

引用本文:李 钢,翟子杰,余丁浩.一种高效的阻尼器优化设计方法[J].建筑科学与工程学报,2020,37(5):51-61.

LI Gang, ZHAI Zi-jie, YU Ding-hao. An Efficient Optimal Design Method for Dampers[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2020, 37(5): 51-61.

DOI:10.19815/j.jace.2019.05106

# 一种高效的阻尼器优化设计方法

李 钢, 翟子杰, 余丁浩

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

**摘要:**以隔离非线性方法为基础,并对基于种群的可行性遗传算法进行改进,提出了一种高效的阻尼器优化设计方法。首先基于隔离非线性方法基本思想,分别推导了附加位移型和速度型阻尼器消能减震结构的隔离非线性控制方程;随后,采用基于种群可行性约束优化遗传算法对其中的初始种群生成方法及交叉、变异、选择算子进行改进,以提高算法在可行域边界附近的搜索能力;最后,通过对某钢结构增设金属阻尼器进行工程加固,验证了该方法的准确性和高效性。结果表明:新方法拓展了隔离非线性方法的应用范围,提高了遗传算法在可行域边界附近的搜索能力和设计中的计算效率,是一种高效的阻尼器优化设计方法。

**关键词:**消能减震结构;隔离非线性方法;阻尼器;优化设计;遗传算法

**中图分类号:** TU352.1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-2049(2020)05-0051-11

## An Efficient Optimal Design Method for Dampers

LI Gang, ZHAI Zi-jie, YU Ding-hao

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology,  
Dalian 116024, Liaoning, China)

**Abstract:** Based on inelasticity-separated finite element method (IS-FEM) and the improvement of genetic algorithm based on population feasibility, an efficient optimal design method for dampers was proposed. Firstly, based on the basic idea of IS-FEM, the isolation nonlinear control equations of structure equipped with displacement-based dampers and velocity-based dampers were derived respectively. Then, the constrained optimization genetic algorithm based on population feasibility was adopted and the population initialization method, crossover, mutation and selection operators were modified to improve the searching ability near feasible region boundary. Finally, a steel structure retrofit project with metallic yielding dampers was taken as example to verify the accuracy and efficiency of the proposed method. The results show that the new method expands the application range of IS-FEM, improves the search ability of genetic algorithm near the boundary of feasible region, and improves the calculation efficiency in design. The proposed method is an efficient optimization design method of damper.

**Key words:** energy dissipation structure; inelasticity-separated finite element method; damper; optimal design; genetic algorithm

收稿日期:2019-10-11

基金项目:国家重点研发计划项目(2018YFD1100404);国家自然科学基金项目(51878112);

大连市高层次人才创新支持计划项目(2017RD04)

作者简介:李 钢(1979-),男,辽宁葫芦岛人,教授,博士研究生导师,工学博士,E-mail:gli@dlut.edu.cn.

## 0 引言

阻尼器是消能减震结构的一个重要组成部分,中国现行抗震设计规范将阻尼器分为速度型和位移型 2 种,其中常用的速度型阻尼器有黏弹性阻尼器和黏滞阻尼器,主要利用其中黏弹性材料的剪切变形或活塞在黏滞性流体内的运动来耗散地震输入的能量;位移型阻尼器主要有摩擦阻尼器和金属阻尼器 2 种,前者通过摩擦片摩擦产生滞回耗能,后者通过金属材料本身的非线性变形来耗能。对于消能减震结构,阻尼器的布置及其各项参数对结构设计目标的实现具有显著影响,需通过阻尼器优化设计实现最佳的结构振动控制效果,为此,国内外学者对消能减震结构设计进行了一系列研究。Lin 等<sup>[1]</sup>提出了直接基于位移的消能减震结构设计方法,并给出了各阻尼器等效线性化公式。李钢等<sup>[2]</sup>研究了直接基于位移的设计方法,提出了基于实际地震记录位移谱的设计方法。周云等<sup>[3]</sup>针对附加位移型阻尼器的消能减震结构提出了基于性能的简化设计方法。翁大根等<sup>[4-5]</sup>分别针对黏滞阻尼器和金属阻尼器提出了实用化设计方法。

由于传统的消能减震结构设计方法依赖于工程师的设计经验,设计过程中需要对结构参数修正迭代,耗费大量时间,设计效率较低,因此随着计算机的应用和普及,大量的智能算法被引入消能减震结构优化设计中,包括拓扑优化方法、模拟退火方法、基于线性不等式的方法等<sup>[6-7]</sup>。随着遗传算法在结构优化设计中的广泛使用,国内外学者又将遗传算法引入到阻尼器优化设计中。Moreschi 等<sup>[8]</sup>采用遗传算法对预期减震效果下黏滞和黏弹性阻尼器的位置和参数优化进行了研究。Ren 等<sup>[9]</sup>针对形状记忆合金阻尼器,采用多目标遗传算法对阻尼器的数量和位置进行优化设计。Parcianello 等<sup>[10]</sup>针对非线性黏滞阻尼器,在阻尼指数确定的情况下,采用遗传算法对阻尼系数进行了优化设计。曲激婷等<sup>[11-12]</sup>分别对速度型和位移型阻尼器提出了新的目标函数,采用遗传算法对阻尼器位置优化进行了研究。由于大多数阻尼器本身具有非线性,为简化分析,很多设计方法将阻尼器进行了等效线性化处理,但是等效线性化方法不可避免地会引入较大误差。若直接采用非线性时程分析对消能减震结构进行动力计算,则可以得到较为准确的计算结果,但是这种方法计算量大,尤其需要反复试算时,设计效率较低。Li 等<sup>[13-15]</sup>提出了一种提高结构非线性分析效率的新方

法——隔离非线性方法(IS-FEM),该方法通过对材料或单元进行变形分解,建立单元的非线性变形场,并引入 Woodbury 公式,在非线性迭代时可避免结构整体刚度矩阵的实时更新和分解,取而代之的是对小规模的塑性矩阵进行相应运算,可显著提高非线性分析效率,尤其适用于局部非线性问题。在地震作用下,消能减震结构的非线性变形集中于阻尼器,主体结构保持弹性或者少量构件进入非线性,局部非线性特征明显,因此引入隔离非线性方法有助于提高消能减震结构的优化设计效率。在 ETABS 和 SAP2000 等软件中通常采用快速非线性分析方法(FNA)处理局部非线性问题,但是该方法只考虑连接单元的材料非线性,主体结构保持弹性<sup>[16]</sup>。事实上,在进行阻尼器优化设计时,通常难以保证主体结构始终处于弹性状态,而隔离非线性方法并未对非线性单元的位置做出要求,因此适用性更广。

本文以隔离非线性方法基本理论为基础,使用基于隔离非线性方法的纤维梁单元建立主体结构的分析模型,推导了位移型和速度型消能减震结构的隔离非线性控制方程,进一步结合基于种群可行性的约束优化遗传算法<sup>[17-19]</sup>,并改进遗传算法,使其适用于阻尼器参数优化设计,提出了一种消能减震结构中阻尼器准确、高效的优化设计方法。

