

引用本文:任伟,李敬泉,李晓路.带翼缘截面混凝土受压区等效应力图系数研究[J].建筑科学与工程学报,2022,39(6):87-93.  
REN Wei, LI Jing-quan, LI Xiao-lu. Study on Equivalent Stress Diagram Coefficient of Concrete Compression Zone with Flange Section[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2022, 39(6): 87-93.

DOI:10.19815/j.jace.2021.09078

# 带翼缘截面混凝土受压区等效应力图系数研究

任伟<sup>1</sup>, 李敬泉<sup>1</sup>, 李晓路<sup>2</sup>

(1. 长安大学 旧桥检测与加固技术交通运输行业重点实验室·陕西 西安 710064;  
2. 广东省交通运输规划研究中心·广东 广州 510101)

**摘要:**针对带翼缘截面混凝土受压区等效应力图系数 $\alpha$ 和 $\beta$ 计算方法空缺的问题,以截面平衡为建立基本方程的唯一条件,得到了考虑截面几何参数和材料参数的带翼缘截面等效应力图系数的解析解,分析了截面几何参数对等效应力图系数的影响。为提高解析公式的可应用性,对解析解进行了再拟合处理,得到了拟合度较高的 $\alpha$ 和 $\beta$ 简化计算公式,并给出了常用截面等效应力图系数的建议值。结果表明:等效应力图系数 $\alpha$ 随梁腹板宽度与翼缘板宽度的比值 $b/b_f$ 的增大而减小,随翼缘板厚度与截面有效高度的比值 $h_f/h_0$ 的增大而增大,总体呈曲面变化特征; $\beta$ 随 $b/b_f$ 的增大而增大,随 $h_f/h_0$ 的变化呈曲线变化,总体呈微扭曲面变化特征;推荐的简化公式精确度较高,可直接应用于带翼缘混凝土截面的分析计算中,等效应力图系数建议值可为混凝土规范的修订提供科学支撑。

**关键词:**混凝土结构;带翼缘截面;等效应力图系数;解析解;简化算法

中图分类号:U445.72

文献标志码:A

文章编号:1673-2049(2022)06-0087-07

## Study on Equivalent Stress Diagram Coefficient of Concrete Compression Zone with Flange Section

REN Wei<sup>1</sup>, LI Jing-quan<sup>1</sup>, LI Xiao-lu<sup>2</sup>

(1. Key Laboratory of Transport Industry of Bridge Detection Reinforcement Technology, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China; 2. Guangdong Provincial Transportation Planning and Research Center, Guangzhou 510101, Guangdong, China)

**Abstract:** Aiming at the problem that the calculation method of the equivalent stress diagram coefficient  $\alpha$  and  $\beta$  of concrete compression zone with flange section is vacant, the analytical solutions of the equivalent stress diagram coefficient of the flange section considering the geometric parameters and material parameters of the section were obtained by taking the section balance as the only condition for establishing the basic equation, and the influence of the geometric parameters on the equivalent stress diagram coefficient was analyzed. In order to improve the applicability of the analytical formula, the analytical solution was refitted, and the simplified calculation formulas of  $\alpha$  and  $\beta$  with high fitting degree were obtained, and the recommended values of the equivalent stress diagram coefficients of the commonly used cross-

收稿日期:2021-09-23

基金项目:国家重点研发计划项目(2021YFB1600300);陕西省自然科学基础研究计划项目(2021JM-171)

作者简介:任伟(1975-),男,陕西西安人,副教授,工学博士,博士后,E-mail:rw20062@163.com。

通信作者:李晓路(1983-),女,陕西西安人,工程师,工学硕士,E-mail:4224170@qq.com。

section were given. The results show that the coefficient  $\alpha$  decreases with the increase of the ratio of beam web width to flange plate width  $b/b_f$ , and increases with the increase of the ratio of flange plate thickness to section effective depth  $h_f/h_0$ , showing the characteristics of surface variation.  $\beta$  increases with the increase of  $b/b_f$ , and shows a curve change with the change of  $h_f/h_0$ , showing the characteristics of slightly distorted surface. The recommended simplified formula has high accuracy and can be directly applied to the analysis and calculation of concrete section with flange. The recommended value of equivalent stress diagram coefficient can provide scientific support for the revision of concrete specification.

