

$$y_0=(0.5+0.425\alpha_E\rho)h \tag{16}$$

计算得到  $M_{cr}=6\ 602$  N·m,对应的外荷载

$F=9.9$  kN,与 MIA 估计得到的 10.5 kN 接近,这是由于前述的滞后效应导致的。

相同限值下区间算法得到的开裂荷载会稍微滞后于确定值计算的理论开裂荷载。考虑到构件的加工和测量误差,实测构件的应变并不能严格按照确定值曲线分布,而是离散在一定区域内,所以仅凭确定性方法的计算结果一般不能判定结构是否损伤。区间算法则能将实测结果以区间形式表示,更符合实际情况。通过分析可知,CIA 总会发生区间扩张,损伤评估滞后于 MIA。后者能够更好地描述在不确定因素作用下结构的工作状态,并判断损伤时对应的外荷载。

4 结 语

(1)不确定性因素对结构损伤评估有一定影响,为了更贴近工程实际应用,可以采用区间数表示参数不确定性,将结构力学方程扩展为区间形式来求解,从而提高损伤识别结果的鲁棒性。

(2)通过结构响应的确定性曲线与对应的区间包络线相交情况,可以评估结构发生损伤的时刻,以及所对应的外荷载。

(3)MIA 能够有效避免区间计算过程的扩张现象,得到更加精确的结构响应区间包络线,相较于 CIA 能够更早发现结构损伤。MIA 具有一定的识别滞后效应,这是由于此时损伤评估阈值是一个区间,不再是常规的确定值。

参考文献:

References:

[ 1 ] SOHN H. Effects of Environmental and Operational Variability on Structural Health Monitoring[J]. Philosophical Transactions Mathematical Physical & Engineering Sciences,2007,365(1851):539-560.  
[ 2 ] 杨君坦,邱志平,李琦.含区间参数不确定结构的损伤识别方法[J].北京航空航天大学学报,2016,42(7):1509-1517.  
YANG Jun-tan,QIU Zhi-ping,LI Qi. Damage Detection of Structures with Interval Uncertain Parameters [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2016,42(7):1509-1517.  
[ 3 ] 吴启和.基于结构可靠度理论的钢筋混凝土梁桥的健康评估[D].成都:西南交通大学,2006.  
WU Qi-he. Healthy Assessment of the RC Beam Bridge Based on Structural Reliability Theory[D]. Chengdu:Southwest Jiaotong University,2006.  
[ 4 ] 陆春华,袁思奇.基于时变可靠度的锈蚀混凝土结构

- 全寿命成本模型[J]. 建筑科学与工程学报, 2017, 34(2): 71-78.
- LU Chun-hua, YUAN Si-qi. Life-cycle Cost Model of Corroded Concrete Structures Based on Time-varying Reliability[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2017, 34(2): 71-78.
- [5] 季征宇, 林少培. 受损结构安全度模糊评估理论的建立[J]. 建筑结构学报, 1995, 16(2): 51-57.
- JI Zheng-yu, LIN Shao-pei. Fuzzy Evaluation for Residual Carrying Capacity of Damaged Structures[J]. Journal of Building Structures, 1995, 16(2): 51-57.
- [6] 王晓军, 邱志平, 武哲. 结构非概率集合可靠性模型[J]. 力学学报, 2007, 39(5): 641-646.
- WANG Xiao-jun, QIU Zhi-ping, WU Zhe. Non-probabilistic Set-based Model for Structural Reliability[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, 39(5): 641-646.
- [7] BEN-HAIM Y, ELISHAKOFF I. Discussion on: A Non-probabilistic Concept of Reliability[J]. Structural Safety, 1995, 17(3): 195-199.
- [8] QIU Z, YANG D, ELISHAKOFF I. Combination of Structural Reliability and Interval Analysis[J]. Acta Mechanica Sinica, 2008, 24(1): 61-67.
- [9] 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. 计算力学学报, 2001, 18(1): 56-60.
- GUO Shu-xiang, LU Zhen-zhou, FENG Yuan-sheng. A Non-probabilistic Model of Structural Reliability Based on Interval Analysis[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2001, 18(1): 56-60.
- [10] 骆勇鹏, 黄方林, 韩建平, 等. 灵敏度的模态区间分析方法及其在不确定性参数识别中的应用[J]. 振动工程学报, 2016, 29(4): 577-584.
- LUO Yong-peng, HUANG Fang-lin, HAN Jian-ping, et al. A Sensitivity Modal Interval Analysis Method and Its Application to Uncertain Parameter Identification[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(4): 577-584.
- [11] 李宏男, 高东伟, 伊廷华. 土木工程结构健康监测系统的研究状况与进展[J]. 力学进展, 2008, 38(2): 151-166.
- Li Hong-nan, GAO Dong-wei, YI Ting-hua. Advances in Structural Health Monitoring Systems in Civil Engineering[J]. Advances in Mechanics, 2008, 38(2): 151-166.
- [12] 樊久铭, 王秋生, 徐敏强, 等. 基于模态区间分析的半定性故障诊断方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2007, 39(5): 774-778.
- FAN Jiu-ming, WANG Qiu-sheng, XU Min-qiang, et al. Semi-qualitative Fault Diagnosis Method Based on Modal Interval Analysis[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2007, 39(5): 774-778.
- [13] SEVILLANO E, SUN R, PERERA R. Damage Evaluation of Structures with Uncertain Parameters via Interval Analysis and FE Model Updating Methods[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2017, 24(4): e1901.
- [14] SAINZ M A, AMENGOL J, CALM R, et al. Modal Intervals[M]. Bern: Springer International Publishing, 2014.
- [15] SL 191—2008, 水工混凝土结构设计规范[S].
- SL 191—2008, Design Code for Hydraulic Concrete Structures[S].