## 1 基于隔离非线性的消能减震结构设计方法

### 1.1 隔离非线性基本理论

隔离非线性理论是以变形分解思想为基础发展而来的结构高效非线性算法,该方法将非线性应变分解为线弹性和非线性两部分,并引入额外的非线性自由度描述材料的非线性变形,可保持结构整体刚度矩阵不变,结构非线性行为仅通过规模较小的局部塑性矩阵进行描述,可实现非线性问题的高效计算<sup>[20]</sup>。本文以图 1( $u_{xi}, u_{yi}, u_{zi}$  分别为单元第  $i$  个节点的  $x, y, z$  方向的平动位移,  $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$  分别为单元第  $i$  个节点的  $x, y, z$  方向转动位移,  $i=1, 2$ )所示多层框架结构为例,阐述隔离非线性方法的基本思想和计算流程,该结构共有  $n$  个梁柱节点,假设每根梁柱使用 1 个单元进行模拟,结构总位移自由度  $m=6n$ 。当对该结构进行非线性分析时,若某个线性化增量迭代步中有少量单元进入非线性(图 1 中的单元),则将其截面变形增量分解为弹性和塑性两部分,其中塑性变形场通过插值形式进行模拟,为便于有限元计算,在图 1 所示单元中间 2 个高斯积

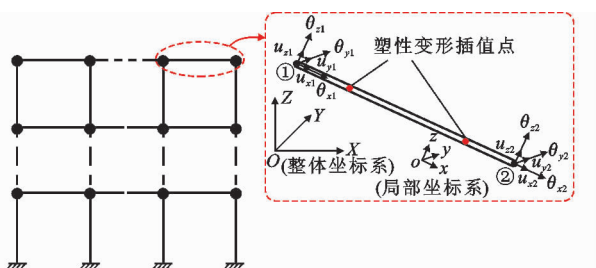


图 1 多自由度框架模型和梁柱单元

Fig. 1 MDOF Frame Model and Beam-column Element

分点处设立塑性变形插值点,非线性插值点处的截面变形分解表达式为

$$\Delta \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E}' + \Delta \mathbf{E}_{pr} \quad (1)$$

式中: $\Delta \mathbf{E}$ 、 $\Delta \mathbf{E}'$ 、 $\Delta \mathbf{E}_{pr}$  分别为非线性插值点处的截面变形增量、线弹性变形增量和非线性变形增量。

若该结构共有  $p$  个非线性自由度进入非线性状态,根据该结构此时的平衡方程及非线性插值点处的平衡条件,可得结构的隔离非线性控制方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & \mathbf{K}' \\ \mathbf{K}'^T & \mathbf{K}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ -\Delta \mathbf{E}_{pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{K}_e$  为  $m \times m$  阶整体弹性刚度矩阵,在动力分析中, $\mathbf{K}_e$  为包含阻尼项和质量项的有效刚度矩阵; $\Delta \mathbf{F}$ 、 $\Delta \mathbf{q}$  分别为  $m \times 1$  阶外荷载增量和节点位移增量; $\mathbf{K}'$  为  $m \times p$  阶矩阵,其中第  $i$  行  $j$  列的元素  $k'_{ij}$  代表在第  $j$  个非线性自由度发生单位塑性变形时,第  $i$  个节点位移自由度处的力; $\mathbf{K}_p$  为  $p \times p$  阶分块对角矩阵,包含结构所有进入塑性变形状态的单元非线性信息,其中第  $i$  行  $j$  列的元素  $k_{p,ij}$  代表该结构第  $j$  个非线性自由度发生单位塑性变形时,第  $i$  个非线性自由度处的力。

采用完全 Newton-Rapson 方法进行迭代计算,此时与非线性相关的矩阵  $\mathbf{K}'$ 、 $\mathbf{K}_p$  以及非线性自由度数  $p$  需在每一个迭代步中进行更新。由于结构通常仅局部区域进入塑性,非线性自由度数远小于结构的位移自由度数,即  $p \ll m$ ,因此在每次迭代时可采用 Woodbury 公式对式(2)进行高效求解,可得

$$\Delta \mathbf{q} = [\mathbf{K}_e^{-1} + \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}' (\mathbf{K}_p - \mathbf{K}'^T \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}')^{-1} \mathbf{K}'^T \mathbf{K}_e^{-1}] \Delta \mathbf{F} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{K}_p - \mathbf{K}'^T \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}'$  为代表局部塑性状态的小规模 Schur 补矩阵。

由于整体弹性刚度矩阵  $\mathbf{K}_e$  在分析中始终保持不变,因此只需在分析开始前对其进行一次 LDLT 分解,在分析过程中不需要再进行相应计算。从式(3)可以看出,隔离非线性方法的主要计算量在于

$p \times p$  阶 Schur 补矩阵的分解运算,相较于传统变刚度方法在迭代求解时对整体切线刚度矩阵( $m \times m$  阶)的反复更新与分解,隔离非线性方法可以显著提高非线性计算效率,在非线性自由度较少时,该方法的效率提升尤其明显。

## 1.2 附加位移型阻尼器计算方法

金属阻尼器作为位移型阻尼器的一种,因其构造简单、施工方便、造价低廉、性能稳定、力学模型简明等特点在工程抗震领域中得到了广泛应用。金属阻尼器消能单元通常由支撑和阻尼器两部分组成,如图 2(a) 所示,在隔离非线性理论的基础上,提出金属阻尼器消能单元的计算模型,如图 2(b) 所示(图 2 中  $q_1$ 、 $q_2$  分别为两节点轴向位移, $d_m$  为阻尼器塑性变形, $k_e$  为金属阻尼器弹性刚度, $F_d$ 、 $u_d$  分别为金属阻尼器极限承载力和极限位移, $F$  为力, $u$  为位移, $F_y$ 、 $U_y$  分别为屈服力和屈服位移, $\eta$  为屈服后刚度)。假设支撑的刚度无穷大,单元变形主要由阻尼器产生,单元的恢复力特性可通过双线性模型<sup>[21]</sup>或曲线滞回模型(Ramberg-Osgood 模型<sup>[22]</sup>或 Bouc-Wen 模型<sup>[23]</sup>)来描述,设计参数主要有金属阻尼器弹性刚度  $k_e$ 、屈服力  $F_y$ 、屈服位移  $u_y$  以及屈服后刚度系数  $\eta$ 。使用一个两端铰接的轴向弹簧单元对阻尼器单元的力-位移滞回关系进行等效模拟,如图 2(c) 所示,假设该轴向单元仅在局部  $x$  方向产生变形,则在迭代求解过程的任一线性化增量步中,单元节点位移的改变量可表示为

$$\Delta \mathbf{q} = [\Delta q_1 \quad \Delta q_2]^T \quad (4)$$

式中: $\Delta q_1$ 、 $\Delta q_2$  分别为 2 个节点处的位移增量。

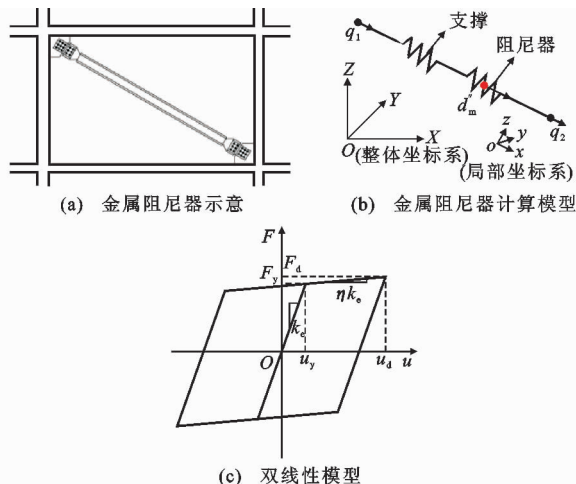


图 2 金属阻尼器单元与双线性模型

Fig. 2 Metallic Damper Element and Bilinear Model

消除刚体平动位移后,其单元轴向变形增量可表示为

$$\Delta d = \Delta q_2 - \Delta q_1 \quad (5)$$

式中:  $\Delta d$  为单元轴向变形增量。

根据隔离非线性理论,对单元轴向变形增量进行弹塑性分解

$$\Delta d = \Delta d' + \Delta d'' \quad (6)$$

式中:  $\Delta d'$ ,  $\Delta d''$  分别为弹性变形和塑性变形增量。

由于该阻尼器单元为变形均匀分布的轴向单元,因此可在单元中任一点处设立塑性变形插值点,插值函数  $C(x)=1$ ;弹性变形增量等于消能单元弹性刚度的逆(弹性柔度)与外力增量的乘积,即