**Key words:** concrete structure; flange section; equivalent stress diagram coefficient; analytical solution; simplified calculation method

## 0 引言

钢筋混凝土压弯构件正截面极限承载力的计算方法是基于平截面假定的计算理论得出的,在实用计算中,受压混凝土的应力分布可以通过引入矩形应力图系数 $\alpha$ (等效应力图应力与混凝土应力-应变曲线峰值应力的比值)和 $\beta$ (等效应力图高度与中轴到受压边缘距离的比值)将其等效为矩形应力图。该方法概念清晰,易于建立平衡方程,不需要了解混凝土应力分布的准确形状。

《混凝土结构设计规范》中直接给出了不同强度等级混凝土受压区等效矩形应力图系数 $\alpha$ 和 $\beta$ 的取值<sup>[1]</sup>。相关文献也对其计算方法进行了说明,并对某些强度等级的等效矩形应力图系数进行了试算,如过镇海<sup>[2]</sup>在《钢筋混凝土原理》中推导并给出了C50以下的混凝土受压区等效矩形应力图系数表达式。张树仁等<sup>[3]</sup>在理论分析和试验研究的基础上,针对钢筋混凝土圆、环形截面偏心受压构件提出了在强度计算中采用混凝土矩形应力块换算系数的设计建议。王文炜<sup>[4]</sup>从混凝土正截面受弯承载力基本假定出发,推导出了C50以下混凝土受压区等效矩形应力图系数表达式。王庆华等<sup>[5]</sup>采用MATLAB数学工具给出了三角形截面、圆形截面的受压区等效矩形应力图系数。刘凤翰<sup>[6]</sup>对正截面设计中 $\alpha$ 和 $\beta$ 等系数进行分析研究,并提出非矩形四边形梁等其他形式截面采用 $\alpha$ 和 $\beta$ 等系数的计算方法。丁亚进等<sup>[7]</sup>采用力的等效原理,通过不定积分计算器推导出普通和高强混凝土受压区等效矩形应力图系数通用表达式。朱莉萍等<sup>[8]</sup>对圆形截面偏心受压构件的压区混凝土等效应力图形的特征参数做了详细计算分析,提出了参数取值的建议。孙铁锋等<sup>[9]</sup>利用换元积分等方法,对矩形、圆形、等腰三角形截面的压区混凝土等效矩形应力图特征参数计算方法的简

化进行了探讨。Naaman<sup>[10]</sup>对T形截面进行了讨论,重点对何时可以将T形截面简化成矩形截面进行了论述。Singh等<sup>[11]</sup>提出在IS 456—2000中,对于等级高于M55的混凝土,给定的设计参数可能不适用,他通过试验应变值计算应力块参数 $K$ (强度折减系数)和 $k_2$ (合压力深度系数),并给出了等效应力块参数的计算方法。

然而,大量的混凝土桥梁多采用带翼缘的T形、箱形、π形和工字形截面,该类截面与矩形截面相比,几何形状明显复杂了许多<sup>[12-17]</sup>。系数 $\alpha$ 和 $\beta$ 与诸多因素有关,其中截面形状的几何要素为主要敏感变量之一<sup>[18-19]</sup>,因此上述截面的计算不能盲目按规范建议的矩形截面取值。

因此,本文基于矩形截面的静力等效算法,借助MATHEMATICA强大的符号运算功能,对带翼缘截面混凝土受压区等效应力图系数 $\alpha$ 和 $\beta$ 进行解析分析,并针对解析解答过于冗长的问题,采取了数据变换拟合的方法,给出了简化计算公式。本文推荐的简化公式为相关工程技术人员提供了直接可用的简化算法,也可为规范标准的修订提供科学支撑。

