

文章编号:1673-2049(2007)01-0069-05

基于网格自适应的钢筋混凝土随机有限元分析

姜峰¹,徐勇²,王朝波²

(1. 大连理工大学 土木水利学院,辽宁 大连 116023; 2. 同济大学 土木工程学院,上海 200092)

摘要:为了在钢筋混凝土结构有限元分析模型中对裂缝进行描述,建立了基于网格自适应的有限元裂缝分析模型,可以比较直观地模拟裂缝的发生和开展过程;同时引入随机模拟方法,采用蒙特卡罗(Monte Carlo)法处理与裂缝有关的参数。用该方法能够模拟钢筋混凝土结构裂缝出现位置和间距的随机性,而且能改进计算数据的后处理。对跨中受力的钢筋混凝土简支梁进行计算分析,所得裂缝分布和位移均与试验结果吻合良好。结果表明,用该方法对钢筋混凝土结构进行分析是合理的,也是可行的。

关键词:钢筋混凝土;裂缝模型;非线性有限元;蒙特卡罗法;自适应

中图分类号:TU375 **文献标志码:**A

Reinforced Concrete Stochastic Finite Element Analysis Based on Mesh Self-adaption

JIANG Feng¹, XU Yong², WANG Zhao-bo²

(1. School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023, Liaoning, China; 2. School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A new cracking model for finite element analysis of reinforced concrete structures was described. This model was set up based on mesh self-adaption and could simulate the crack development and continuation process for the failure analysis of reinforced concrete structures. Also, by using Monte Carlo methods with random variables related to crack development, it was found that the uncertainties of fracture position and distribution could be modeled. The post processings of finite element results were also improved. Finally, the computing result of a simply supported beams shows that the crack pattern and displacement of the beam are accordant with the experiment results. The result shows that the current method is rational and feasible.

Key words: reinforced concrete; cracking model; nonlinear finite element; Monte Carlo method; self-adaption

0 引言

多年来,钢筋混凝土结构的特性主要是通过试验手段来获得。随着计算机的广泛应用和计算模型的发展,采用有限元对钢筋混凝土结构进行非线性分析开辟了另一个研究该类结构特性的有效途

径^[1-3],但是,由于钢筋混凝土结构材料力学性能的复杂性,使得有限元分析中的一些问题一直难以解决,如裂缝的出现和发展就存在着一定的随机性,也使得计算分析结果只能大致得出裂缝分布范围和发展趋势。笔者在综合了其他学者所提出的裂缝模型思想,即在分布式裂缝模型的基础上,按照裂缝发展

收稿日期:2006-12-05

基金项目:辽宁省科学技术基金项目(20032116)

作者简介:姜峰(1968-),男,山东烟台人,教授,工学硕士,E-mail:jiangfen@dlut.edu.cn。

方向进行新的裂缝判断,使得裂缝形态的仿真性能有了较大的提高。针对确定性模型的结构不能模拟结构的不确定性这种情况,在传统有限元的基础上,采用随机数学模型来模拟实际过程中裂缝产生位置和分布的不确定性,而随机数学模型中使用蒙特卡罗法来实现结构中随机量的模拟。为了对裂缝描述进行细化,在分析中引入针对裂缝形成范围的网格自适应方法^[4-6],建立了基于随机模拟的钢筋混凝土自适应有限元分析模型,并与试验结果进行对比。

1 裂缝模型

1.1 传统的裂缝模型

在钢筋混凝土结构的有限元分析中,常用的两种传统的裂缝模型分别是分离式裂缝模型和分布式裂缝模型。

分离式裂缝模型是假定裂缝沿单元边界形成,并且沿单元的边界发展,在相邻单元的混凝土达到开裂条件后,在裂缝处把原来的一个节点变为两个节点。沿单元边界形成的分离式裂缝模型具有一定的优点。如果研究结构物的主裂缝影响,采用单独裂缝是合理的,因为这种裂缝模型表达了应变的非连续性,使结果更接近实际情况,但是这种模型也具有很大的局限性。这种模型在计算中要不断重新划分单元,增加节点,同时使得原来总体刚度矩阵具有狭窄带宽的特性受到影响,导致求解位移运算中计算机效率的降低。