$$\Delta d' = k_{e,d}^{-1} \Delta f \quad (7)$$

式中:  $k_{e,d}$  为单元弹性刚度;  $\Delta f$  为外力增量。

在任意线性化迭代增量步中,该单元力与变形关系还可以表示为

$$\Delta f = k_{t,d} \Delta d \quad (8)$$

式中:  $k_{t,d}$  为单元切线刚度。

将式(5),(6)代入式(7),可得该结构的平衡方程为

$$k_{e,d}(\Delta q_2 - \Delta q_1 - \Delta d'') = \Delta f \quad (9)$$

将式(8)代入式(9),整理并联立式(9)可得局部坐标系下金属阻尼器单元控制方程为

$$\begin{bmatrix} k_{e,d} & k_{e,d} \\ k_{e,d} & k_d'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta d \\ -\Delta d'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中:  $k_d'' = k_{e,d}^2 / (k_{e,d} - k_{t,d})$ 。

本文主体结构的分析模拟采用基于隔离非线性法的纤维梁单元建立,将式(10)转换到整体坐标系,并且与主体结构整体坐标系下的控制方程进行集成,可得消能减震结构的隔离非线性控制方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{e,d} & \mathbf{K}' & \mathbf{K}_d' \\ \mathbf{K}'^T & \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_d'^T & \mathbf{0} & \mathbf{K}_d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ -\Delta \mathbf{E}_{pr} \\ -\Delta \mathbf{E}_d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中:  $\mathbf{K}_{e,d}$  为消能单元整体坐标系下的弹性刚度矩阵;  $\mathbf{K}_d'$  为由各单元的  $k_d'$  组成的对角矩阵;  $\Delta \mathbf{E}_{pr}$ ,  $\Delta \mathbf{E}_d'$  分别为主体结构塑性插值点处的塑性变形增量和消能单元的塑性变形增量。

$\mathbf{K}_d'$  由消能单元塑性矩阵  $\mathbf{k}_{d,i}'$  组合而成

$$\mathbf{K}_d' = [\mathbf{k}_{d,1}' \cdots \mathbf{k}_{d,i}' \cdots] \quad (12)$$

第  $i$  个消能单元塑性矩阵  $\mathbf{k}_{d,i}'$  为

$$\mathbf{k}_{d,i}' = k_{e,d,i} [\cos(\theta_{x,i}) \cos(\theta_{y,i}) \cos(\theta_{z,i}) \cos(\theta_{x,i}) \cos(\theta_{y,i}) \cos(\theta_{z,i})]^T \quad (13)$$

式中:  $k_{e,d,i}$  中的下标  $i$  代表第  $i$  个消能单元;  $\theta_{x,i}$ ,  $\theta_{y,i}$ ,  $\theta_{z,i}$  分别为该单元与  $x$ ,  $y$ ,  $z$  轴正方向的角度。

由于摩擦阻尼器恢复力模型与金属阻尼器类似,主要区别在于滞回曲线形状有所不同<sup>[24]</sup>,因此

隔离非线性理论同样适用于摩擦阻尼器单元,摩擦阻尼器的恢复力模型可采用刚塑性模型,其摩擦起滑力对应金属阻尼器屈服力  $F_y$ ,起滑位移对应金属阻尼器屈服位移  $u_y$ ,屈服后刚度系数为 0。

### 1.3 附加速度型阻尼器计算方法

工程中常用的速度型阻尼器有黏滞阻尼器和黏弹性阻尼器,以黏弹性阻尼器为例,其计算模型可采用复刚度模型、Kelvin 模型或 Maxwell 模型<sup>[24]</sup>,如图 3(a),(b)所示,恢复力曲线如图 3(c)所示。假设支撑平面内刚度无穷大,其恢复力  $F_d$  可表示为

$$F_d = k_0 q - c_0 \text{sign}(\dot{q}) |\dot{q}|^\alpha \quad (14)$$

式中:  $k_0$  为弹性刚度;  $q$  为消能器两端的相对位移;  $c_0$  为阻尼系数;  $\alpha$  为阻尼指数;  $\dot{q}$  为消能器两端的相对速度。

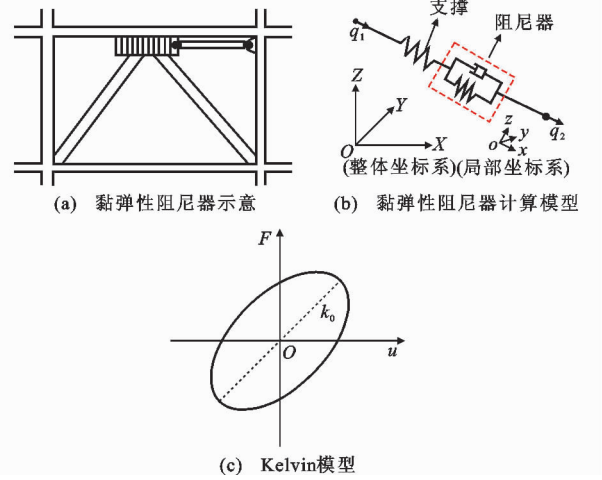


图 3 黏弹性阻尼器单元与 Kelvin 模型

Fig. 3 Viscoelastic Damper Element and Kelvin Model

在地震作用下,消能减震结构任一增量步中的动力方程可表示为<sup>[25]</sup>

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_d) \Delta \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_d) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{M} \mathbf{I} \Delta \ddot{\mathbf{x}}_g \quad (15)$$

式中:  $\mathbf{M}$  为主体结构质量矩阵;  $\mathbf{I}$  为元素全为 1 的列向量;  $\mathbf{C}$  为主体结构阻尼矩阵,可采用 Rayleigh 阻尼;  $\mathbf{K}$  为主体结构刚度矩阵;  $\mathbf{C}_d$  为阻尼器附加阻尼矩阵,可通过单元阻尼矩阵  $\mathbf{C}_d'$  组装到整体坐标系得到;  $\mathbf{K}_d$  为阻尼器附加刚度矩阵,可通过单元刚度矩阵组装到整体得到;  $\Delta \ddot{\mathbf{q}}$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ ,  $\Delta \ddot{\mathbf{x}}_g$  分别为加速度、速度和地震加速度增量。

单元阻尼矩阵为

$$\mathbf{C}_d' = -c_0 \alpha (|\mathbf{B}^e \dot{\mathbf{q}}^e|)^{\alpha-1} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \quad (16)$$