## 1 带翼缘截面等效应力图系数

### 1.1 矩形截面等效应力图系数

在混凝土正截面强度计算中,混凝土应力-应变关系被简化为曲线段和直线段,为进一步简化计算,又采用 $\alpha$ 和 $\beta$ 对混凝土应力分布进行了矩形等效替换。等效应力图的换算原则为:①等效前后合力大小不变;②等效前后合力作用位置不变。

现有成果显示,当正截面混凝土极限压应变 $\epsilon_{cu}=0.0033$ ,混凝土压应力达到抗压强度设计值且压应变 $\epsilon_0=0.002$ 时, $\alpha=0.969$ , $\beta=0.824$ 。当混凝土强度等级大于C50时,可按表1取值。



$$M_4 = \alpha f_c X b (x_c - \frac{1}{2} X) \quad (14)$$

$$M_5 = \alpha f_c h_f (b_f - b) (x_c - \frac{1}{2} h_f) \quad (15)$$

当  $X = \beta x_c$  在翼缘时

$$F_6 = \alpha f_c X b_f \quad (16)$$

$$M_6 = \alpha f_c X b_f (x_c - \frac{1}{2} X) \quad (17)$$

式中:  $F_4, M_4$  分别为区域①的合力、合力矩;  $F_5, M_5$  分别为区域②的合力、合力矩;  $F_6, M_6$  分别为合力、合力矩。

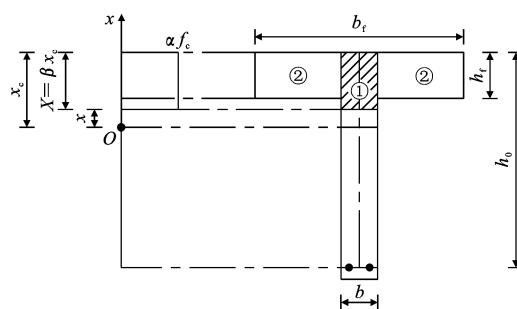


图 2 截面分析 2

Fig. 2 Section Analysis 2

### 1.2.4 求解

方程求解也分情况进行。

当  $x_0$  在腹板, 即  $x_0 < x_c - h_f$  时

$$\left. \begin{array}{l} F_1 + F_2 = F_4 + F_5 \\ M_1 + M_2 = M_4 + M_5 \end{array} \right\} \quad (18)$$

当  $x_0$  在翼缘, 即  $x_0 \geq x_c - h_f$  时

$$\left. \begin{array}{ll} F_1 + F_2 = F_4 + F_5 & X \geq h_f \\ F_1 + F_3 = F_6 & X < h_f \end{array} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{array}{ll} M_1 + M_2 = M_4 + M_5 & X \geq h_f \\ M_1 + M_3 = M_6 & X < h_f \end{array} \right\} \quad (20)$$

## 2 参数分析

### 2.1 有效解

根据图 1 可以得出

$$x_0 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{cu}} x_c \quad (21)$$

$$x_c = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} h_0 \quad (22)$$

取  $\epsilon_0$  为 0.002,  $\epsilon_{cu}$  为 0.003 3,  $\epsilon_s$  为 0.001 675, 得