分布式裂缝模型的基本假设是认为开裂的混凝土还保持某种连续性,裂缝是以一种“连续的”形式分布于单元中。如果取裂缝方向为一个局部坐标轴方向,可以认为沿此坐标轴两个正交方向上的混凝土具有不同的物理力学性质。这种方式易于表达沿拉应力方向混凝土强度的突然下降现象。在分布式裂缝模型中,裂缝不是离散的或单个的,而是遍布在一个单元内的多条互相平行的裂隙。分布式裂缝模型的主要优点是:能够自动生成裂缝,而不需要重新改变单元的几何分布;在任何可能的方向上都可以形成裂缝,而不需要预先指定裂缝的方向。这就使该模型具有更大的通用性。

1.2 改进的裂缝模型

在第 1.1 节两种常用模型的基础上,笔者进行了改进,并建立了新的模型,即混合式裂缝模型。混合式裂缝模型是在分布式裂缝模型的基础上按照裂缝发展方向进行新的裂缝判断,避免了裂缝成片出现的一种模型。

混合式裂缝模型将混凝土单元分为可裂单元和不可裂单元。对于可裂单元,在每级荷载下都用最大主拉应力强度准则判别,如果主拉应力达到极限抗拉强度,则称为开裂单元,按分布式裂缝对其刚度阵进行调整。对不可裂单元则不作判别,只按分布式裂缝对不可开裂单元的弹性模量与泊松比进行调整,同时释放相应应力,从而实现控制裂缝周围应力松弛区在以后的加载中不会再次出现开裂。在初始情况下,所有混凝土单元均为不可裂单元,首批可裂单元由弹性阶段的应力状态确定。当这些单元开裂后,根据裂缝方向给出下一批可裂单元,这样可以明确区分出几条裂缝带。由于裂缝带的刚度降低,裂缝两侧的混凝土应力松弛,最后导致裂缝形式与实际离散形式比较接近。这样算得的裂缝形式比分布式裂缝模型更接近试验结果。在理想情况下,随着应力的重分布,裂缝带之间的混凝土主拉应力不会超过极限抗拉强度。

裂缝影响区域的选取比较重要,裂缝主要是影响其两侧的单元,使得它们出现应力释放,在本文中取裂缝间距为其影响区域横向的大小。根据实际中可能出现的不同性质裂缝交叉汇合的现象,笔者认为,这种裂缝对周围单元的影响作用,应该只限于同种裂缝之间,对于裂缝影响区域内方向改变很大的即将开裂单元,应该认为是其裂缝不受影响。本文中使用这种改进的裂缝模型模拟开裂形状。

2 随机模拟方法

2.1 蒙特卡罗法

为了模拟钢筋混凝土材料的不确定性,使用蒙特卡罗法获得随机数。事实上,尽管理论上存在着很多基于随机模拟的有限元分析方法,但是和其他方法相比较,蒙特卡罗法更易于计算。

蒙特卡罗法,或称计算机随机模拟法,是一种基于“随机数”的计算方法。该方法是 20 世纪 40 年代中期由于科学技术的发展和电子计算机的发明,而被提出的以概率统计理论为指导的一类非常重要的数值计算方法;是指使用随机数(或更常见的伪随机数)来解决很多计算问题的方法;是通过抽样试验求解数学、物理及工程技术问题近似解的数值方法,属于试验数学的一个分枝。一个问题一般不是用概率方法就是用确定形式求解,如果使用概率方法,问题中的随机变量和相应函数都是模拟的;而在确定性问题中随机变量和相应函数都是已知的,然后再进行模拟。这种模拟方法通常分为 3 个步骤:①模拟

随机变量函数;②通过大量的试验求得确定问题的解;③对结果进行统计分析。

2.2 随机数的产生

产生随机数的方法可分为物理方法和数学方法。目前普遍采用的是数学方法,它具有速度快、计算简便、可重复等优点。数学方法产生随机数的条件为:①它所产生的随机数序列应均布在 $[0,1]$ 区间;②序列之间互相独立,不存在相关性;③序列重复周期足够长,具有完全可重复性等。用数学方法按某一确定规律在计算机上产生的随机数,显然不是真正随机数,称为伪随机数,但只要这种随机数序列能通过统计检验,就可以认为它们是随机数。

首先,用平方取中法来描述一组伪随机数的产生,即一个定值 x_0 和一个二进制的偶数 $2k$ 从起始点反复进行计算的过程,其平方后得到数 $4k$;然后,取其后的二进制数的中间值作为 x_1 的值并依次类推得出一组随机数;最后,使用这组随机数进行试验,不断修正不合适的地方,直到满足统计检验。