式中:  $\mathbf{B}^e$  为单元变形矩阵;  $\dot{\mathbf{q}}^e$  为单元速度增量。

在动力计算中,黏弹性阻尼器附加的刚度矩阵始终保持不变,附加阻尼矩阵与该增量步中的速度直接相关,因此呈现非线性特征,如果每一迭代步都

对整体有效刚度矩阵求逆将耗费大量的计算时间,因此结合隔离非线性基本思想将非线性阻尼项隔离,并将式(2)代入式(15)得

$$M\Delta\ddot{q} + C\Delta\dot{q} + (K_e + K_d)\Delta q = -MI\Delta\ddot{x}_g + K'\Delta E_{pr} - C_d\Delta\dot{q} \quad (17)$$

式(17)中符号左边各矩阵在非线性计算中均保持不变,非线性全部体现为等号右边的虚拟荷载,结合 Newmark 平均加速度方法对该运动方程进行处理可得

$$\tilde{K}_e\Delta q = \Delta\tilde{f} - C_d\Delta\dot{q} + K'\Delta E_{pr} \quad (18)$$

$$\tilde{K}_e = K_e + K_d + \frac{2}{\Delta t}C + \frac{4}{(\Delta t)^2}M$$

$$\Delta\tilde{f} = -MI\Delta\ddot{x}_g + \left(\frac{4}{\Delta t}M + 2C\right)\dot{q}_{t_{k-1}} + 2M\ddot{q}_{t_{k-1}}$$

式中: $\tilde{K}_e$ 、 $\Delta\tilde{f}$  分别为有效弹性刚度矩阵和有效荷载增量; $\dot{q}_{t_{k-1}}$ 、 $\ddot{q}_{t_{k-1}}$  分别为第  $k-1$  步时的速度和位移向量; $\Delta t$  为时间增量步。

将式(19)与式(3)联立可得基于隔离非线性的结构控制方程

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_e & K' \\ K'^T & K'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q \\ -\Delta E_{pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{f} - C_d\Delta\dot{q} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

采用式(19)求解时,由于等号右边荷载项中  $\Delta\dot{q}$  为未知项,因此需要进行迭代求解,求解前可将初始速度增量设为 0,或者直接采用上一步求解的速度增量为该增量步的初始速度增量,此外,由于该单元被当作宏观单元处理,因此不需要设置塑性变形插值点。

若黏弹性阻尼器的弹性刚度  $k_0 = 0$ ,则阻尼器为黏滞阻尼器;若阻尼指数  $\alpha = 0$ ,则阻尼器单元变为弹性弹簧单元,此时可将荷载项中的  $C_d\Delta\dot{q}$  移至方程左边并代入有效弹性刚度矩阵  $\tilde{K}_e$  中。

综上所述,基于隔离非线性方法求解附加黏弹性阻尼器的消能减震结构动力方程时,将黏弹性阻尼器恢复力模型中的弹性恢复力和非线性阻尼力隔离开,提高了求解效率,是一种高效的求解方法。

## 2 高效阻尼器参数优化设计

### 2.1 改进的基于种群可行性约束遗传算法

在阻尼器优化设计中,通常采用性能化设计方法,以层间位移角为约束条件,使消能减震结构在罕遇地震下满足既定的层间位移角要求。然而最优的阻尼器设计参数往往处在满足要求的最大层间位移角附近,如图 4 所示( $\theta_{\max}$  为计算得到的最大层间位移角, $\theta_{obj}$  为目标层间位移角),根据各组解是否满足

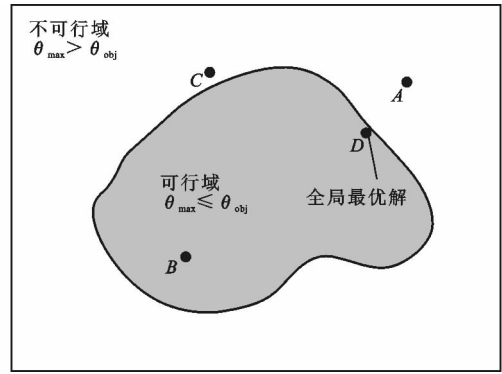


图 4 搜索空间

Fig. 4 Search Space

目标层间位移角要求可将其分为可行解与不可行解。

从图 4 可以看出,个体 A 虽然是不可行解,但是与可行解 B 相比,距离全局最优解 D 更近,对于求得全局最优解至关重要。由于在计算前全局最优解的位置并不能确定,如果采用罚函数法直接舍弃不可行解或者降低不可行解参与交叉遗传的概率,会导致算法搜索效率较差,甚至陷入局部最优,基于种群可行性的遗传算法在每代个体中均保证一定数量的可行解与不可行解参与交叉和变异,从不同搜索方向向全局最优解逼近,是一种求解最优解位于可行域边界附近约束优化问题的有效算法。因此本文将文献[17]~[19]提出的求解该类问题的遗传算法引入消能减震优化设计领域,并作出如下改进:

(1)采用 Sobol 序列映射阻尼器设计变量的初始值,使得初始种群在全决策空间范围有更均匀、多样的分布<sup>[26]</sup>,适用于初始种群数量较少的情形,阻尼器优化设计中包含大量弹塑性时程分析过程,种群数量不宜过多,因此采用该方法可以充分搜索整个解空间。

(2)在选择操作中,采用基于排序的适应度分配方法,将种群按适应度值大小进行排序,再按个体在种群中的排名决定个体被选中的概率。排序后的适应度为<sup>[27]</sup>

$$f_{\text{fitness}}(p_{\text{pos}}) = 2 - s_{\text{sp}} + \frac{2(s_{\text{sp}} - 1)(p_{\text{pos}} - 1)}{N - 1} \quad (20)$$

式中: $f_{\text{fitness}}$  为适应度值; $p_{\text{pos}}$  为个体在种群中的排名; $s_{\text{sp}}$  为选择压力,即最优个体选中的概率与平均选中概率的比值, $s_{\text{sp}} \in [0, 1]$ ;  $N$  为个体总数。

采用上述方法可以解决适应度值较大的个体使后代种群多样性急剧降低的问题。

(3)在交叉操作中,交叉产生的后代必定在两父

代个体的连线上,因此本文针对可行解的内部交叉及可行解与不可行解的交叉,提出新的交叉算子,使交叉操作具有导向性

$$\left. \begin{aligned} X_1^* &= \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \\ X_2^* &= \lambda X_2 + (1-\lambda)X_1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中: $X_1^*, X_2^*$  为交叉产生的 2 个新个体;若  $X_1, X_2$  均为可行解,那么参数  $\lambda \in [-1, 0] \cup [1, 2]$ ;若  $X_1, X_2$  分别为可行解与不可行解,那么  $\lambda \in [0, 1]$ 。

根据种群可行性对参数  $\lambda$  分别取值的目的是使新个体不断向可行域边界逼近,提高算法的搜索效率。

(4)在变异操作中,对可行解采用自适应的边界变异算子,即根据变异后适应度值的变化趋势自动选择变异为该基因位的最大值或最小值,使可行解向更优解方向变异;对不可行解采取高斯变异加强该算法的局部搜索能力。

2.2 高效阻尼器参数优化设计流程

本文结合改进的基于种群可行性约束遗传算法与隔离非线性方法,提出了适用于阻尼器优化设计的遗传算法 GAIS-FEM,图 5 给出该方法的主要流程:

(1)初选主体结构参数,计算主体结构在地震作用下的层间位移角。

(2)确定结构抗震设防目标,即消能减震结构所允许的最大层间位移角,并根据目标层间位移角预设对抗震性能影响不大或者较为固定的部分阻尼器参数值,如黏滞阻尼器的阻尼指数、金属屈服型阻尼器的屈服后刚度系数等,使遗传算法搜索区域集中在部分参数。