$$x_0 = 0.402 414 h_0 \quad (23)$$

$$x_c = 0.663 984 h_0 \quad (24)$$

将常规截面几何构造尺寸代入式(23)、(24), 并绘制出图 3。可以看出  $x_0 < x_c - h_f$  恒成立, 因此式(18)的解为有效解。

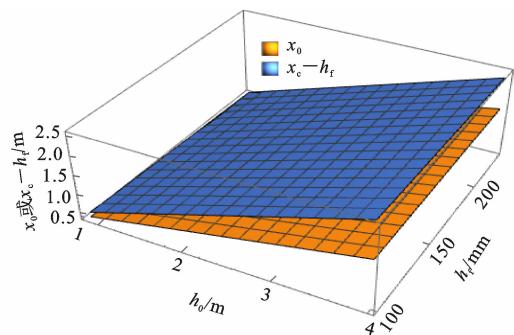
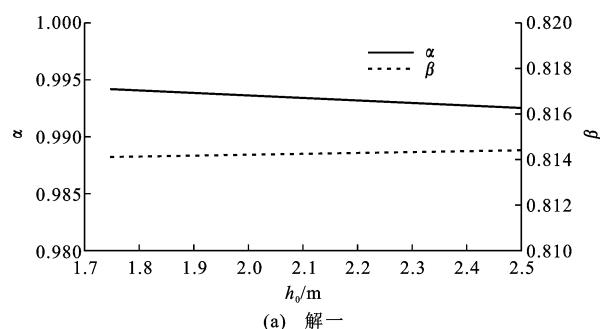
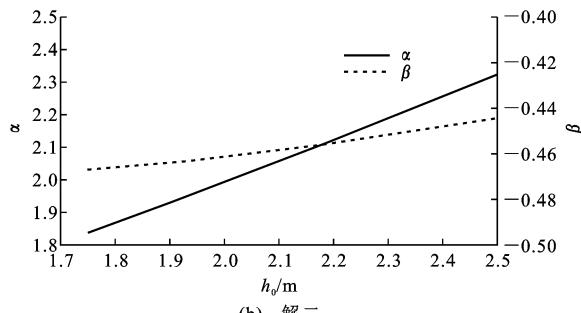


图 3  $x_0$  与  $x_c - h_f$  的关系

Fig. 3 Relationship Between  $x_0$  and  $x_c - h_f$



(a) 解一



(b) 解二

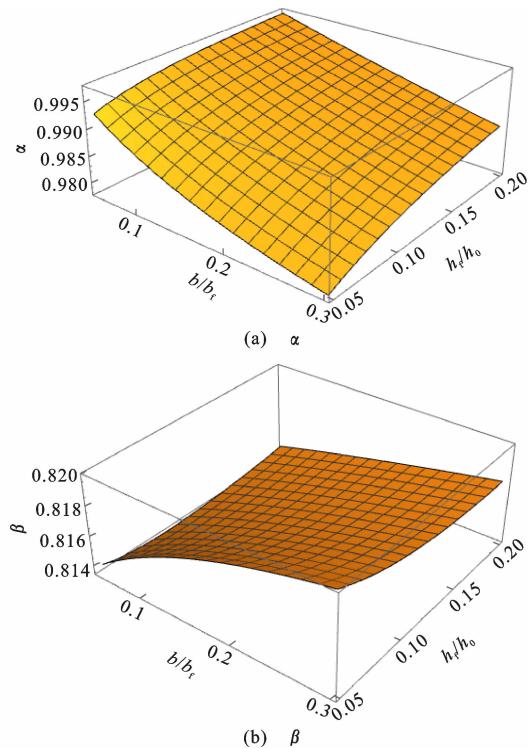
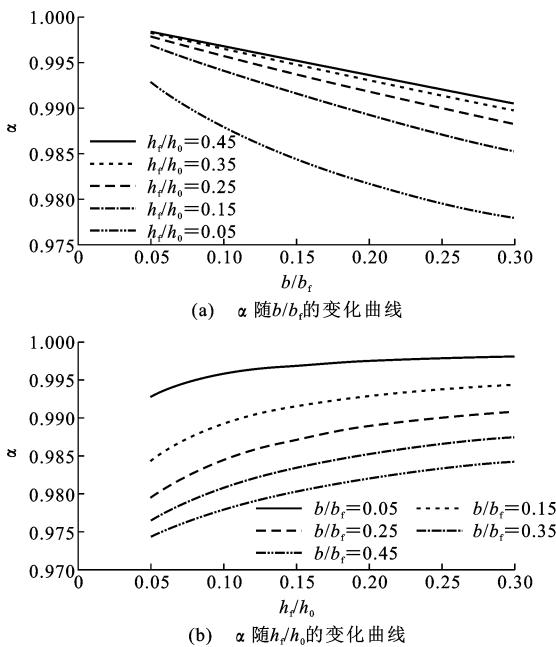
图 4 式(18)的两个解