1949年,Lehmer首次提出用乘同余法产生均匀随机数,并在八位十进制计算机ENIAC上进行了运算,所采用的递推公式为

$$x_i = ax_{i-1} \bmod M \quad (1)$$

1961年,Greenberger将乘同余法推广为混合同余法,即

$$x_i = ax_{i-1} + c \bmod M \quad (2)$$

式中: a 为乘子; c 为增量; M 为模; $\bmod M$ 为 M 的同余式。若给定初值 x_0 ,则除以 M ,得到 $[0,1]$ 区间均匀分布的随机数。显然,对于十进制数,当 $M=10k$ 时,求其同余式的运算最简便。

2.3 连续随机变量的模拟

连续分布的随机变量可以用反函数来表示。随机变量 Y 在给定区间 (a,b) 内,其概率密度函数为 $f_Y(y)$ 。如果 X 是均匀分布随机变量,则满足

$$F_Y(y) = X \quad (3)$$

式中: $F_Y(y)$ 为分布函数。因为分布函数 $F_Y(y)$ 在区间 (a,b) 上是严格单调递增函数,所以式(3)中每一个 X 值只对应着一个 Y 根,且

$$P\{y \leq Y \leq y+dy\} = P\{F_Y(y) < X \leq F_Y(y+dy)\} \quad (4)$$

由于 X 在区间 $(0,1)$ 上是均匀分布的,则

$$P\{y \leq Y \leq y+dy\} = F_Y(y+dy) - F_Y(y) = f_Y(y)dy \quad (5)$$

式(5)等号右边的就是期望值。

2.4 随机变量的确定

传统的钢筋混凝土有限元法很难解决钢筋混凝土材料的不确定性,所以在传统有限元的基础上采用随机数学模型来模拟实际过程中裂缝产生位置和分布的不确定性。

钢筋混凝土结构力学性能的不确定性是由很多因素引起的,主要可归结为两个方面:外界环境因素(外因)和结构性质因素(内因)。通常外界作用的影响应该是很小的,而且对钢筋混凝土的成分很难进行确切的控制,所以,混凝土材料自身的不确定性导致产生随机性结果的原因主要是混凝土材料自身的变异性引起的,因此应把研究重点放在材料自身性质的随机性这一点上,将由于荷载或其他作用引起的随机性暂且忽略不计,认为其是确定的。另外,有大量描述钢筋混凝土特征的资料,如结构的抗拉强度和抗压强度就可以从已有的试验结果中获得。这些资料还提供了描述随机变量的数据。研究发现,随机变量是符合正态分布的,并且其统计参数可通过相关规律得到。

此外,实际结构构件中裂缝间距是一个不确定的量。根据黏结滑移理论,裂缝分布的间距可以表示为

$$S_0 \leq S \leq 2S_0 \quad (6)$$

式中: S 为裂缝间距; S_0 为裂缝最小间距。裂缝间距在区间 $[\frac{2}{3}l_{cr,m}, \frac{4}{3}l_{cr,m}]$ 上服从均匀分布, $l_{cr,m}$ 为平均裂缝间距,可以通过实际数据或者从经验公式计算得出的数据中获得。

3 自适应网格划分

自适应网格划分的基本思想是:首先建立初始网格并求解,然后进行误差分析,根据选定的自适应准则和计算精度,确定需要做进一步网格划分的区域,调整网格划分并重新求解,直至整个计算区域均满足精度要求为止。

由于要较精确地得出初始裂缝的位置,必须在裂缝可能产生处尽量细化单元,以缩小初始裂缝所在单元的尺寸,这样对于整个结构来说才能获得较好的定位效果。笔者采取的方法是:先初算结构在荷载作用下的应力分布,然后在此基础上进行误差分析。首先,得到各个单元的尺寸,把应力较大的单元进行细分,得到每个单元的节点及网格节点的密度控制参数,再把这些信息作为背景网格信息取代原先的初始数据,最后回到波前法自动划分网格。

这样,就可以得到更适合分析中使用的网格分布。

一个单元高斯点的初始应力为 σ_G , 则单元应力为 σ_P 的节点可通过式(7)得到

$$\sigma_G = \sum N \sigma_P \quad (7)$$

式中: N 为形函数。解式(7)可得到节点应力 σ_P 。在每个节点, 应力应该根据周围单元进行平均

$$\bar{\sigma}_P = \frac{\sum \sigma_P}{n} \quad (8)$$

高斯点新的应力 σ_G^* 可以通过式(9)得到

$$\sigma_G^* = \sum N \bar{\sigma}_P \quad (9)$$

把 σ_G^* 当作精确值, 高斯点的应力误差为

$$e = \sigma_G^* - \sigma_G \quad (10)$$

误差标准值为

$$\|e\| = \sqrt{\int e^T D^{-1} e d\Omega} \quad (11)$$

应力标准值为

$$\|\sigma\| = \sqrt{\int \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega} \quad (12)$$