(3)采用 MATLAB 中 Sobol 伪随机数发生器,随机产生  $N$  组均匀分布的初始阻尼器参数,对各组参数下的消能减震结构进行 IS-FEM 非线性时程分析,具体分析计算流程如图 6(a)所示。对比传统计算方法[图 6(b)]可知,IS-FEM 计算流程可避免整体刚度矩阵的重复分解计算,提高计算效率。将各组解分为可行解和不可行解,若不存在可行解或不可行解,则重新产生  $N$  组初始参数,直到两部分解空间同时存在为止。

(4)对可行解按其目标函数值进行排序,根据式(20)计算其适应度;对不可行解按其违反度值或目标函数值排序,这样排序后选出的不可行解或者有最小的违反度值,或者有最低的目标函数值,从而提高了算法在解空间里的搜索能力。不可行解的违反度为

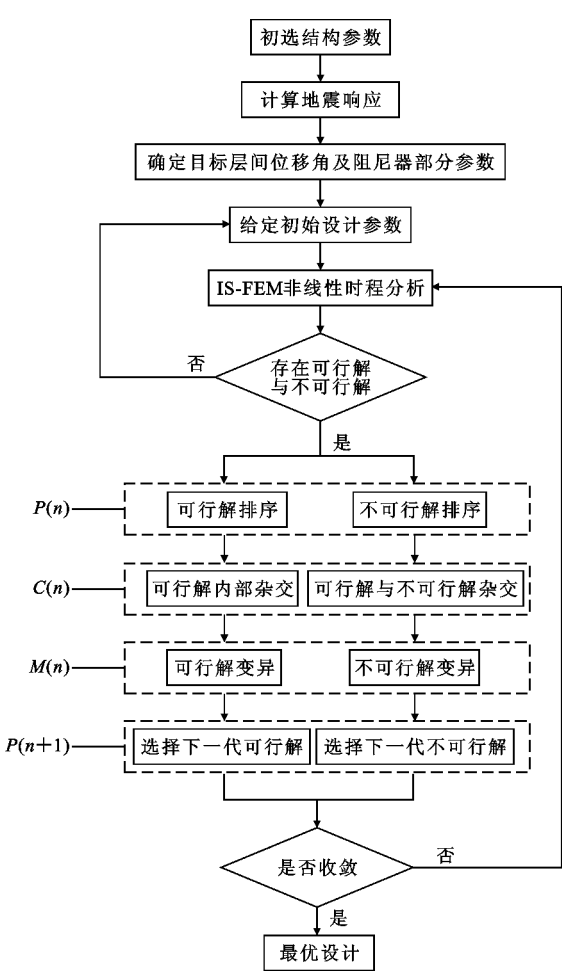


图 5 GAIS-FEM 流程图

Fig. 5 Flowchart of GAIS-FEM

$$v(\theta) = \sum_{i=1}^{18} \max\{0, \theta_i - \theta_{obj}\} \quad (22)$$

式中: $v(\theta)$ 为违反度函数; $\theta_i$ 为第  $i$  层的最大层间位移角。

当某个解为可行解时, $v=0$ ,否则  $v>0$ 。第  $n$  代所有可行解与不可行解记为  $P(n)$ 。

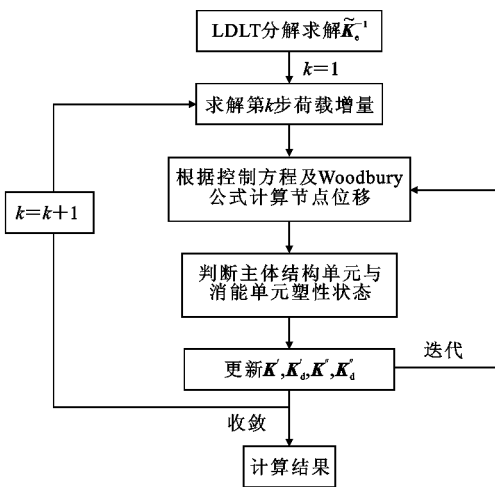
(5)按给定的交叉概率  $p_c$  对可行解和不可行解按式(21)进行交叉。对于可行解,首先找出当前最优解,将最优解和剩下的可行解进行交叉;对于不可行解,随机选出与其数量相等的可行解进行交叉,交叉得到的新解记为  $C(n)$ 。

(6)按给定的变异概率  $p_m$  对可行解和不可行解采取变异操作。变异后得到的新解记为  $M(n)$ 。

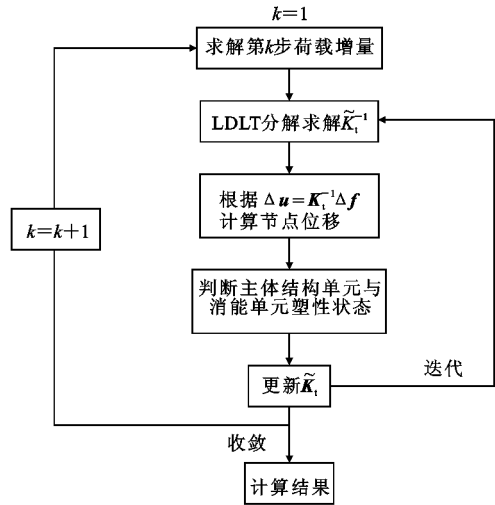
(7)在  $P(n) \cup C(n) \cup M(n)$  中采用随机遍历取样方法(SUS)选择  $N$  个下一代个体。

(8)若连续 5 代不再产生更优解或者达到定义的最大遗传代数,则认为该算法收敛,否则进入下一代计算。





(a) IS-FEM计算流程



(b) 传统计算方法

图 6 IS-FEM 计算流程与传统方法对比  
Fig. 6 Flowchart of IS-FEM Compared with Conventional Method

3 数值算例

3.1 工程概况

某 18 层钢框架结构需要进行加固设计,该结构模型平面和立面图如图 7 所示,首层层高 5.5 m,其余层高 4 m。抗震设防烈度为 8 度,Ⅱ类场地,设计地震分组为第 3 组(特征周期  $T_g=0.45\text{ s}$ )。梁和柱分别采用 H 形截面和箱形截面,材料为 Q235 钢,构件具体尺寸见表 1。楼屋面恒荷载为 4.6 kPa,楼屋面活荷载为 2.0 kPa。选跨中一榀框架建模分析,分析时考虑重力二阶效应,各层质量取该榀框架节点附近楼面荷载、填充墙荷载及其梁柱自质量之和,模型质量集中在梁柱节点处。

3.2 算例验证

为验证本文提出的基于隔离非线性的消能减震

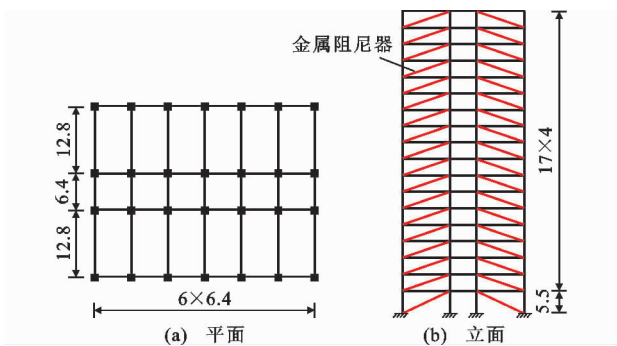


图 7 18 层钢框架平面和立面图(单位:m)

Fig. 7 Planer View and Vertical View of 18-story Steel Frame (Unit:m)