Fig. 4 Two Solutions of Formula (18)

式(18)有两组解, 根据公路桥梁 T 梁标准图的取值  $h = 1750 \sim 2500 \text{ mm}$ ,  $b_f = 2200 \text{ mm}$ ,  $b = 160 \text{ mm}$ , 翼缘板平均厚度  $h_f = 180 \text{ mm}$ 。将式(18)得到的  $\alpha$  和  $\beta$  的两组解绘制于图 4, 可以看出图 4(b)为不合理解, 应舍去。由图 4(a)可以看出, 在其他几何参数不变的情况下, 单因素  $h_0$  对  $\alpha$  和  $\beta$  的影响非常小。

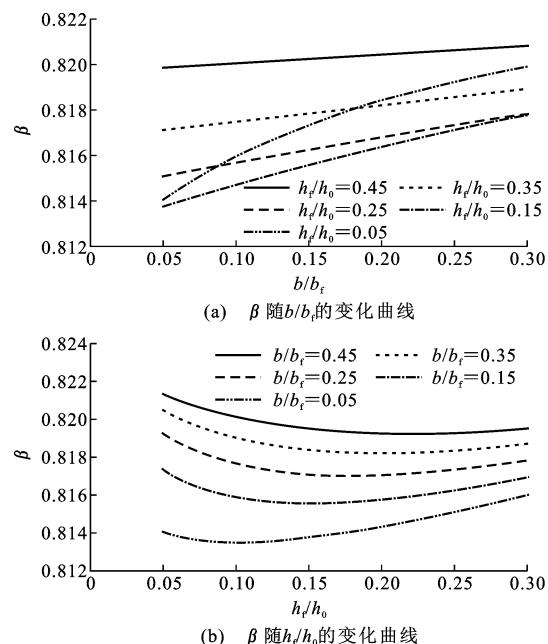
### 2.2 截面几何参数分析

根据式(18)的有效解, 将  $\alpha$  和  $\beta$  与  $b/b_f$  和  $h_f/h_0$  的关系绘制于图 5, 为了更加清晰地展示它们的变化规律, 进一步给出了图 5 的切面图, 详见图 6 和图 7。由图 6 和图 7 可以看出:  $\alpha$  随着  $b/b_f$  的增大而减小, 随  $h_f/h_0$  的增大而增大, 总体呈曲面变化;  $\beta$  随着  $b/b_f$  的增大而增大, 随  $h_f/h_0$  的增大呈扭曲线变化, 总体呈微扭曲面变化。

图 5  $\alpha$  与  $\beta$  的参数分析Fig. 5 Parameters Analysis of  $\alpha$  and  $\beta$ 图 6 参数变化对  $\alpha$  的影响Fig. 6 Effects of Parameter Changes on  $\alpha$ 

### 2.3 材料参数分析

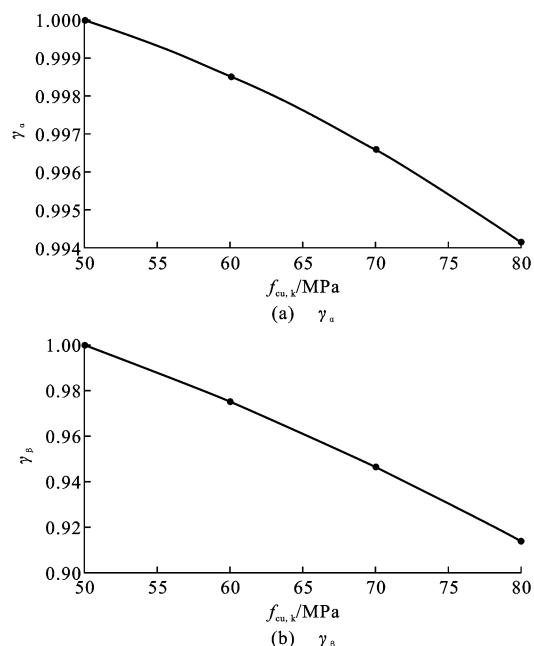
表 1 给出了混凝土等级大于等于 C50 的等效矩形应力图系数, 其中带翼缘截面理论值为在几何参数为定值情况下式(18)的解析解。可以看出, 无论是参考文献中给出的理论值还是规范值, 均无法准确代替带翼缘截面的计算。