所有单元的总误差为

$$E = \sum \|e\|^2 \quad (13)$$

结构的相对误差为

$$\eta = \sqrt{\frac{\sum \|e\|^2}{\sum \|\sigma\|^2}} \quad (14)$$

再进一步分析时, 如果给定了误差 η_0 , 则每个单元的应力误差为

$$e_r = \eta_0 \sqrt{\frac{\|e\|^2}{N}} \quad (15)$$

$$e_r^2 = \eta_0^2 \frac{\|e\|^2}{N} \quad (16)$$

式中: N 为单元数。

如果进一步分析时单元应力为 σ , 则

$$\frac{\sigma^* - \sigma}{\sigma^* - \sigma_r} = \frac{e}{e_r} = \frac{O(h^2)}{O(h_r^2)} = \frac{h^2}{h_r^2} = \frac{\|e\|^2}{e_r^2} = \frac{\|e\|^2}{\sum \|e\|^2 \eta_0^2} N \quad (17)$$

通过式(17)可以得到新的单元尺寸为

$$h_r^2 = h^2 \frac{\sum \|e\|^2 \eta_0^2}{\|e\|^2 N} \quad (18)$$

$$h_r = h \frac{\sum \|e\| \eta_0}{\|e\| \sqrt{N}} = h \eta \sqrt{\frac{\int e^T D^{-1} e d\Omega}{\int \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega}} \quad (19)$$

4 程序的编制

4.1 计算模型

除了第1节提到的模型, 程序中还包括一些其他方面的模型: ①计算模型是离散模型, 混凝土单元是近似四边形单元, 钢筋单元是线形单元, 在钢筋单元和混凝土单元之间是双弹簧黏结单元。②程序中采用 Darwin-Pecknold 本构模型, Kupfer 等^[7]提出的双向受力破坏准则, 认为钢筋是一直处于弹塑性状态。钢筋和混凝土之间的黏结滑移关系采用涉及混凝土抗压强度影响的 Houde-Mizra 经验公式。③计算中还采用了逐步迭代法改变矩阵。

4.2 程序的特点

在程序设计中采用 Visual C++ 6.0 编程工具与基于面向对象的程序设计思想。考虑到实施有限元方法进行分析时需要大量离散单元的情况, 单元数据的人工采集费时费力, 容易出错, 因此, 笔者在程序的前处理中加入了网格自动生成功能和自适应功能, 而且程序中采用合并法生成四边形单元, 最后进行网格的优化, 通过删除节点、单元边及一些特定的单元, 调整相邻单元结构完成了单元的修正。根据所要解决问题的特点, 加入了自适应部分来继续细化生成的网格。图1、2分别为两跨连续梁的初始网格划分和根据裂缝可能出现的区域再次细化后的网格。

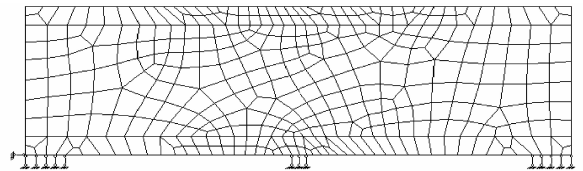


图1 初始网格生成

Fig. 1 Initial Mesh Generation

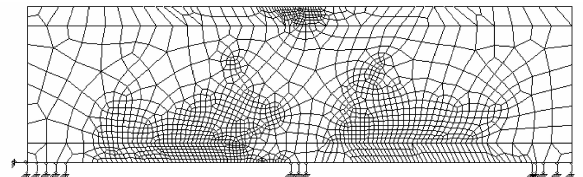


图2 细化网格生成

Fig. 2 Fine Processed Mesh Generation

由图1、2可以看出: 相比细化前的网格生成, 细化后的网格在拉应力比较大的部位都有所加强, 这些地方的网格尺寸比细化前的网格尺寸要小得多, 这对准确确定开裂部位是很有帮助的。

5 算 例

美国学者 Scordelies 和 Bresler 对一系列钢筋混凝土简支梁进行了结构试验,并获得了一套完整的试验数据,他们所发表的试验报告中介绍了梁的非线性破坏全过程。由于该试验测量精确,数据可靠,笔者采用 Scordelies-Bresler 梁作为数值分析的实例,用以检验本文中所编制程序的可靠性。