表 1 结构构件尺寸

Tab. 1 Dimension of Structure Members

层数	构件	截面尺寸
1~6 层	外柱	□500×500×50
	内柱	□500×500×42
7~12 层	外柱	□500×500×34
	内柱	□500×500×30
13~18 层	外柱	□500×500×25
	内柱	□500×500×19
1~18 层	横向梁	H700×300×14×25
	纵向梁	H700×300×14×28

结构计算方法的正确性,分别在 MATLAB 和 ABAQUS 有限元软件中建立消能减震结构进行动力计算。分别布置金属阻尼器和非线性黏滞阻尼器,金属阻尼器参数为:弹性刚度为  $60\text{ kN}\cdot\text{mm}^{-1}$ ,屈服力为 600 kN,屈服后刚度系数为 0.02。黏滞阻尼器参数为:阻尼系数为  $400\text{ kN}\cdot(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^{-0.8}$ ,阻尼指数为 0.8。主体结构采用考虑剪切变形的三维二阶 Timoshenko 梁单元(B32),2 种方法均采用纤维模型,其中 ABAQUS 中的纤维梁单元采用清华大学开发的 PQ-Fiber 子程序进行计算,金属阻尼器采用 Axial 连接单元进行模拟,黏滞阻尼器采用 Dashpot 阻尼单元模拟。分析中采用 Rayleigh 阻尼,结构阻尼比为 0.02。施加调幅至  $400\text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$  的 El Centro 地震激励,对比 2 种方法的顶点位移时程曲线,如图 8,9 所示。2 种方法计算的顶点位移时程曲线吻合较好,验证了基于隔离非线性的消能减震结构计算方法的正确性。

3.3 设计方案及优化算法参数设置

该工程设计方案如下:采用增设金属阻尼器的措施提高结构抗震性能,设计目标为罕遇地震下结构最大层间位移角不大于 1/200;目标函数为满足结构层间位移角要求所需阻尼器的最小总刚度,即

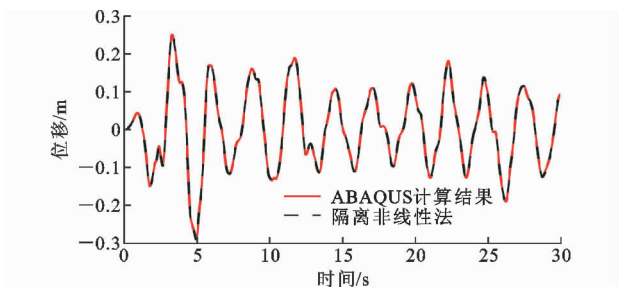


图 8 附加金属阻尼器(MYD)的结构位移对比  
Fig. 8 Displacement Comparison of Structures with MYD

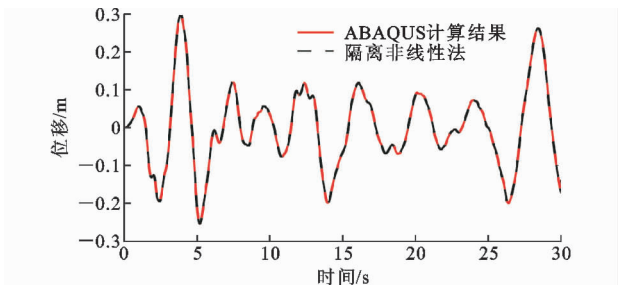


图 9 附加黏滞阻尼器(VD)的结构位移对比  
Fig. 9 Displacement Comparison of Structures with VD

$$\min f = \min \sum_{i=1}^N k_i \quad (23)$$
$$\text{s. t. } \theta_{\max} \leq 1/200$$

式中: $f$  为优化目标函数; $k_i$  为第  $i$  个阻尼器的弹性刚度。

阻尼器布置方案为每层边跨设置 2 个金属阻尼器,每 3 层阻尼器参数相同,共 6 个设计变量;为保证阻尼器具有一定的耗能能力,各层阻尼器屈服位移均设置为 6 mm。根据已有的阻尼器优化设计经验,GAIS-FEM 算法中采用的参数为:初始种群数量  $N=30$ ;最大遗传代数为 40;交叉概率  $p_c=0.85$ ;变异概率  $p_m=0.15$ ;线性排序选择压力  $s_{sp}=1.6$ 。

3.4 地震波选取

根据《建筑抗震设计规范》(GB 50011—2010)(以下简称抗规)中第 5.1.2 条的相关规定<sup>[28]</sup>,本工程选取了实际 2 条强震记录曲线(El Centro 波和 Taft 波)和 1 条人工模拟加速度时程曲线(兰州人工波),时程反应谱(THRS)与规范反应谱(CRS)曲线见图 10( $g$  为重力加速度),振型分解反应谱法和弹性时程分析得到的基底剪力如表 2 所示,符合抗规中的相关规定,因此 3 条波均可用于该工程设计。弹塑性时程分析中的地震波峰值加速度按照抗规 8 度罕遇地震的规定调整为  $400\text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$ 。

3.5 优化结果分析

从每代个体的最优解变化趋势(图11)可以看

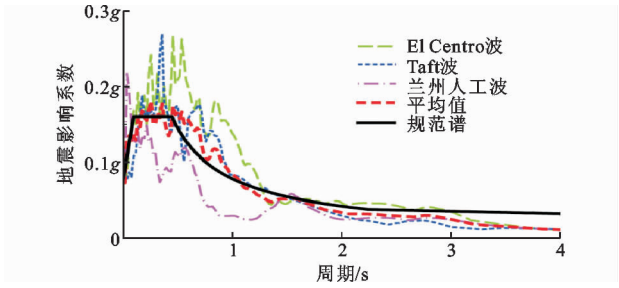


图 10 时程反应谱与规范反应谱对比  
Fig. 10 Comparison of THRS and CRS

表 2 振型分解反应谱法和弹性时程分析的基底剪力  
Tab. 2 Base Shear Force Derived from Mode Decomposition Response Spectrum and Elastic Time History Methods

地震波	$F_1/\text{kN}$	$F_2/\text{kN}$	$F_2/F_1$
El Centro 波	1 355.251	1 289.346	0.951 4
Taft 波	1 355.251	1 292.535	0.953 7
兰州人工波	1 355.251	985.506	0.727 2
平均值	1 355.251	1 189.129	0.877 4

注: $F_1$ 、 $F_2$  分别为振型分解反应谱法和弹性时程分析得到的基底剪力。

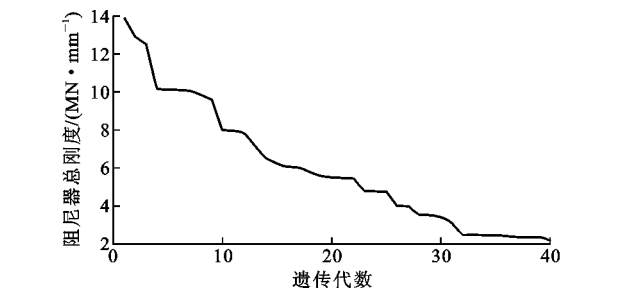


图 11 每代最优解变化趋势  
Fig. 11 Trend of Best Solution in All Generations

出,每一代群体都在向更优解发展,并且随着遗传代数的增多,边际收益开始下降,32 代以后基本保持平稳状态。图 12 为每代所有可行个体各基因位的方差平均值,随着遗传代数的增加,方差逐渐减小,优秀的基因(参数)被筛选和继承,因此可以认为 GAIS-FEM 算法计算结果较好。最终的设计结果如图 13、14 所示,图 13 为各层附加金属阻尼器的初始刚度,图 14 对比了无控结构和消能减震结构在 3 条强震作用下的最大层间位移角均值,可以发现 3 条地震波下消能减震结构的最大层间位移角均值从  $1/129.2$  降低到了  $1/201.1$ ,成功控制在  $1/200$  的约束条件边界上,因此该金属阻尼器设计方案对结构的位移控制较为准确;由图 14 中原结构层间位移角可以看出,无控结构层间位移角较大的位置出现在第 2、7、9、14 层,对比图 13 的最终设计参数可以发现,这些楼层附加阻尼器的初始刚度相较于其他楼