图 7 参数变化对  $\beta$  的影响Fig. 7 Effects of Parameter Changes on  $\beta$ 

## 3 推荐公式和算例

### 3.1 推荐公式

将表 1 中带翼缘截面理论值随  $f_{cu,k}$  的变化情况绘制于图 8, 变化曲线呈现出明显的二次曲线规律。将数据点分别进行拟合, 得到式(25)和(26), 这两式的拟合度非常高, 判定系数  $R^2 = 1$ 。

图 8 混凝土强度调整系数  $\gamma_a$  和  $\gamma_b$ Fig. 8 Concrete Strength Adjustment Coefficient  $\gamma_a$  and  $\gamma_b$ 

$\alpha$  和  $\beta$  的混凝土强度调整系数  $\gamma_a$  和  $\gamma_b$  为

$$\gamma_a = 0.9999 + 1.2522 \times 10^{-4} f_{cu,k} - 2.4657 \times 10^{-6} f_{cu,k}^2 \quad (25)$$

$$\gamma_b = 1.0678 - 4.1486 \times 10^{-4} f_{cu,k} - 1.8823 \times 10^{-5} f_{cu,k}^2 \quad (26)$$

式(18)可以给出本文讨论问题的解析解,但是该解非常繁琐,不便于应用。因此本文通过改变  $b$ 、 $b_f$  等几何参数,应用解析解在有限域内得出 256 个数值解,再通过数据拟合的方法给出式(18)的替代算法,如式(27)、(28)所示。通过以上变换得到的式(27)、(28)的拟合度均较高,式(27)的  $R^2 = 0.960866$ ,式(28)的  $R^2 = 0.966295$ 。

$$\alpha = \gamma_a (1.0147 - \frac{5.6708b}{10^5} - \frac{8.3317}{b_f} - \frac{3.0716h_0}{10^6} - \frac{5.72}{10h_f}) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \beta = \gamma_b (0.8087 + \frac{1.9721b}{10^5} + \frac{2.7252}{b_f} + \frac{6.6905h_0}{10^7} + \frac{2.3754b^2h_0}{10^{14}} + \frac{9.0897}{100h_f} - \frac{2.5779b^2h_0h_f}{10^{13}} - \frac{3.455bb_fh_0h_f}{10^{14}} + \frac{3.1091bb_fh_f^2}{10^{13}}) \end{aligned} \quad (28)$$

式中:当混凝土等级小于等于 C50 时,  $\gamma_a$  和  $\gamma_b$  取 1;当混凝土等级大于 C50 时,  $\gamma_a$  和  $\gamma_b$  按式(25)、(26)进行计算。

### 3.2 算例

为比较本文解析算法、推荐公式与规范值的区别,验证推荐简化算法的精确度,选取了目前桥梁结构常采用的 T 型梁、矮 T 梁和小箱梁截面(图 9)进行算例分析,计算结果列于表 2。可以看出,目前的规范建议值不太适用于带翼缘的截面,尤其是当混凝土等级较高时。此外,推荐简化算法的精确度较高,完全可以替代解析解的应用。

## 4 结语

(1)给出了带翼缘截面等效矩形应力图系数的解析解,通过算例对比发现目前的规范值无法准确代替带翼缘截面的计算。

(2)在解析解的基础上进行了几何参数讨论,得出  $\alpha$  和  $\beta$  随  $b/b_f$  和  $h_f/h_0$  的变化呈曲面和微扭曲面的变化特征。