Scordelies-Bresler 梁的跨长为 3.657 6 m,截面为 228.6 mm×552.5 mm,配有 4 根受拉主筋,总面积为 2 580 mm²,没有任何腹筋。梁跨中受一集中荷载作用,剪切破坏,破坏荷载为 258.1 kN。

混凝土的初始弹性模量、抗压强度、抗拉强度分别为 21.3×10³、24.5、2.45 MPa。钢筋的弹性模量和屈服强度分别为 1.914×10⁵、662 MPa。

试验证明,混凝土的斜裂缝是对称的,并且整个结构的最终破坏是由剪切和斜向拉力引起的。

图 3 为采用前处理程序自动生成的初步单元划分,生成 1 598 个节点、1 496 个单元。

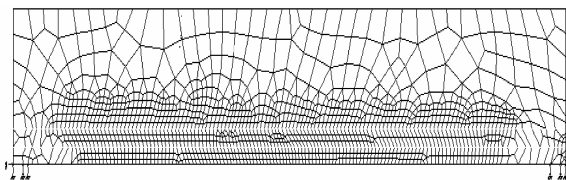


图 3 梁的有限元划分

Fig. 3 Finite Element Division of Beam

对于 Scordelies-Bresler 梁,对其在随机模拟的基础上进行分析,分析过程中的受力特性总体趋势和确定性与有限元分析的结果相同,但是由于反映了随机性,在具体的方面还是表现出了不确定性。笔者建立随机模型的目的是直观反映构件上裂缝出现和发展的随机性特点,图 4 便为一个随机样本的裂缝分布。由图 4 可以看出,基于随机模拟的有限元分析所得出的裂缝分布结果,由于反映了结构部分随机性能的影响,更接近于实际情况。这对模拟结构随机特性及仿真由随机性引起结构的薄弱部位都有明显的作用,同时也为开发完善的钢筋混凝土

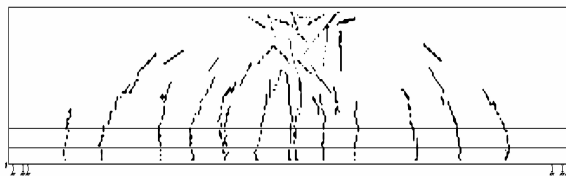


图 4 随机裂缝分布

Fig. 4 Stochastic Crack Distribution

辅助试验或仿真分析软件提供了思路。

6 结 语

笔者在所作的程序检验中,验证了本文程序对钢筋混凝土非线性分析的可靠性,以及在考虑随机变量进行结构随机模拟方面所作工作的有效性。本文程序在本构模型方面采用 Darwin-Pecknold 模型,混凝土破坏准则是 Kupfer 和 Gerstle 的双向应力状态破坏准则,迭代方法采用的是增量迭代法,在数学模型方面考虑了确定性模型和随机性模型,随机性由蒙特卡罗法模拟。

钢筋混凝土非线性有限元法具有全过程仿真特点,对于钢筋混凝土这种应用广泛而又复杂的结构更是有着其他方法无法比拟的优势。笔者采用随机模拟方法和自适应方法对钢筋混凝土结构有限元方法进行了探索,但还有许多问题有待进一步完善。

参考文献:

References:

- [1] 江见鲸,贺小岗. 工程结构计算机仿真分析[M]. 北京:清华大学出版社,1996.
JIANG Jian-jing, HE Xiao-gang. Computer Simulation Analysis of Engineering Structure[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996.
- [2] 康清梁. 钢筋混凝土有限元分析[M]. 北京:中国水利水电出版社,1996.
KANG Qing-liang. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete[M]. Beijing: China Water Conservancy and Electric Power Press, 1996.
- [3] 宋玉普. 钢筋混凝土构件非线性有限单元法分析[J]. 大连工学院学报, 1984, 23(4): 95-104.
SONG Yu-pu. Nonlinear Element Analysis of Reinforced Concrete Structure[J]. Journal of Dalian Institute of Technology, 1984, 23(4): 95-104.
- [4] GEORGE P L. Automatic Mesh Generation-application to Finite Element Methods[M]. Paris: John Wiley & Sons, 1991.
- [5] LOUIS P, SEVENO E. The Advancing-front Mesh Generation Method Revisited[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(21): 3 605-3 619.
- [6] JEREMIC B, STURE S. Tensor Objects in Finite Element Programming[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 41(1): 113-126.
- [7] KUPFER H B, GERSTLE K H. Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1973, 99(4): 853-866.