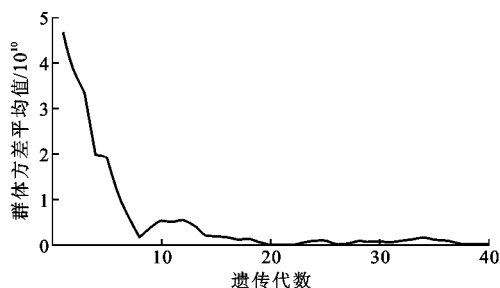


图 12 每代可行群体各基因位的方差平均值

Fig. 12 Mean Value of Variance for Each Gene Locus in All Generations

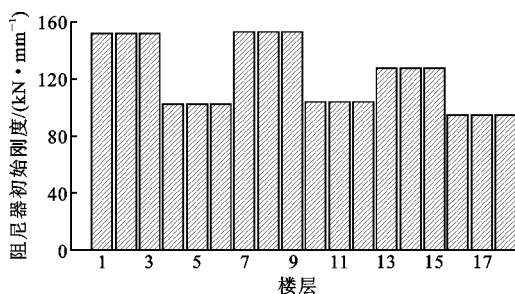


图 13 金属阻尼器的初始刚度最终设计结果

Fig. 13 Final Design Results of MYD Initial Stiffness

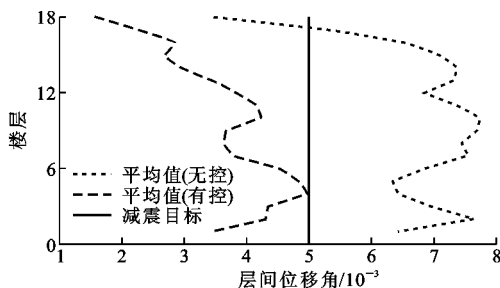


图 14 无控结构和消能减震结构最大层间位移角均值

Fig. 14 Maximum Story Drift Angle of Original Structure and Passive Energy Dissipation System

层更大,附加阻尼器后层间位移角显著减小,因此该算法可以准确地定位到薄弱层位置并加以强化,提高了整体结构的抗震能力。

### 3.6 效率分析对比

算法时间复杂度理论是一种算法效率定量评价方法,其本质是算法运行所需的计算工作量,是问题规模的函数,算法的时间复杂度越低,算法的效率越高。算法时间复杂度可从运行算法的实际计算机中抽象出来,该量化结果不依赖于计算机,因此被广泛用于效率评价。李钢等<sup>[29]</sup>基于算法时间复杂度理论给出了隔离非线性方法的时间复杂度计算公式,并且对比了一个非线性迭代步内隔离非线性方法和传统变刚度法的时间复杂度大小。本文采用该文献提出如下时间复杂度公式

$$T_1 = 4mb + \frac{d'^3}{3} + 3d'^2 + 4\alpha'd' + \frac{\beta d'}{2} + 1 - \frac{13d'}{3} - b^2 - m \quad (24)$$

$$T_2 = mb^2 + 8mb + m \quad (25)$$

式中:  $T_1, T_2$  分别为隔离非线性法和传统变刚度法在一个迭代步内的时间复杂度;  $b$  为整体弹性刚度矩阵的带宽;  $d'$  为非线性插值点处产生非线性的自由度数,即控制方程右下角塑性矩阵维数;  $\alpha'$  为控制方程右上角矩阵每列最大非零元的个数;  $\beta$  为控制方程右下角塑性矩阵每列最大非零元的个数。

在本文算例中,结构自由度总数  $m=432$ ,弹性刚度矩阵带宽  $b=226$ ,与非线性自由度数目相关的参数  $d', \alpha', \beta$  在计算中不断变化,因此具体数值不作详细说明。

在遗传算法每一代群体中,需要进行多次非线性时程分析,包含多个分析步及非线性迭代步。因此本文采用时间复杂度累加的形式,对比隔离非线性方法和传统变刚度法在 GAIS-FEM 中的效率,即

$$T_{1, \text{total}, i} = \sum T_1 \quad (26)$$

$$T_{2, \text{total}, i} = \sum T_2 \quad (27)$$

式中:  $T_{1, \text{total}, i}, T_{2, \text{total}, i}$  分别为第  $i$  代群体累加的隔离非线性法和传统变刚度法的时间复杂度。

由式(26), (27) 计算所得的每代累积的时间复杂度如图 15 所示,其纵坐标采用对数坐标。选取代表性遗传代数的时间复杂度大小,见表 3。由表 3 可以看出,采用隔离非线性方法所需的时间复杂度约为传统变刚度法的 1.46%, 因此 GAIS-FEM 是一种高效的阻尼器优化设计方法。

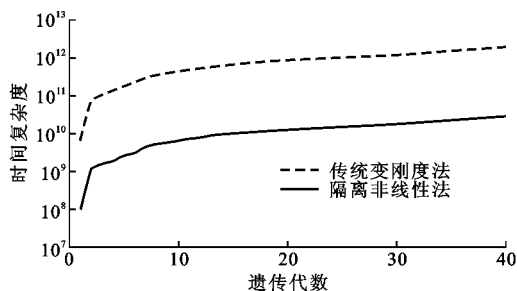


图 15 隔离非线性法与变刚度法的时间复杂度

Fig. 15 Time Complexity of IS-FEM and Variable Stiffness Method

## 4 结 语

(1) 本文基于隔离非线性理论,实现了阻尼器消能单元开发应用,拓展了隔离非线性方法的应用范围。

表 3 2 种方法时间复杂度对比

Tab. 3 Comparison of Time Complexity of Two Methods

遗传代数	$T_1$	$T_2$	$T_2/T_1$
10	$6.390\times10^9$	$4.30\times10^{11}$	67.29
20	$1.244\times10^{10}$	$8.37\times10^{11}$	67.30
30	$1.759\times10^{10}$	$1.18\times10^{12}$	67.30
40	$2.834\times10^{10}$	$1.91\times10^{12}$	67.28

(2)本文改进了基于种群可行性的遗传算法,使其适用于阻尼器参数优化设计,并且提高了遗传算法在可行域边界附近的搜索能力。

(3)本文提出的基于隔离非线性的阻尼器优化设计方法通过对局部塑性矩阵的更新分解,避免了对整体刚度矩阵进行相应运算,提高了计算效率,是一种高效的阻尼器优化设计方法。

参考文献:

References:

[ 1 ] LIN Y Y, TSAI M H, HWANG J S, et al. Direct Displacement-based Design for Building with Passive Energy Dissipation Systems[J]. Engineering Structures, 2003, 25(1): 25-37.

[ 2 ] 李 钢, 李宏男. 基于位移的消能减震结构抗震设计方法[J]. 工程力学, 2007, 24(9): 88-94.

LI Gang, LI Hong-nan. Direct Displacement-based Design for Buildings with Passive Energy Dissipation Devices[J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(9): 88-94.