(3)为提高解析公式的可应用性,借助数据拟合的方法对本文得出的解析解进行了数值化后再拟合,给出了  $\alpha$  和  $\beta$  的简化计算方法,由此得到的拟合

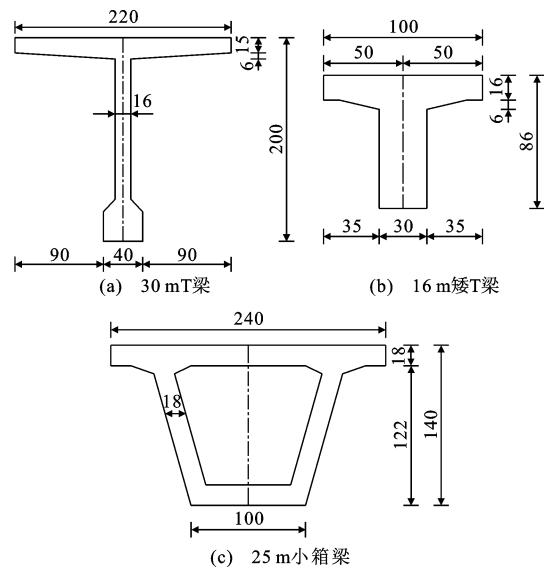


图 9 算例截面(单位:cm)

Fig. 9 Example Sections (Unit:cm)

表 2 算例计算结果

Table 2 Example Calculation Results

序号	截面类型	解析解		推荐算法		规范值	
		$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
1	16 m 矮 T 梁	0.9876	0.8177	0.9837	0.8179	1.00	0.80
2	25 m 小箱梁	0.9908	0.8157	0.9833	0.8172	1.00	0.80
3	30 mT 梁 (C50)	0.9936	0.8142	0.9925	0.8142	1.00	0.80
4	30 mT 梁 (C60)	0.9921	0.7938	0.9911	0.7939	0.98	0.78
5	30 mT 梁 (C70)	0.9902	0.7707	0.9891	0.7706	0.96	0.76
6	30 mT 梁 (C80)	0.9878	0.7442	0.9867	0.7443	0.94	0.74

公式拟合度较高。

(4)通过算例对比分析得出,  $\alpha$  和  $\beta$  的规范建议值与本文解析解偏差分别为 4.8% 和 2.2%。

### 参考文献:

### References:

- [1] 混凝土结构设计规范:GB 50010—2010[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2011.  
Code for Design of Concrete Structures: GB 50010—2010 [S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2011.
- [2] 过镇海. 钢筋混凝土原理[M]. 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2013.  
GUO Zhen-hai. Principles of Reinforced Concrete [M]. 3rd ed. Beijing: Tsinghua University Press,

2013.

- [3] 张树仁,黄侨.钢筋混凝土圆、环形截面偏心受压构件强度的试验研究[J].土木工程学报,1987,20(4):1-14.

ZHANG Shu-ren, HUANG Qiao. Experimental Research on Strength of R. C. Members with Circular or Ring Cross Section Subjected to Eccentric Compression [J]. China Civil Engineering Journal, 1987, 20(4):1-14.

- [4] 王文炜.纤维复合材料加固钢筋混凝土梁抗弯性能研究[D].大连:大连理工大学,2003.

WANG Wen-wei. Study on Flexural Behavior of Reinforced Concrete Beams Strengthened with Fiber Reinforced Plastics (FRP)[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2003.

- [5] 王庆华,熊志斌.钢筋混凝土截面等效矩形应力图系数的计算[J].南昌工程学院学报,2011,30(6):58-61.

WANG Qing-hua, XIONG Zhi-bin. Calculation of Equivalent Rectangular Stress Block Coefficients of Reinforced Concrete Section[J]. Journal of Nanchang Institute of Technology, 2011, 30(6):58-61.

- [6] 刘凤翰.混凝土结构正截面设计 $\alpha_1$ 和 $\beta_1$ 系数研究与应用[J].四川建筑科学研究,2012,38(4):55-57.

LIU Feng-han. The Concrete Structure is  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  and the Coefficients of Cross-section Design and Application[J]. Sichuan Building Science, 2012, 38(4):55-57.

- [7] 丁亚进,张普.普通和高强混凝土等效矩形应力图系数通式[J].结构工程师,2019,35(5):106-110.

DING Ya-jin, ZHANG Pu. General Formula for Equivalent Rectangle Stress Coefficient of Ordinary and High Strength Concrete [J]. Structural Engineers, 2019, 35(5):106-110.

- [8] 朱莉萍,熊杰.圆形截面偏心受压构件的等效应力图形设计方法[J].工业建筑,2001,31(5):75-77.

ZHU Li-ping, XIONG Jie. A Design Method of Eccentrically Compressed Round-section Member with Equivalent Stress Figure[J]. Industrial Construction, 2001, 31(5):75-77.

- [9] 孙铁锋,杨德健.各种形状截面构件等效应力图的特征参数计算方法研究[J].建筑技术开发,2008,35(10):4-6.

SUN Tie-feng, YANG De-jian. Cross-section of Various Shapes, Such as Components of a Bid to the Calculation Method Parameters[J]. Building Technique Development, 2008, 35(10):4-6.

- [10] NAAMAN A. Rectangular Stress Block and T-section

Behavior[J]. PCI Journal, 2002, 47:106-112.

- [11] SINGH B, PATEL V, OJHA P N, et al. Analysis of Stress Block Parameters for High Strength Concrete [J]. Journal of Asian Concrete Federation, 2020, 6(1):1-9.

- [12] YEON K S, YI J C, CHOI Y S. Stress-strain Relation and Stress Block Parameters on Flexural Compressive Strength of Polymer Concrete[J]. Journal of the Korean Society of Agricultural Engineers, 2008, 50(5): 29-37.

- [13] PENG J, HO J C M, PAM H J. Modification on Equivalent Stress Block of Normal-strength Concrete by Incorporating Strain Gradient Effects[J]. Procedia Engineering, 2011, 14:2246-2253.

- [14] KARTHIK M M, MANDER J B. Stress-block Parameters for Unconfined and Confined Concrete Based on a Unified Stress-strain Model[J]. Journal of Structural Engineering, 2011, 137(2):270-273.

- [15] AL-KAMAL M K. Nominal Flexural Strength of High-strength Concrete Beams[J]. Advances in Concrete Construction, 2019, 7(1):1-9.

- [16] VAN SCHALKWYK F, KEARSLEY E. The Influence of Concrete Compressive Strength and Specimen Size on the Compression Stress Block Parameters of Reinforced Concrete[J]. Journal of the South African Institution of Civil Engineering, 2018, 60(4):34-44.

- [17] TRAN T T, PHAM T M, HAO H. Rectangular Stress-block Parameters for Fly-ash and Slag Based Geopolymer Concrete[J]. Structures, 2019, 19: 143-155.

- [18] TEMPEST B, GERGELY J, SKIPPER A. Reinforced Geopolymer Cement Concrete in Flexure: A Closer Look at Stress-strain Performance and Equivalent Stress-block Parameters [J]. PCI Journal, 2016, 61(6):30-43.

- [19] DEEPA RAJ S, GANESAN N, ABRAHAM R, et al. Development of Stress Block Parameters for Geopolymer Concrete [J]. Indian Concrete Journal, 2015, 89(9):47-56.

- [20] 陆春阳,苏益声.关于混凝土多边形非均匀受压区的等效矩形应力图探讨[J].广西大学学报(自然科学版),2003,28(2):146-150.

LU Chun-yang, SU Yi-sheng. Investigation on Characteristic Values of Equivalent Rectangular Stress Block of Non-uniform Compression Stress in Polygon [J]. Journal of Guangxi University, 2003, 28(2):146-150.