[ 3 ] 周 云, 汤统壁, 邓雪松, 等. 耗能减振结构基于性能简化抗震设计方法研究[J]. 土木工程学报, 2008, 41(6): 14-21.

ZHOU Yun, TANG Tong-bi, DENG Xue-song, et al. A Study on Simplified Performance-based Seismic Design Method for Structures with Dampers[J]. China Civil Engineering Journal, 2008, 41(6): 14-21.

[ 4 ] 翁大根, 张 超, 吕西林, 等. 附加黏滞阻尼器减震结构实用设计方法研究[J]. 振动与冲击, 2012, 31(21): 80-88.

WENG Da-gen, ZHANG Chao, LÜ Xi-lin, et al. Practical Design Procedure for a Energy-dissipated Structure with Viscous Dampers[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(21): 80-88.

[ 5 ] 翁大根, 杨 凯, 张 超. 消能减震结构附加金属消能器的简化设计方法[J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2013, 41(4): 629-639.

WENG Da-gen, YANG Kai, ZHANG Chao. A Simplified Design Procedure for Energy-dissipated Structure with Metallic Dampers[J]. Journal of Fuzhou Univer-

sity: Natural Science Edition, 2013, 41(4): 629-639.

[ 6 ] TAKEWAKI I. Optimal Damper Placement for Minimum Transfer Functions[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1997, 26(11): 1113-1124.

[ 7 ] YANG J N, LIN S, KIM J H, et al. Optimal Design of Passive Energy Dissipation Systems Based on  $H_\infty$  and  $H_2$  Performances[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2002, 31(4): 921-936.

[ 8 ] MORESCHI L M, SINGH M P. Design of Yielding Metallic and Friction Dampers for Optimal Seismic Performance[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2003, 32(8): 1291-1311.

[ 9 ] REN W, HUI Q, SONG W, et al. Optimal Design of Dampers Within Seismic Structures[J]. Proceedings of SPIE — The International Society for Optical Engineering, 2009, 7493: 1-7.

[10] PARCIANELLO E, CHISARI C, AMADIO C. Optimal Design of Nonlinear Viscous Dampers for Frame Structures[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2017, 100: 257-260.

[11] 曲激婷, 李宏男. 粘弹性阻尼器在结构减震控制中的位置优化研究[J]. 振动与冲击, 2008, 27(6): 87-91, 189.

QU Ji-ting, LI Hong-nan. Optimal Placement of Viscoelastic Dampers for Passive Response Control[J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(6): 87-91, 189.

[12] 曲激婷, 李宏男, 李 钢. 位移型消能器在结构减震控制中的位置优化研究[J]. 工程力学, 2009, 26(1): 43-48.

QU Ji-ting, LI Hong-nan, LI Gang. Optimal Placement of Displacement-based Energy Dissipative Devices for Passive Response Control[J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(1): 43-48.

[13] LI G, YU D H. Efficient Inelasticity-separated Finite-element Method for Material Nonlinearity Analysis [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2018, 144(4): 04018008.

[14] LI G, YU D H, LI H N. Seismic Response Analysis of Reinforced Concrete Frames Using Inelasticity-separated Fiber Beam-column Model[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2018, 47(5): 1291-1308.

[15] YU D H, LI G, LI H N. Improved Woodbury Solution Method for Nonlinear Analysis with High-rank Modifications Based on a Sparse Approximation Approach [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2018, 144(11): 04018103.

- [16] 宁虎城. 采用快速非线性分析法对粘滞阻尼结构的抗震性能研究[D]. 成都:西南交通大学,2010.  
NING Hu-cheng. Seismic Study on Structure with Viscous Dampers by Fast Nonlinear Analysis[D]. Chengdu:Southwest Jiaotong University,2010.
- [17] 梁昔明,龙 文,秦浩宇,等. 基于种群个体可行性的约束优化进化算法[J]. 控制与决策,2010,25(8):1129-1132,1138.  
LIANG Xi-ming, LONG Wen, QIN Hao-yu, et al. Constrained Optimization Evolutionary Algorithm Based on Individual Feasibility of Population[J]. Control and Decision,2010,25(8):1129-1132,1138.
- [18] 吴华伟,陈特放,黄伟明,等. 一种新的约束优化遗传算法及其工程应用[J]. 计算机应用研究,2013,30(2):367-370.  
WU Hua-wei, CHEN Te-fang, HUANG Wei-ming, et al. Novel Constrained Optimization Genetic Algorithm and Its Engineering Applications[J]. Application Research of Computers,2013,30(2):367-370.
- [19] 万建妮,李和成. 一种求解约束优化问题基于混合遗传算子的遗传算法[J]. 运筹与模糊学,2014,4(1):1-6.  
WAN Jian-ni, LI He-cheng. A Genetic Algorithm Based on Hybrid Genetic Operators for Solving Constrained Optimization Problems[J]. Operations Research and Fuzziology,2014,4(1):1-6.
- [20] AKGUN M A, GARCELON J H, HAFTKA R T. Fast Exact Linear and Non-linear Structural Reanalysis and the Sherman-Morrison-Woodbury Formulas[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,2001,50(7):1587-1606.
- [21] ZHANG R F, WANG C, PAN C, et al. Simplified Design of Elastoplastic Structures with Metallic Yielding Dampers Based on the Concept of Uniform Damping Ratio[J]. Engineering Structures,2018,176:734-745.
- [22] SKELTON R P, MAIER H J, CHRIST H J. The Bauschinger Effect, Masing Model and the Ramberg-Osgood Relation for Cyclic Deformation in Metals[J]. Materials Science and Engineering A,1997,238(2):377-390.
- [23] IKHOUANE F, MANOSA V, RODELLAR J. Dynamic Properties of the Hysteretic Bouc-Wen Model[J]. Systems & Control Letters,2007,56(3):197-205.
- [24] 陈廷君. 消能减震结构设计方法的比较研究[D]. 上海:同济大学,2008.  
CHEN Ting-jun. Comparative Study on Design Method of Structure with Energy Dissipation[D]. Shanghai:Tongji University,2008.
- [25] 汤昱川,张玉良,张铜生. 粘滞阻尼器减震结构的非线性动力分析[J]. 工程力学,2004,21(1):67-71,158.  
TANG Yu-chuan, ZHANG Yu-liang, ZHANG Tong-sheng. Nonlinear Dynamic Analysis of Structures with Viscous Dampers[J]. Engineering Mechanics,2004,21(1):67-71,158.
- [26] JOE S, KUO F Y. Remark on Algorithm 659: Implementing Sobol's Quasirandom Sequence Generator[J]. ACM Transactions on Mathematical Software,2003,29(1):49-57.
- [27] 王小平,曹立明. 遗传算法——理论、应用与软件实现[M]. 西安:西安交通大学出版社,2002.  
WANG Xiao-ping, CAO Li-ming. Genetic Algorithm: Theory, Application and Software Realization[M]. Xi'an:Xi'an Jiaotong University Press,2002.
- [28] GB 50011—2010, 建筑抗震设计规范[S].  
GB 50011—2010, Code for Seismic Design of Buildings[S].
- [29] 李 钢,贾 硕,李宏男. 基于算法复杂度理论的拟力法计算效率评价[J]. 计算力学学报,2018,35(2):129-137.  
LI Gang, JIA Shuo, LI Hong-nan. The Efficiency Evaluation of Force Analogy Method Based on the Algorithm Complexity Theory[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics,2018,35(2):129-137.